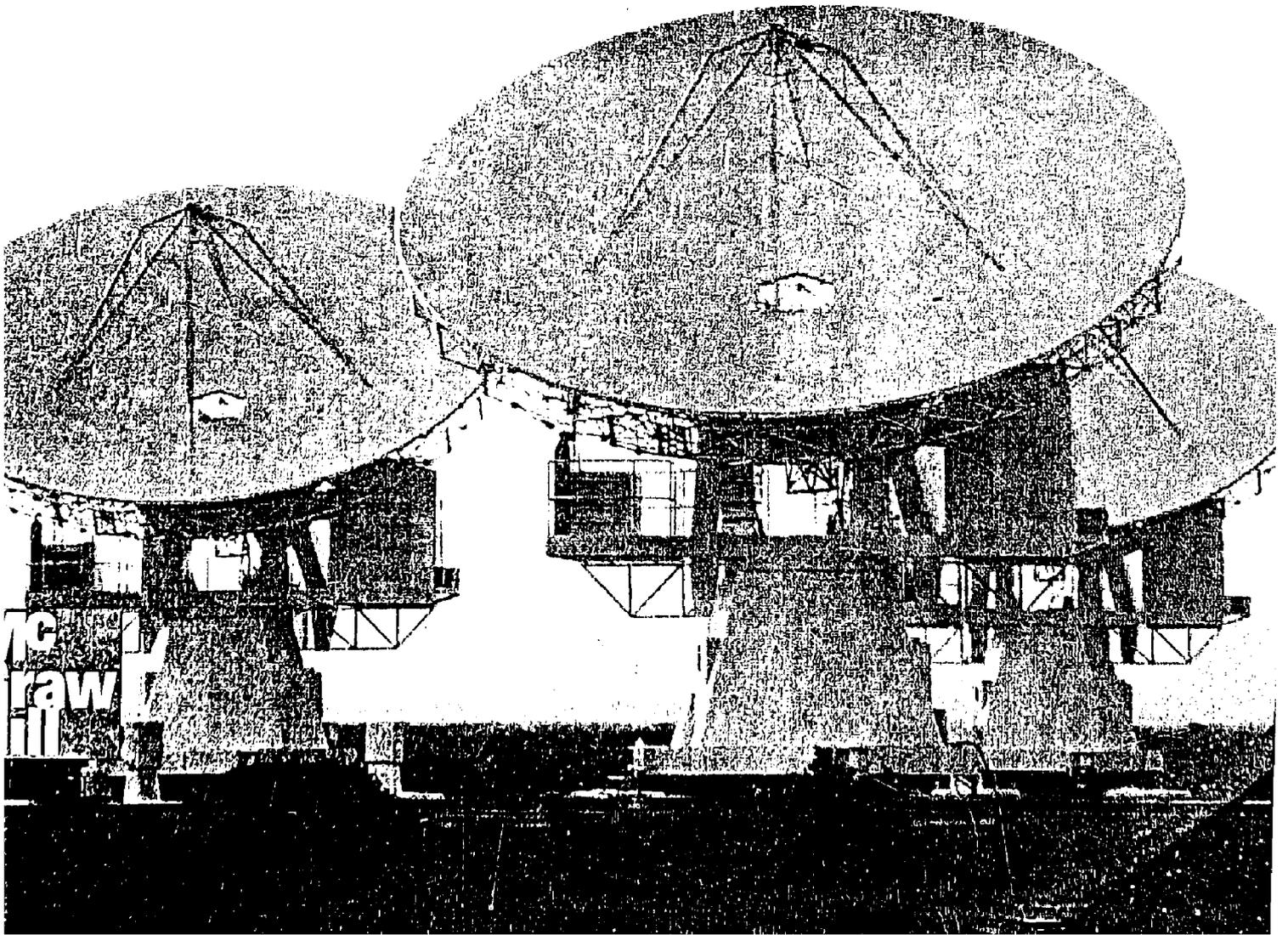
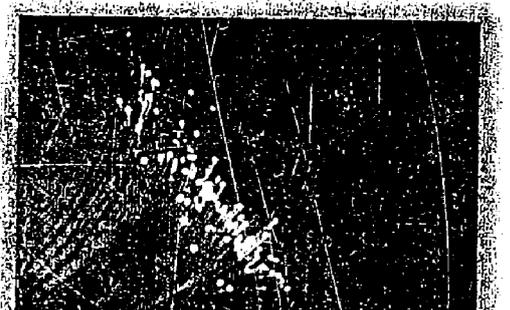
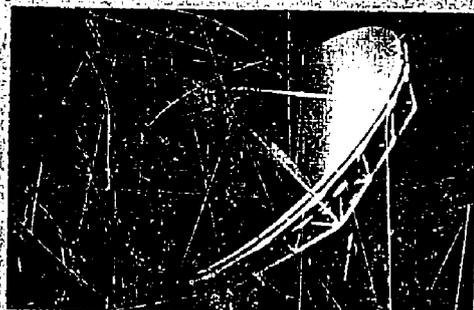
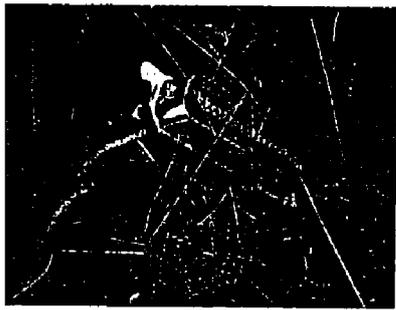


# LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

RODOLFO NERI VELA



**LÍNEAS  
DE  
TRANSMISIÓN**

# LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

**Rodolfo Neri Vela**

 <b>TODO LIBROS SALAZAR</b>	
TARJETAS DE CRÉDITO VENTAS A DOMICILIO	TEXTOS UNIVERSITARIOS ESPECIALIDADES MEDICAS INGENIERIAS Y TECNICOS EN GENERAL
<b>JOSE A. SALAZAR</b>	
Cra. 8A No. 15-63 - Local 129 Tels.: 341 8905 - 780 3298 - Telefax: 775 5500 Bogotá, D.C.	

**McGRAW-HILL**

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID  
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO  
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO  
SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

**Gerente de marca:** Carlos Granados Islas  
**Supervisor de edición:** Felipe Hernández Carrasco  
**Supervisor de producción:** Zeferino García García

## LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,  
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1999, respecto a la primera edición por  
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. de C.V.

*Una División de The McGraw-Hill Companies, Inc.*

Cedro Núm. 512, Col. Atlampa

Delegación Cuauhtémoc

06450 México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 7

**ISBN 970-10-2546-6**

45678901

09876542103

Impreso en México

Printed in Mexico

Esta obra se terminó de  
imprimir en Febrero del 2004 en  
IMPRENTOR, S.A. De C.V.  
Parque Industrial Exportec 1  
C.P.50200 Toluca, Edo.Méx.

*A la memoria de mi abuelo Rodolfo  
y de mi hermano Armando.*

*Agradezco mucho al Ing. Héctor Ortega Maciel su dedicación, paciencia y extraordinaria eficacia al realizar la captura en computadora de los textos, fórmulas y figuras de esta obra.*

# Prólogo

---

Este libro está escrito con el fin de que sea útil como texto para los estudiantes de *Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica*, de *Sistemas de Telecomunicaciones*, o de *Telemática* (informática y telecomunicaciones). Los temas tratados cubren totalmente el programa semestral de estudios de una asignatura que es fundamental en la carrera. El nombre oficial de esta materia (*Líneas de Transmisión*, *Teoría Electromagnética II*, *Transmisión y Propagación de Ondas Electromagnéticas*, etc.) puede variar según la institución en la que se imparta, pero su contenido y los temas que deben ser cubiertos son casi los mismos.

Tomar la decisión para escribir este libro de texto no fue fácil, ya que el investigar con seriedad y redactarlo e ilustrarlo con originalidad exigiría la inversión de muchísimo tiempo. Sin embargo, además de la propia motivación que constantemente me dieron varios colegas ingenieros, la razón final por la que decidí hacerlo fue que no había en el mercado editorial nacional ningún libro en español que, según mi punto de vista, tratase todos los temas de la asignatura con la debida profundidad matemática. Tampoco había un texto que incluyese una cantidad razonable de ejercicios numéricos y, más que nada, que tuviese un orden lógico en la presentación de cada tópico, sus aplicaciones en la actualidad y su relación con otros elementos de los sistemas de comunicaciones. Me percaté de tal situación, o al menos eso creo, al ser profesor de dicha materia en varios semestres y observar cómo un buen porcentaje de mis alumnos sufría al no comprender bien los textos en inglés que yo les recomendaba, pues es indudable que en ese idioma sí existe una literatura técnica muy rica, aunque muchas veces es demasiado amplia para ser cubierta en un solo curso semestral y a veces carece de suficientes ejemplos numéricos desarrollados.

Esta obra trata de subsanar las deficiencias anteriores, presentando los temas en un orden lógico, con el debido rigor matemático, y con una buena cantidad de ejemplos. Espero que los futuros ingenieros la vean como una herramienta útil en sus estudios y le agradezco a la Facultad de Ingeniería de la UNAM la invaluable oportunidad que me brindó para poder realizarla.

Rodolfo Neri Vela

# Contenido

---

<b>1</b>	<b>Introducción a las líneas de transmisión</b>	<b>1</b>
1.1	Sistemas de comunicaciones alámbricos e inalámbricos	1
1.2	Tipos de líneas	4
1.3	Evolución, frecuencias y aplicaciones	10
1.4	El modo TEM y el análisis de líneas por voltajes y corrientes	22
1.5	El modo dominante, los modos superiores y el análisis por campos electromagnéticos	25
<b>2</b>	<b>Teoría de las líneas de dos conductores</b>	<b>31</b>
2.1	Conceptos generales y parámetros de una línea	31
2.2	Ecuación general de una línea de transmisión	51
2.3	Propagación en líneas acopladas	66
2.4	Impedancia de entrada de una línea terminada con una carga arbitraria	71
2.5	Impedancia de entrada de una línea terminada en corto circuito	76
2.6	Impedancia de entrada de una línea terminada en circuito abierto	78
2.7	Obtención de $Z_0$ y $\gamma$ a partir de las impedancias de entrada medidas en líneas terminadas en corto circuito y circuito abierto	81

2.8	Reactancia de entrada y aplicaciones de líneas sin pérdidas terminadas en corto circuito y en circuito abierto	85
2.9	Líneas desacopladas y ondas estacionarias	90
2.10	Reflexiones en el generador	106
2.11	La matriz de transmisión	108
2.12	Voltajes y corrientes en función de las variables de entrada	110
2.13	La carta de Smith	116
2.14	Pérdidas en una línea y eficiencia de transmisión de potencia	136
2.15	Uso de la carta de Smith para líneas con pérdidas	152
2.16	Acoplamiento de impedancias	159
2.16.1	Acoplamiento con una sección de $\lambda/4$	162
2.16.2	Uso de la carta de Smith en su forma de admitancias	174
2.16.3	Acoplamiento con un equilibrador reactivo (“stub”)	178
2.16.4	Acoplamiento con dos equilibradores reactivos (dos “stubs”)	182
2.17	Resonancia, factor de calidad y cavidades resonantes	191
2.18	Problemas	196
<b>3</b>	<b>Aplicaciones de las líneas de dos conductores</b>	<b>203</b>
3.1	El cable bifilar	203
3.2	El cable multipar trenzado	205
3.3	El cable coaxial terrestre	208
3.4	El cable coaxial submarino	212
<b>4</b>	<b>Teoría de las guías de ondas</b>	<b>215</b>
4.1	Introducción	215
4.2	La onda electromagnética plana	216
4.2.1	La onda plana en un medio sin pérdidas	218
4.2.2	La onda plana en un medio con pérdidas	226

4.2.3	La onda plana en un conductor	229
4.3	Teoría general de los modos TE	232
4.4	Teoría general de los modos TM	235
4.5	La guía de dos placas paralelas	235
4.5.1	Generalidades	235
4.5.2	Los modos TE	241
4.5.3	Los modos TM	246
4.6	Velocidades de los modos TE y TM. Teoría general	251
4.7	Impedancias de los modos TE y TM. Teoría general	258
4.8	Guías rectangulares	262
4.8.1	Los modos TE	264
4.8.2	Los modos TM	277
4.8.3	El modo dominante y estándares de guías	283
4.8.4	Modos degenerados	287
4.8.5	Corrientes en las paredes	288
4.8.6	Potencia transmitida	292
4.8.7	Atenuación	297
4.8.8	Excitación y extracción de los modos TE y TM	302
4.8.9	Cavidades resonantes y factor de calidad	305
4.9	Guías circulares	311
4.9.1	Los modos TE	314
4.9.2	Los modos TM	320
4.9.3	Estándares de guías y aplicaciones	329
4.9.4	Potencia transmitida y atenuación	334
4.10	Guías elípticas	336
4.11	Problemas	338
<b>5</b>	<b>Algunos componentes fundamentales de los sistemas de guías de ondas</b>	<b>341</b>
5.1	Comparación entre una línea coaxial y una guía de ondas	341
5.2	Ondas estacionarias en guías de ondas	345
5.3	La matriz de dispersión	348
5.4	Acoplamiento de impedancias	350

5.4.1	El iris	352
5.4.2	El poste	354
5.5	Algunos otros componentes y dispositivos de microondas	355
5.5.1	Atenuadores	356
5.5.2	Cambiadores de fase	359
5.5.3	Uniones T	363
<b>6</b>	<b>Líneas de cinta y microcinta</b>	<b>365</b>
6.1	Introducción y aplicaciones	365
6.2	La línea de cinta	367
6.3	La microcinta	368
<b>7</b>	<b>Teoría de las fibras ópticas</b>	<b>371</b>
7.1	Introducción	371
7.2	Tipos de fibras y cables ópticos	373
7.3	Propagación y ecuación característica en una fibra de índice escalonado	377
7.4	Método aproximado para resolver la ecuación característica de una fibra de índice escalonado	391
7.5	Constante de fase y frecuencia de corte de los modos en una fibra de índice escalonado	394
7.6	Conceptos adicionales sobre el modo dominante	412
7.7	Modos linealmente polarizados	422
7.8	La fibra monomodo	425
7.9	Teoría de la óptica radial o geométrica	427
7.10	Propagación en fibras multimodo de índice escalonado	433
7.11	Angulo de aceptación y apertura numérica	437
7.12	Propagación en fibras multimodo de índice gradual	440
7.13	Problemas	446
<b>8</b>	<b>Componentes y sistemas con fibras ópticas</b>	<b>449</b>
8.1	Introducción	449
8.2	Atenuación	451

8.3	Producto ancho de banda • distancia	453
8.4	Fuentes de luz	456
8.5	Amplificadores	461
8.6	Detectores ópticos	465
8.7	Ejemplos de sistemas terrestres y submarinos	466
8.7.1	Redes terrestres de larga distancia	466
8.7.2	Cables submarinos	466

<b>Apéndice 1</b>	<b>Funciones trigonométricas e hiperbólicas en términos de exponenciales</b>	<b>470</b>
-------------------	--	------------

<b>Referencias</b>	<b>472</b>
--------------------	------------

<b>Índice</b>	<b>476</b>
---------------	------------

# Introducción a las líneas de transmisión

---

## 1.1 Sistemas de comunicaciones alámbricos e inalámbricos

Esencialmente, un sistema de comunicaciones permite transmitir y/o recibir información. Los componentes y las características del sistema determinan qué tipo de información (telefonía, televisión, música, datos de computadoras, etc.) puede ser transmitida o recibida, cuánta (número de canales o velocidad de los datos), en qué frecuencias, con qué rapidez y fidelidad, a qué distancia, a qué costo y con qué tanta cobertura, además de su grado de inmunidad a interrupciones, interferencias o actos de vandalismo, y varios otros parámetros de operación.

Los elementos fundamentales de un sistema de comunicaciones se muestran en la Fig. 1-1. La fuente generadora del mensaje puede ser un aparato telefónico casero, la cámara de video de una compañía televisora que transmite algún evento en vivo, la computadora de alguna institución bancaria, un teléfono celular o un sensor de niveles de voltaje a bordo de una sonda interplanetaria. Para que dicho mensaje pueda ser transmitido hacia su punto de destino, primero es necesario transformarlo o acoplarlo para que se adapte a las propiedades de transferencia del canal de transmisión. Conviene recordar que, en este caso, el *canal* es el medio por el que viaja la información, a diferencia de lo que se entiende, por ejemplo, por un canal telefónico o un canal de TV. Es decir, un canal de transmisión es un medio

que, según sus características, es capaz de transportar uno, varios o muchos canales de distintos tipos de información. El proceso de acoplamiento en el bloque transmisor de la figura puede involucrar, según el caso, varias técnicas electrónicas como son la modulación, codificación, multicanalización o multiplexaje, conversión elevadora de frecuencia y amplificación de la señal que se desea transmitir.



Fig. 1-1 Elementos fundamentales de un sistema de comunicaciones.

Por lo que se refiere al canal o medio de transmisión, existen dos opciones: alámbrico o inalámbrico. En el primer caso, según las características de la información, y a manera de ejemplo, se puede usar una línea bifilar de cobre, un cable coaxial, una guía de ondas rectangular, o una fibra óptica multimodo de índice gradual, y son precisamente estos tipos de canales de transmisión, además de otros, los que son tratados en este libro de texto. Evidentemente, todos estos elementos “alámbricos” son conocidos, por lo general, en la forma de cables. Son visibles, tangibles y, además, flexibles en la mayoría de los casos. Sin embargo, debido a estas características físicas, sólo permiten enlazar un punto fuente con un solo punto de destino. Si se quiere que la señal fuente también sea recibida en otros puntos de destino, se requerirá instalar un número adicional e igual de cables conectados desde la fuente o desde un nodo de distribución hasta esos puntos. La distribución de televisión por cable a los hogares es un ejemplo claro de tal situación.

La alternativa inalámbrica corresponde básicamente a la transmisión a través del aire, usando para ello una gran diversidad de antenas, aunque también hay otros casos muy particulares como la transmisión submarina y la espacial. Las antenas empleadas pueden variar en cuanto a su forma y dimensiones, según las frecuencias de trabajo, la cantidad de información

que se requiere transmitir y la dirección o región hacia donde se le desea enviar. Es obvio que, a diferencia del medio alámbrico, este tipo de canal sí permite llegar simultáneamente con un solo punto transmisor a muchos puntos de destino, pero la calidad de la transmisión puede ser afectada por interferencias o condiciones atmosféricas adversas. La distribución directa de televisión por satélite hacia miles de platos parabólicos caseros es un ejemplo de esta aplicación. Otro caso muy importante y exclusivo de las comunicaciones inalámbricas es la posibilidad de enlazar puntos móviles (aviones, barcos, autos, personas, etc.) con puntos fijos, o bien con otros puntos también móviles.

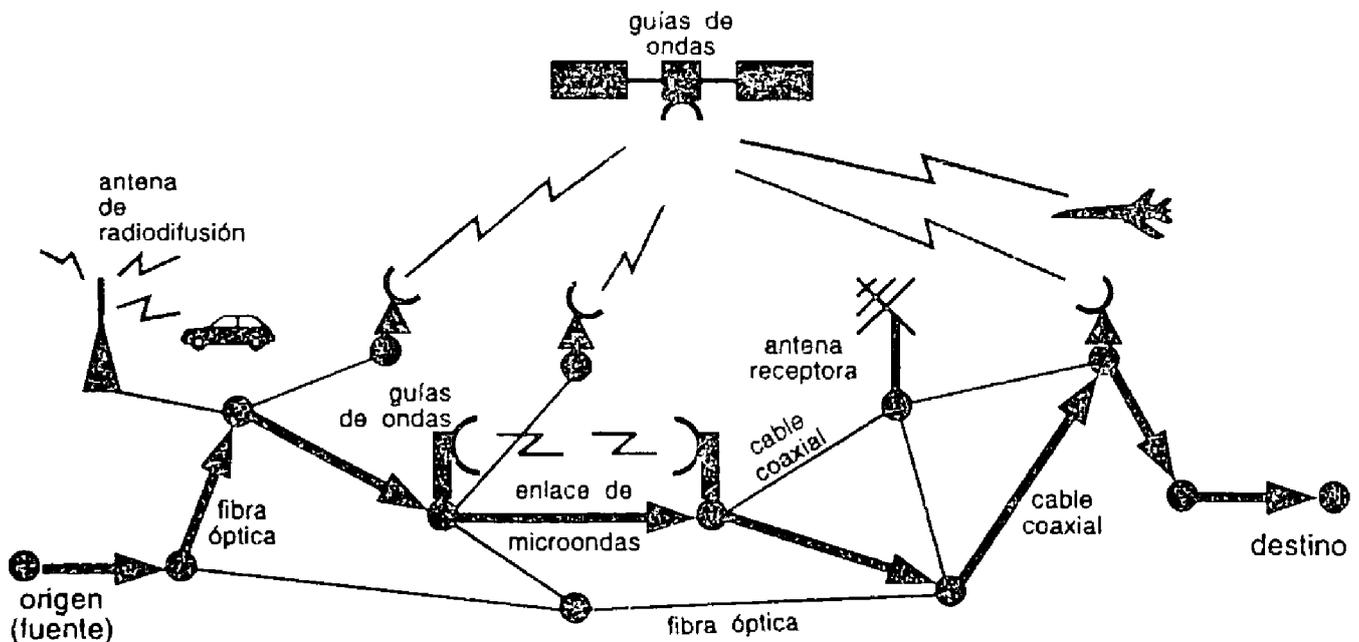
A diferencia del medio alámbrico, el inalámbrico no es tangible y la propagación de las ondas electromagnéticas a través de él resulta, inclusive para un ingeniero, aún más mágica que cuando vemos un cable físicamente, a pesar de que en ambos casos el viaje de la información es regido por las mismas ecuaciones establecidas hace más de cien años por el escocés James Maxwell. La transmisión inalámbrica es tan amplia que se le estudia en otra asignatura de la carrera, generalmente denominada Antenas y Propagación.

Ahora bien, independientemente del medio empleado, ya sea alámbrico o inalámbrico, la señal se irá atenuando y distorsionando conforme avance rumbo a su destino, debido a las pérdidas por calor en los conductores o por la absorción y dispersión de energía en las moléculas de la atmósfera, según sea el caso, además del efecto producido por otras características propias de cada medio o canal en particular.

Una vez que la información ha llegado a la zona de destino, debe pasar primero por un receptor, mostrado como el cuarto bloque de la Fig. 1-1. Este conjunto de componentes electrónicos restaura la información a su forma original, amplificándola y realizando el proceso inverso al del bloque transmisor. Es decir, en el receptor se llevan a cabo la amplificación, conversión reductora de frecuencia, separación de canales o demultiplexaje, decodificación y demodulación de la señal. Finalmente, el mensaje original en banda base puede ser recibido e interpretado en el punto de destino, ya sea en el auricular de un teléfono, en la pantalla de un televisor, o en algún otro dispositivo, de acuerdo con el tipo de la señal recibida.

Los servicios de telecomunicaciones y la demanda de los mismos crecen día a día. De hecho, la economía y el ritmo de desarrollo de cada país depende en gran parte de la infraestructura de comunicaciones o “sistema nervioso”

que tenga. Hay una gran diversidad de redes, públicas y privadas, y dependiendo de la distancia que haya entre el punto fuente y el punto de destino de la Fig. 1-1, de la tarifa cobrada por circuito o por canal, de las opciones de enrutamiento y respaldo, y del ancho de banda requerido, es posible que una señal de información viaje a través de varios tipos de equipos y tecnologías, tanto alámbricas como inalámbricas, sin que el usuario se entere o preocupe de ello. La Fig. 1-2 ilustra un caso ficticio cualquiera a manera de ejemplo, en el que la información pasa por un cable de fibras ópticas, las guías de ondas de un enlace terrestre de microondas y un cable coaxial, antes de llegar a su destino.



**Fig. 1-2** Una red de telecomunicaciones utiliza diferentes tecnologías y equipos. Las flechas gruesas indican una de las varias rutas posibles para que la señal llegue a su destino.

## 1.2 Tipos de líneas

Una línea de transmisión es cualquier sistema de conductores, semiconductores, o la combinación de ambos, que puede emplearse para transmitir información, en la forma de energía eléctrica o electromagnética,

entre dos puntos. El tradicional par de hilos de cobre o línea bifilar (Fig. 1-3 a) es la configuración más simple, tiene el menor ancho de banda y la menor capacidad de transmisión dentro de la variedad de líneas que se

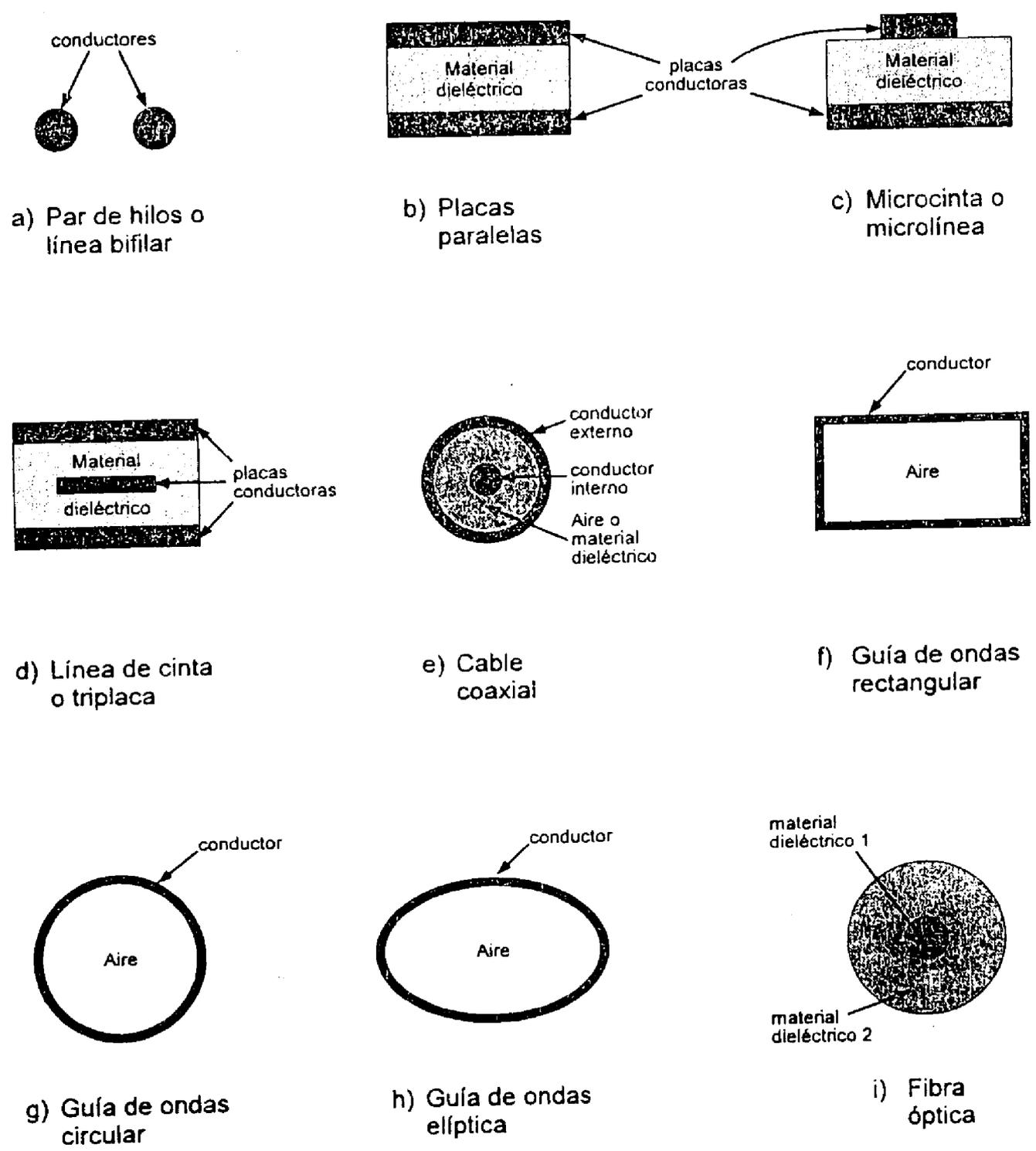
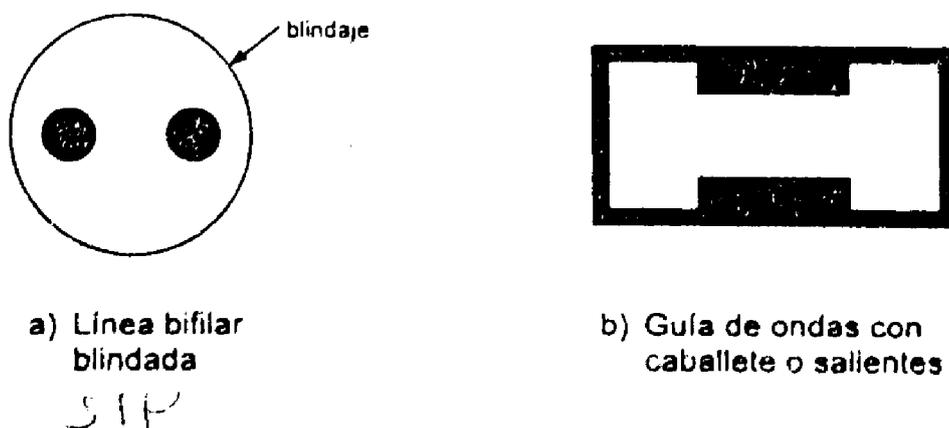


Fig. 1-3 Corte transversal de varios tipos de líneas de transmisión. La dirección de propagación de la información puede ser hacia el interior o hacia fuera del papel. Nótese que, por razones prácticas de la ilustración, estos ejemplos no están proporcionados a la misma escala.

utilizan actualmente, pero no por ello deja de ser fundamental y muy importante.

Todas las configuraciones mostradas en la Fig. 1-3 son capaces de transmitir información. Unas tienen un solo conductor cerrado (guías de ondas), otras poseen dos conductores (línea bifilar, placas paralelas, microcinta y cable coaxial), algunas tienen tres conductores (triplaca), y otras ningún conductor sino solamente material dieléctrico (fibra óptica). Desde luego, sus características, bondades y aplicaciones son diferentes, pero lo interesante es que todas ellas pueden ser analizadas matemáticamente resolviendo el mismo conjunto de ecuaciones diferenciales de Maxwell, aplicando las condiciones de frontera adecuadas. En todos los casos, la señal es guiada en el sentido longitudinal de la estructura. Por tanto, en realidad, todas estas configuraciones son guía-ondas o guías de ondas y también líneas de transmisión. Estos términos son sinónimos, pero tradicionalmente se ha dado por denominar "líneas" a las estructuras con dos elementos conductores, como el par de hilos y el cable coaxial, y "guías de ondas" a las estructuras de un solo elemento conductor. Por su parte, y debido a su más reciente invención y comercialización, las fibras ópticas han merecido su nombre muy particular que las diferencia de las demás, aunque también son, por obvias razones, guías de ondas o líneas de transmisión. Estas aclaraciones justifican precisamente el título elegido para este libro.

Las dimensiones prácticas de cada tipo de línea dependen del rango de frecuencias en el que se desea transmitir (véase la siguiente sección).

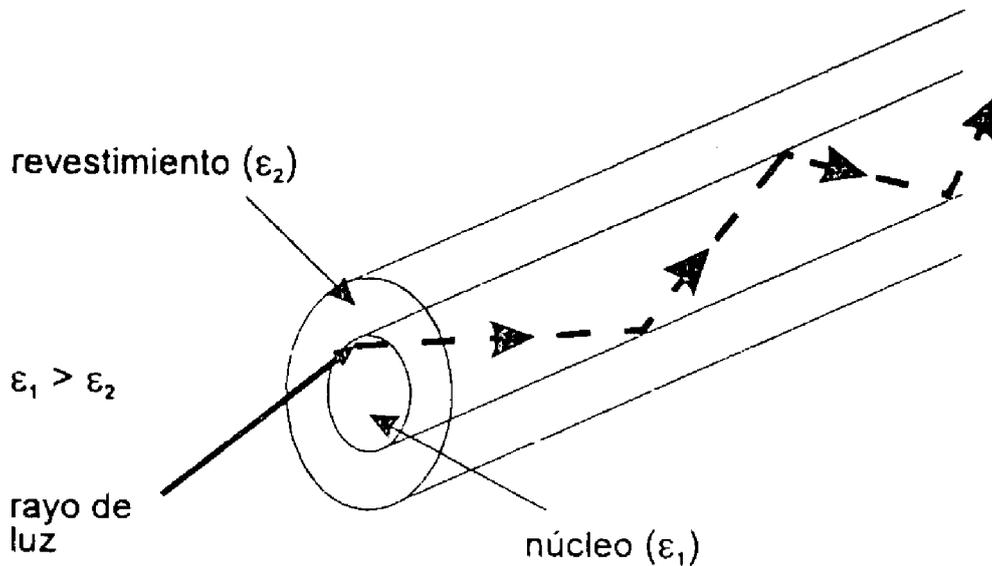


**Fig. 1-4** Ejemplificación de dos variantes de líneas de transmisión, derivadas de las configuraciones mostradas en la Fig. 1-3.

Asimismo, existen otras configuraciones de estructuras guía-ondas que se derivan de las mostradas en la Fig 1-3. Por ejemplo, si los dos conductores de la línea bifilar son rodeados por una pared circular metálica que actúe como un blindaje, las pérdidas por radiación del par de hilos se eliminan. Este nuevo arreglo se denomina línea bifilar blindada (Fig. 1-4 a). Otro ejemplo sería el de la guía de ondas “con caballete” (Fig. 1-4 b), que es una guía rectangular con dos placas metálicas longitudinales colocadas en su interior, una arriba y otra abajo. Estas salientes o caballetes actúan, según sus dimensiones, como una carga distribuida uniformemente, de determinado valor, que aumenta el ancho de banda de operación de la guía, aunque a cambio de mayores pérdidas por calor en las paredes. Las mismas salientes también reducen el valor de la impedancia característica de la guía, y esto resulta útil para satisfacer ciertas necesidades de acoplamiento óptimo con otros elementos del sistema de transmisión.

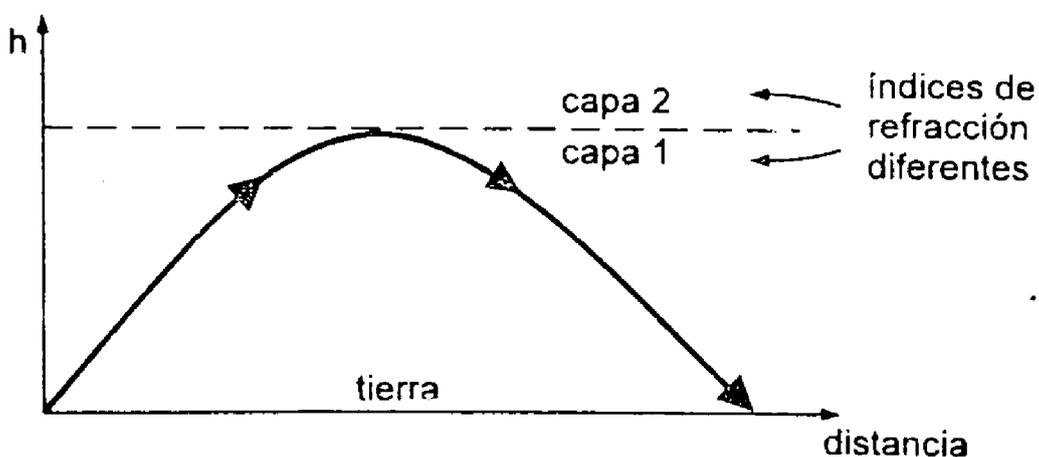
Aunque los conceptos dados en esta sección serán vistos con mayor detalle en los capítulos siguientes, por el momento conviene indicar que los cables coaxiales y las guías de ondas de un solo conductor (Figs. 1-3 e, f, g y h), o “conductores huecos” como también se les llama a estas últimas, no presentan pérdidas de potencia por radiación ya que, debido al efecto pelicular de corriente en los conductores, las ondas electromagnéticas quedan confinadas a ir rebotando a lo largo de las estructuras. Las guías de ondas son, en principio, más fáciles de fabricar que los cables coaxiales, ya que el problema de tener que sostener perfectamente alineado al conductor interno (Fig. 1-3 e) se elimina en las guías. Aunque por lo general tienen el inconveniente de no ser flexibles, las guías de ondas pueden transportar más potencia y presentan menos atenuación que los cables coaxiales, porque usualmente están rellenas de aire (no hay pérdidas por dieléctrico) y la extensión de sus superficies conductoras es mayor (menos pérdidas por calor) que la de los coaxiales.

La propagación de la información en las fibras ópticas también se realiza por medio de repetidas reflexiones a lo largo de la línea. Esta carece de conductores, pero la diferencia entre la permitividad  $\epsilon$  del dieléctrico 1 y el dieléctrico 2 (Fig. 1-3 i) produce el fenómeno de reflexión sucesiva en la zona perimetral que separa a ambos materiales, impidiéndose de esta manera la fuga de energía por radiación (Fig. 1-5). Una situación parecida, aunque no idéntica, sucede en las comunicaciones inalámbricas, a frecuencias mucho



**Fig. 1-5** Principio básico de propagación de la luz en una fibra óptica.

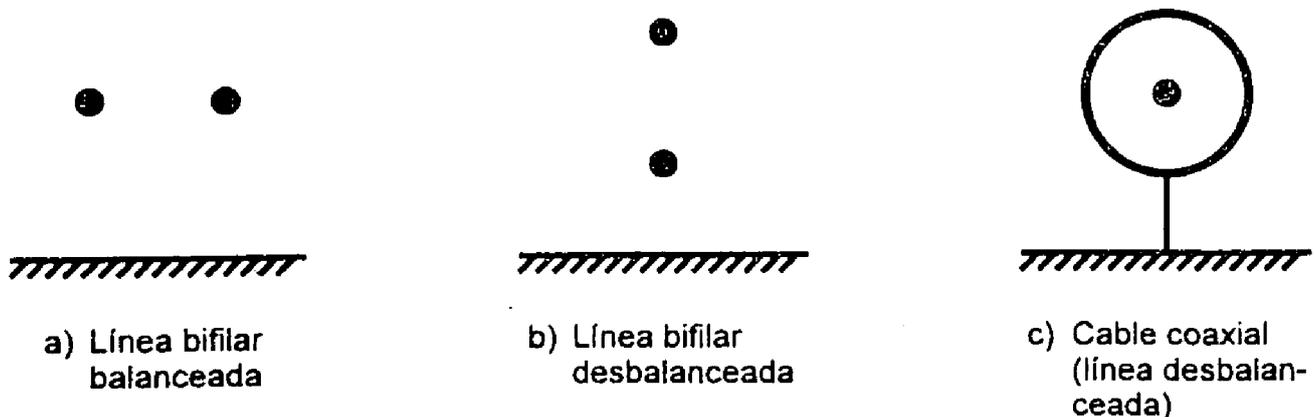
más bajas, cuando se forman “ductos” en la atmósfera. Tales pasajes o ductos por los que pueden propagarse las ondas electromagnéticas de una manera direccional, y no dispersa, existen en determinadas regiones donde las condiciones meteorológicas producen importantes cambios en el índice de refracción  $n$  de la atmósfera a una altura  $h$  ( $n = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{\epsilon / \epsilon_0}$ , donde  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa,  $\epsilon$  la permitividad del medio de propagación y  $\epsilon_0$  la permitividad en el espacio libre). Esto permite que una señal pueda ser transmitida a grandes distancias (Fig. 1-6), hacia receptores situados adecuadamente. El rango o alcance, las frecuencias de transmisión



**Fig. 1-6** Trayectoria de una señal radioeléctrica dentro de un ducto atmosférico.

y las horas útiles de operación dependen mucho de las condiciones atmosféricas y, por tanto, dichos ductos son poco confiables y de capacidad muy limitada. El mismo principio se aplica a los enlaces ionosféricos, que tienen un alcance mucho mayor, ya que la reflexión se produce a alturas más elevadas.

Regresando a las líneas físicas de transmisión, es obvio que el par de hilos o línea bifilar abierta de la Fig. 1-3 a presenta fuertes pérdidas por radiación, ya que los campos electromagnéticos se extienden lejos de la línea, aun cuando ésta los guía longitudinalmente hacia su destino. Se utilizó mucho en cierta época porque era económica y muy fácil de construir, pero con el tiempo tiende a caer en desuso, especialmente en los países desarrollados. Sus características de trabajo pueden ser variadas al aumentar o disminuir la separación entre los dos conductores, y su utilidad práctica, como se verá en la sección siguiente, se reduce generalmente a frecuencias inferiores a 500 kHz. Los dos conductores son suspendidos a la misma altura sobre el piso. Ninguno de ellos está conectado a tierra; el potencial de uno es igual y de signo contrario al potencial del otro, con relación a tierra. A este tipo de configuración se le llama "línea balanceada" (Fig. 1-7 a). En cambio, si por ejemplo, los dos conductores están en un plano vertical (Fig. 1-7 b), el conductor inferior tiene una capacitancia más grande que la del superior con relación al piso, y se dice que la línea está "desbalanceada" o desequilibrada, porque las corrientes resultantes en los dos conductores son diferentes. Los cables coaxiales también son inherentemente líneas desbalanceadas, porque



**Fig. 1-7** Ejemplos de líneas balanceadas y desbalanceadas.

el conductor externo (que rodea totalmente al interno) se conecta a tierra (Fig. 1-7 c).

Para acoplar o unir eficazmente una línea balanceada con otra que es desbalanceada, o viceversa, hay que intercalar entre ellas algún dispositivo o circuito de transformación, que dentro de la jerga común se conoce como *balun*\*. Hay varios tipos de estos transformadores o balanceadores, cuya elección depende de los requerimientos de cada caso. Este tema tradicionalmente se estudia en detalle en la asignatura de Antenas, ya que, por ejemplo, si una antena balanceada tipo dipolo es alimentada por un cable coaxial (línea desbalanceada), entonces el conductor externo y un brazo del dipolo tienen cierto potencial con relación a tierra, que es diferente del potencial del conductor interno y del otro brazo del dipolo. El resultado de este desbalance o diferencia de potencial relativo es que se excitan corrientes en el conductor externo del cable coaxial, y la corriente en ambos brazos del dipolo ya no es igual, provocando cambios en el patrón de radiación de la antena. Un balun o transformador de corrientes seleccionado adecuadamente resuelve este problema. Otro ejemplo de desbalanceo sería la conexión de una antena receptora de TV tipo Yagi con el coaxial que conduce la señal al televisor.

Para concluir esta sección, conviene aclarar que, como se verá más adelante, la línea bifilar con aislamiento dieléctrico (principalmente polietileno) sí se emplea ampliamente en telefonía, transmisión digital de baja velocidad y recepción de TV en VHF (véanse la Fig. 1-9 y la Tabla 1-2).

### 1.3 Evolución, frecuencias y aplicaciones

Para poder comprender el porqué en la actualidad se emplea una diversidad de líneas de transmisión, conviene hacer un poco de historia y también relacionar dichas líneas con el otro medio de transmisión, es decir, el inalámbrico, ya que este último no podría utilizarse sin el apoyo o la complementariedad de las primeras.

Durante milenios, el hombre sólo pudo transmitir muy limitadas cantidades de información, a muy baja velocidad, y con un rango o alcance muy corto.

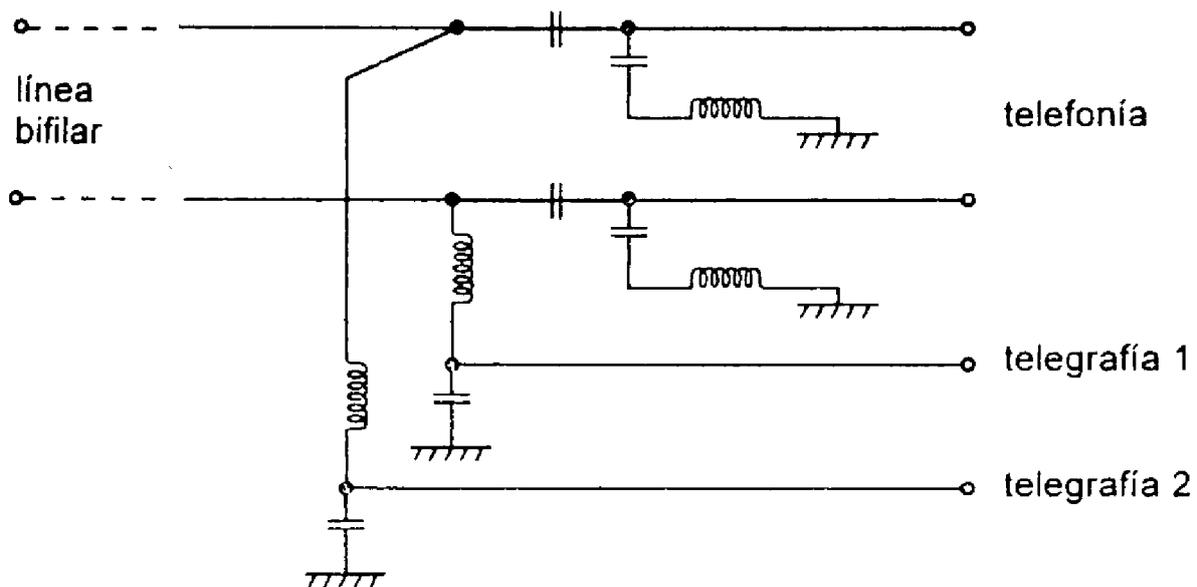
---

\* La palabra *balun* proviene de la combinación en inglés balanced-unbalanced.

Medios acústicos u ópticos poco confiables en su eficacia como gritar, sonar cuernos de animales, tocar tambores, encender y mover antorchas, reflejar intermitentemente la luz del Sol en espejos, o emplear lámparas para conseguir un efecto análogo en la oscuridad, entre muchas otras técnicas igualmente limitadas, fueron sus únicas herramientas durante muchos siglos, hasta que se inventaron la escritura y luego la imprenta, así como diversos medios de transporte rápido sobre tierra y mar. Pero a pesar de estas sorprendentes innovaciones, y aún a principios del siglo XIX, en general los mensajes y la información podían tardar semanas o meses en llegar a su destino, con una alta probabilidad de interferencia (robo o pérdida accidental) y de inutilidad u obsolescencia al ser recibidos.

Las invenciones y el uso práctico del telégrafo en 1838 y del teléfono en 1876 vinieron a cambiar las cosas radicalmente. Miles de kilómetros de líneas abiertas fueron tendidas sobre postes elevados entre las principales ciudades del mundo, a lo largo de los caminos o las vías férreas, inicialmente para transmitir mensajes telegráficos codificados (código Morse) y después voz o conversaciones telefónicas, de una manera casi instantánea, dependiendo de la habilidad de los operadores para establecer los enlaces. Las primeras líneas consistían en un solo conductor de hierro suspendido por postes y el retorno de la corriente eléctrica se conseguía por tierra, es decir, el suelo natural. Esta era la configuración más económica pues se ahorrraba la mitad del alambre, pero había muchas pérdidas por fugas de corriente, especialmente en climas húmedos o lluviosos. Varios años más tarde, el cobre comenzó a sustituir al hierro como conductor, debido a avances logrados en su fabricación como cable y a que conduce mejor la electricidad que el hierro. Hacia 1860, en Londres ya se utilizaban conjuntos aéreos de 30 a 100 conductores telegráficos aislados entre sí con goma o caucho. Por su parte, los cables subterráneos no tardaron mucho en aparecer, pues eran necesarios para descongestionar el interior de las ciudades. Los tendidos aéreos siguieron utilizándose en las afueras de las grandes concentraciones urbanas, para interconectarlas.

Al iniciarse las operaciones telefónicas, se encontró que las líneas troncales (ciudad a ciudad) de un solo conductor con retorno por tierra producían niveles intolerables de diafonía o interferencia entre la conversación por un conductor y la de otro. Para resolver este problema, se decidió utilizar líneas de dos conductores, mismas que servían para transmitir simultáneamente



**Fig. 1-8** Circuito inventado a fines del siglo XIX para aprovechar simultáneamente una línea bifilar como una línea telefónica bifilar y dos líneas telegráficas de un solo hilo con retorno por tierra.

señales telefónicas y telegráficas (éstas aun con retorno por tierra y sin causar interferencia con las primeras, Fig. 1-8).

Ríos, canales y mares fueron los siguientes medios en los que se tuvo la necesidad de tender cables telegráficos, obviamente submarinos. Los primeros cables de este tipo cruzaban ya el Canal de la Mancha, el Mar del Norte y el Mar Mediterráneo en los años 50 del siglo XIX. Sólo unos años más tarde, hacia 1866, el primer cable transatlántico unía a Irlanda con Canadá. De allí en adelante, el tendido de cables submarinos continuó a ritmo acelerado, siendo Gran Bretaña, Francia y los Estados Unidos los principales impulsores de estos proyectos. Hacia 1940 ya había 20 cables transatlánticos, además de varios otros en los demás océanos, pero todos eran exclusivamente telegráficos. Por dificultades técnicas de amplificación y baja confiabilidad, no era posible transmitir telefonía, a pesar de que el teléfono ya había sido inventado y comenzado a usarse en tierra desde hacía medio siglo atrás. La telefonía transatlántica comercial de aquel tiempo sólo se brindaba por medio de sistemas de radio de onda corta (enlaces ionosféricos), a partir de 1926, pero el servicio era poco confiable y dependía mucho de las condiciones atmosféricas.

Los primeros cables telefónicos transatlánticos se tendieron a partir de 1956, un año antes de que se iniciase la "carrera espacial" con el lanzamiento del satélite *Sputnik 1* (1957), época en que al fin se contó con amplificadores de tubos al vacío cuya vida estimada era de unos 20 años, lo cual garantizaba ya un servicio razonablemente económico. La invención contemporánea del polietileno plástico contribuyó también a que estos cables telefónicos submarinos de larga distancia fuesen una realidad, debido a que dicho material posee propiedades excelentes de aislamiento. Cabe resaltar que estos primeros cables telefónicos ya fueron del tipo coaxial.

Los años 40 fueron testigos de la terrible 2ª Guerra Mundial, misma que aceleró las investigaciones en microondas y el desarrollo de innumerables dispositivos de comunicaciones de banda ancha, confiabilidad y largo alcance. El radar, los principios de la transmisión digital moderna, las guías de ondas y las comunicaciones inalámbricas por microondas terrestres son unos cuantos ejemplos de tales avances, logrados medio siglo después de que Marconi hiciese la primera demostración de una transmisión inalámbrica a bajas frecuencias (1895).

De manera que a mediados del presente siglo ya se empleaban a escala mundial las líneas bifilares (abiertas sobre postes, o subterráneas, aisladas entre sí con papel o con algún otro material dieléctrico), los cables coaxiales y las guías de ondas. Las computadoras acababan de nacer, pero eran gigantescas, sumamente costosas, su memoria era casi nula y además eran muy poco eficientes. Los circuitos integrados, el láser y las fibras ópticas aún no existían. Los cables compuestos por varias líneas bifilares evolucionaron, junto con las técnicas de multiplexaje, modulación y aislamiento, en lo que ahora se conoce como cables multipar, que consisten en muchos pares de conductores aislados entre sí con polietileno u otro material aislante e identificados por colores. Un solo cable telefónico multipar de uso en la actualidad puede tener decenas, cientos o miles de pares, dependiendo de la demanda de tráfico que tenga que satisfacer. Para facilitar la identificación de todos estos pares, se separan en conjuntos para formar "sectores", y varios de estos sectores a su vez son reunidos para formar "grupos".

Los rangos de las frecuencias en que se utilizan las líneas bifilares o pares de hilos y los cables coaxiales se muestran en la Fig. 1-9. El primer tipo de línea es el que posee menos ancho de banda y capacidad para transmitir

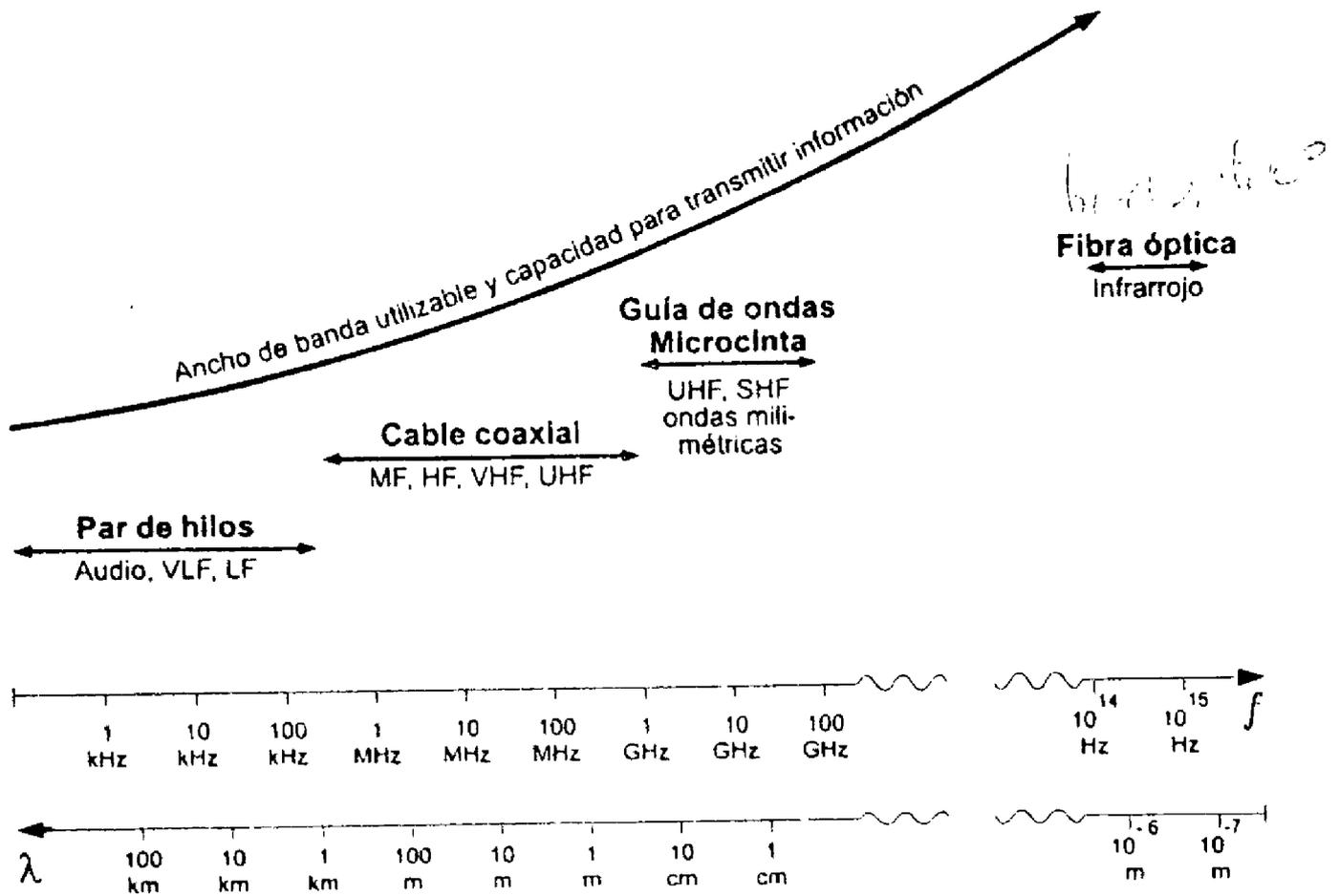
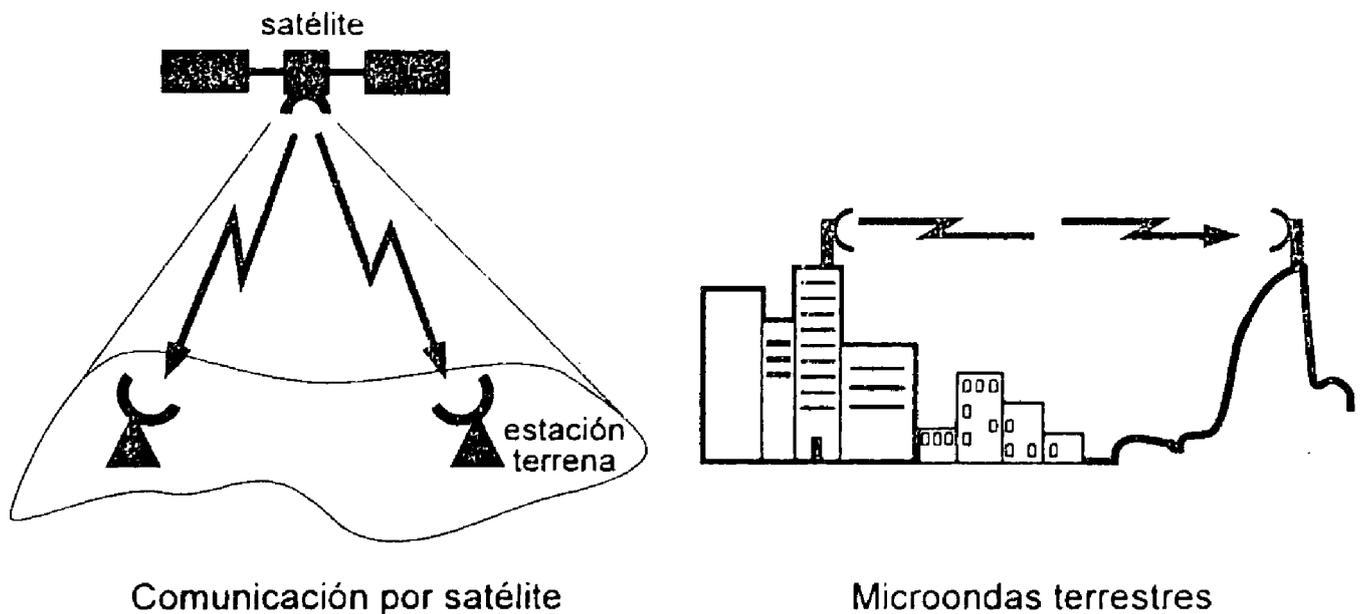


Fig. 1-9 Uso actual de los principales sistemas alámbricos, por rangos de frecuencias.\*

información; se emplea fundamentalmente para la telefonía local, la transmisión de datos a baja velocidad y el videófono residencial; también puede tener muchas otras aplicaciones como, por ejemplo, de antena receptora de FM en los equipos modulares de audio. Por su parte, los cables coaxiales permiten transmitir más información, a frecuencias mucho más elevadas; sirven para telefonía multicanal, distribución de televisión, conexión de equipos de cómputo e impresión, alimentación de antenas de VHF, y muchas otras aplicaciones.

- 
- \* VLF = Very Low Frequency (Frecuencias muy bajas)
  - LF = Low Frequency (Frecuencias bajas)
  - MF = Medium Frequency (Frecuencias Medias)
  - HF = High Frequency (Altas frecuencias)
  - VHF = Very High Frequency (Muy altas frecuencias)
  - UHF = Ultra High Frequency (Ultra altas frecuencias)
  - SHF = Super High Frequency (Súper altas frecuencias)

A partir de los años 60 se fortaleció el uso de los satélites de comunicaciones, apoyados en una extensa red de estaciones terrenas con platos parabólicos. Ambos segmentos (espacial y terrestre) empleaban, y siguen utilizando, tramos de guías de ondas como elementos de interconexión o bien para formar haces de radiación con una cobertura específica. Los sistemas convencionales de microondas terrestres también usan guías de ondas como parte de los equipos que los integran (Fig. 1-10). Asimismo, fue en los años 60 que se inició la fabricación de los *chips* o circuitos integrados “en gran escala”, misma que ha evolucionado hasta la fecha a un



**Fig. 1-10** Las guías de ondas (Figs. 1-3 f, g y h ) tienen mucha aplicación en los sistemas de comunicación por satélite y de microondas terrestres, así como en los radares.

grado fantástico de miniaturización y capacidad de procesamiento. Este logro, junto con los circuitos hechos en tabletas impresas y el desarrollo de varios dispositivos de estado sólido que trabajan en el rango de las microondas, hicieron necesario el uso de líneas de transmisión que funcionaran en base a conductores paralelos *planos*. De éstos (Figs. 1-3 b, c y d ), la triplaca es la más eficiente, pues tiene muy pocas pérdidas por radiación, pero también es la más difícil de hacer. Las líneas de microcinta

y sus diversas variantes son pequeñísimas y ligeras y se les puede fabricar empleando técnicas similares a las de los circuitos integrados; gracias a ellas, la tecnología de los dispositivos de microondas ha evolucionado considerablemente, y también son útiles, por ejemplo, para alimentar antenas planas ranuradas.

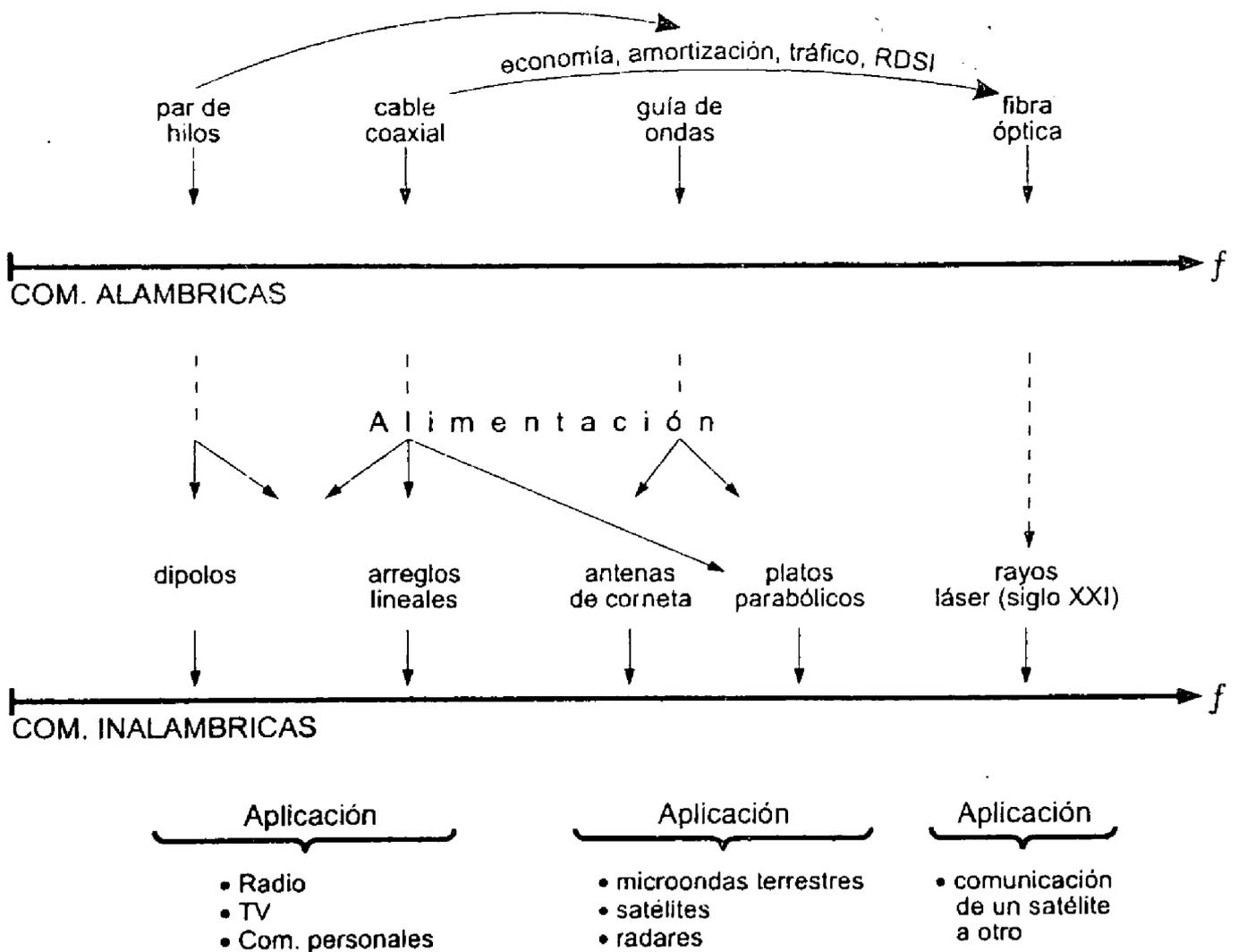
Con relación a los sistemas de microondas, ya sean terrestres o satelitales, en los que la transmisión y la recepción se efectúan a frecuencias en las que la longitud de onda es de unos cuantos milímetros o centímetros, es conveniente notar que el rango de frecuencias en el que se emplean ha sido subdividido en bandas designadas por letras (Tabla 1-1). En años recientes se decidió rebautizar a cada una de estas bandas en estricto orden alfabético (tercera columna de la tabla), pero por familiaridad aún se sigue utilizando operativa y comercialmente la nomenclatura vieja. Es entonces común decir que un satélite (incluyendo sus circuitos con microcinta o tramos de guías de ondas) funciona en la banda C, X o Ku, por ejemplo.

**Tabla 1-1** Designación de las bandas de frecuencias empleadas en microondas.

Frecuencia		Anterior (se usa todavía)	"Nueva"
1 - 2	GHz	L	D
2 - 3	GHz	S	E
3 - 4	GHz	S	F
4 - 6	GHz	C	G
6 - 8	GHz	C	H
8 - 10	GHz	X	I
10 - 12.4	GHz	X	J
12.4 - 18	GHz	Ku	J
18 - 20	GHz	K	J
20 - 26.5	GHz	K	K
26.5 - 40	GHz	Ka	K

En párrafos anteriores de este mismo capítulo se ha hecho énfasis en la igual importancia y complementaridad de los sistemas alámbricos e

inalámbricos. Los alámbricos son indudablemente útiles para muchas aplicaciones de comunicaciones punto a punto o de distribución de información, pero además, sin ellos, los inalámbricos sencillamente no podrían funcionar. Todas las antenas necesitan alguna forma de línea de transmisión que sirva de enlace entre ellas y los equipos transmisores o receptores. Esta doble función y aplicación se ilustra muy abreviadamente en la Fig. 1-11.



**Fig. 1-11** Breve ejemplificación del uso de las líneas como componentes de transmisión y de alimentación.

Las flechas de unión entre el par de hilos y el cable coaxial con la fibra óptica indican que, con el tiempo, muchos cables convencionales serán sustituidos por cables de fibra óptica, conforme se amorticen los costos de

inversión de los primeros, se abarate aún más el precio de las comunicaciones ópticas, y se extiendan el alcance y la aceptación de las redes digitales de servicios integrados. Al ritmo actual en que la tecnología y la demanda de servicios han ido creciendo, es muy posible que en el siglo XXI los mismos hogares estén conectados a su central digital local por fibra óptica, en lugar de la línea bifilar de cobre que aún se utiliza para tal fin y cuyo ancho de banda es muy reducido. De hecho, actualmente ya existen en varias ciudades de los países más avanzados redes residenciales de distribución de televisión por cable; sólo que éste es de fibra óptica, en lugar del coaxial que se usa tradicionalmente. Y desde luego, es bien conocido que durante los años 80 y la presente década, se han tendido y seguirán tendiéndose cientos de miles de kilómetros de cable óptico, tanto terrestre como submarino, para enlazar centrales telefónicas dentro de una misma ciudad, establecer líneas troncales de ciudad a ciudad, o unir a un continente con otro.

La gran revolución de las comunicaciones por fibra óptica se inició en los años 60 cuando, al fin, se lograron los primeros láseres prácticos. Un láser es un emisor de luz *coherente*, es decir que la energía radiada es altamente *monocromática* (una sola longitud de onda o color) dentro de un haz altamente *direccional*. Para poder transmitir información a lo largo de una delgadísima fibra óptica, primero es necesario “inyectársela” con un láser. También es posible usar un diodo emisor de luz o LED\*, pero éste es una fuente óptica incoherente y sus aplicaciones son diferentes, tal como se verá con más detalle en el último capítulo de este libro. Las frecuencias ópticas que se utilizan son del orden de  $5 \times 10^{14}$  o 500 THz (Fig. 1-9) y, en teoría, la capacidad de un láser para transmitir o inyectar información a una fibra es de 100,000 veces la capacidad de un sistema convencional de microondas\*\*. Es decir que, teóricamente, un láser puede transportar unos 10 millones de canales de televisión al mismo tiempo. Sin embargo, varios experimentos realizados en los años 60 demostraron que los fenómenos de lluvia, neblina y nieve, así como la presencia de polvo en la atmósfera, hacían su uso inalámbrico poco atractivo económicamente. En cambio, para comunicaciones espaciales, más allá de la atmósfera, sí pueden tener una

---

\* LED = Light Emitting Diode

\*\* En la práctica aún hay deficiencias importantes en los dispositivos terminales ópticos, que reducen drásticamente el ancho de banda utilizable y la capacidad real de cada fibra óptica.

aplicación más inmediata. Los primeros experimentos de enlaces de comunicaciones espaciales por rayos láser, aunque con una capacidad mucho más baja que la teórica, apenas están por realizarse a fines de esta década, por ejemplo, para transmitir información de un satélite geoestacionario a otro que esté en una órbita más baja; el primero puede ser un satélite de comunicaciones y el segundo uno de percepción remota\*.

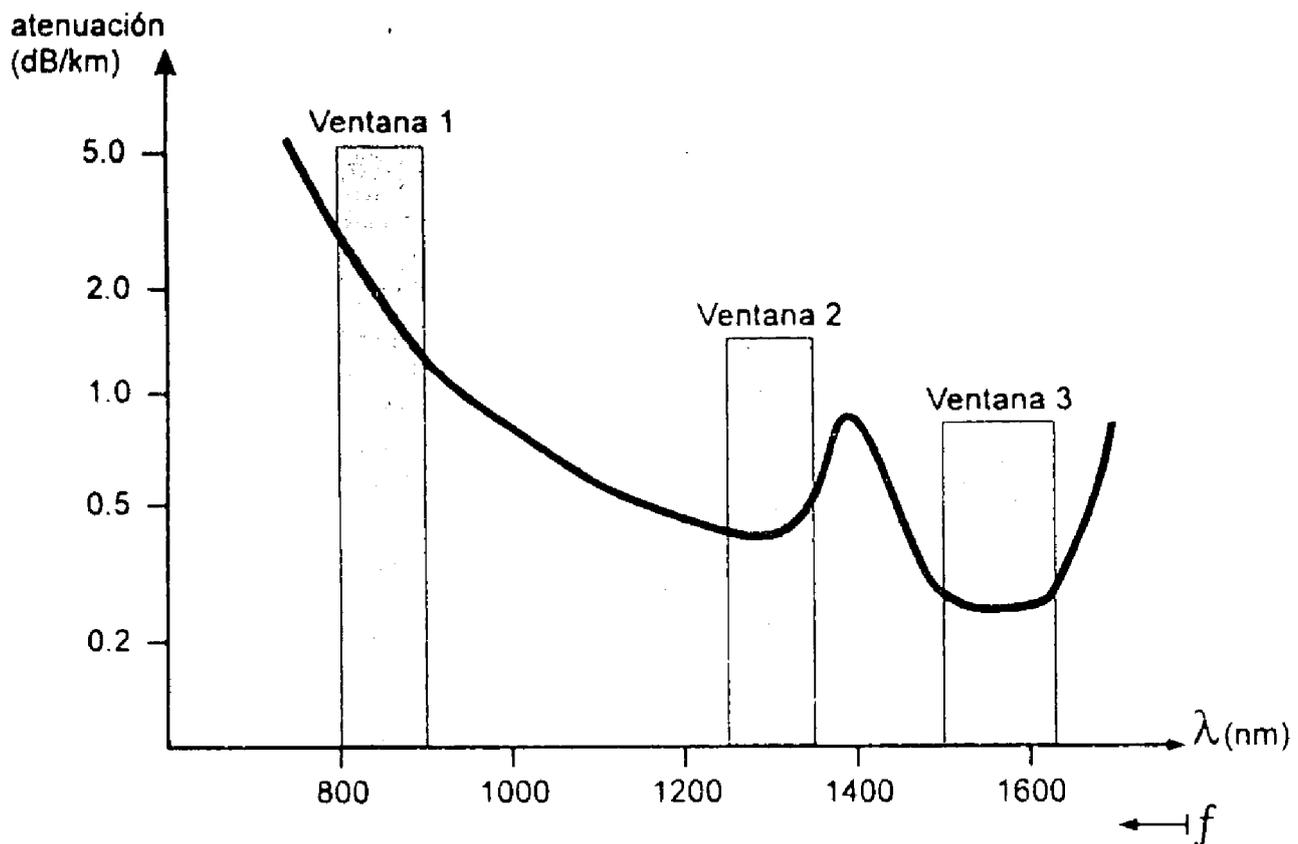
Paralelamente a los primeros y desalentadores experimentos atmosféricos hechos con rayos láser en los años 60, se buscó la forma de aprovechar las frecuencias ópticas en sistemas alámbricos. La posibilidad de fabricar y utilizar fibras ópticas de poca atenuación y bajo costo harían de este medio un canal para transmitir información de una manera más confiable y versátil que por la atmósfera. Pero inicialmente la atenuación producida a lo largo de una fibra era del orden de 1,000 dB/km, o sea que con sólo recorrer diez metros, la luz perdía el 90% de su potencia. Esto hacía su uso totalmente impráctico.

Fue en los años 70 cuando, al fin, se logró reducir significativamente la atenuación de las fibras ópticas, a valores del orden de 20 dB/km o menos. A la fecha, ya es posible inclusive fabricar fibras con atenuaciones de sólo 0.2 dB/km (en la tercera ventana), lo cual, junto con el perfeccionamiento de los diodos láser de semiconductores y los LEDs, así como los fotodetectores y otros componentes ópticos, han hecho que las redes locales y de larga distancia por fibra óptica proliferen en todo el mundo.

A diferencia de los sistemas que emplean otros tipos de líneas de transmisión, en el caso de las fibras no se acostumbra especificar la frecuencia de operación, sino la longitud de onda. Las regiones en las que la atenuación de la fibra alcanza valores mínimos se denominan *ventanas* (Fig. 1-12). La primera ventana útil corresponde a una longitud de onda central de aproximadamente 850 nanómetros (nm). Se utiliza en redes locales de cortas distancias, con fibras multimodo y emisores LED. La segunda ventana trabaja en los 1,300 nm y se emplea principalmente para enlaces largos, con fibras monomodo y

---

\* Nótese que a fines de los años 90 entrarán en operación varias constelaciones de satélites de órbita baja dedicados al servicio mundial de las comunicaciones personales móviles. En algunos casos, los satélites de la constelación se comunicarán entre sí, pero no en frecuencias ópticas sino a frecuencias muchísimo más bajas comparativamente, con su inherente reducción en ancho de banda. El uso práctico de los enlaces intersatelitales por rayos láser sucederá hasta bien avanzado el siglo XXI.

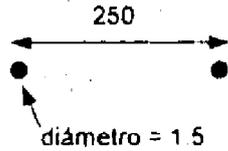
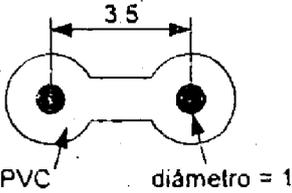
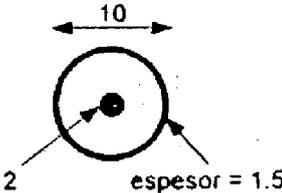
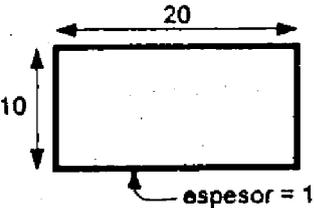
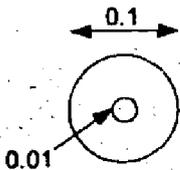


**Fig. 1-12** Curva aproximada de atenuación y ventanas de operación de las fibras ópticas. Algunas fibras comerciales tienen atenuaciones menores.

excitadores láser, aunque también hay enlaces cortos con LEDs y fibras multimodo a 1,300 nm (secciones 8.3 y 8.4). La tercera ventana funciona a 1,550 nm y permite reducir más la distancia entre los amplificadores intermedios (sección 8.5), especialmente con el uso de los nuevos amplificadores ópticos dopados con erbio.

Las fibras ópticas son las líneas de transmisión con mayor ancho de banda y capacidad para transmitir información (Fig. 1-9), y al igual que con la línea bifilar que puede ser reproducida paralelamente para formar cables multipar, las fibras pueden colocarse por grupos dentro de un mismo cable, aumentando así, aún más, la capacidad de tráfico y de distribución (véase la Fig. 7-4). También, al igual que las líneas bifilares de cobre, los cables de fibra óptica se pueden instalar en forma aérea, subterránea o submarina. Las grandes ventajas de las fibras ópticas sobre los sistemas convencionales de cobre son varias: pocas pérdidas, gran ancho de banda, tamaño reducido, poco peso, inmunidad a las interferencias radioeléctricas, aislamiento eléctrico, alta seguridad en sistemas bancarios, militares y de otros tipos, y además, la materia prima fundamental para producirlas (arena) es abundante.

**Tabla 1-2** Comparación individual de algunas características prácticas de las principales líneas de transmisión. Nótese la diferencia de escalas.

Tipo de línea	Dimensiones típicas en mm	Pérdidas	Ancho de banda (capacidad)	Miniaturización
Bifilar abierta sobre postes	 <p>250 diámetro = 1.5</p>	Bajas	Pequeño	Pobre
Bifilar terrestre con aislante, de uso exterior	 <p>35 PVC diámetro = 1</p>	Bajas	Pequeño	Pobre
Coaxial	 <p>10 2 espesor = 1.5</p>	Regular	Regular	Pobre
Guía de ondas	 <p>20 10 espesor = 1</p>	Bajas	Grande	Pobre
Microcinta	 <p>espesor = 0.1 2</p>	Altas	Grande	Excelente
Fibra óptica	 <p>0.1 0.01</p>	Muy bajas	Muy grande	Excelente

Se puede concluir que cada clase de línea de transmisión tiene su propia razón de ser en el tiempo, y además ofrece sus aplicaciones y sus ventajas técnicas o económicas muy particulares. Los capítulos siguientes serán dedicados para estudiar en detalle las características de transmisión en cada una de ellas; pero antes, para concluir esta breve sección introductoria, convendría resumir y comparar algunos de sus principales parámetros. Estos se presentan en forma concentrada y aproximada en la Tabla 1-2. Nótese que sólo se incluyen a manera de ejemplo algunas configuraciones típicas, pero que en la práctica hay muchísimas opciones más, dependiendo de la aplicación que se le quiera dar a la línea y de las frecuencias de operación.

Es muy arriesgado querer hacer comparaciones numéricas de ciertos parámetros, como la atenuación o el ancho de banda, ya que éstos dependen de la frecuencia de trabajo y de las dimensiones reales de cada línea en particular. Por ello, los datos presentados en la tabla sólo tienen como objetivo resaltar la enorme diferencia de operación de las líneas más populares y, por tanto, la importancia e inevitable necesidad de estudiar cada una de ellas debidamente.

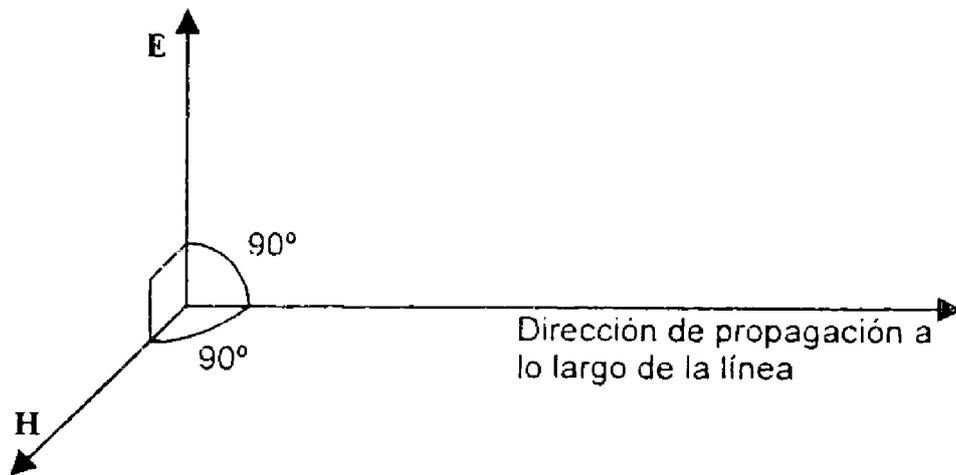
## 1.4 El modo TEM y el análisis de líneas por voltajes y corrientes

Las líneas que consisten de dos conductores (bifilar, coaxial, microcinta, placas paralelas), y varias otras estructuras como la triplaca, transmiten la información electromagnética fundamentalmente de una manera tal en que tanto el campo eléctrico como el campo magnético de la señal son transversales o perpendiculares a la dirección de propagación (Fig. 1-13). A esta forma en que la señal es transmitida se le llama modo de propagación *transversal electromagnético* o, abreviadamente, TEM\*.

La distribución de las líneas de campo eléctrico y magnético en un corte transversal de estas estructuras guía-ondas es diferente en cada caso, pero  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  siempre son perpendiculares a la dirección de propagación. Como se

---

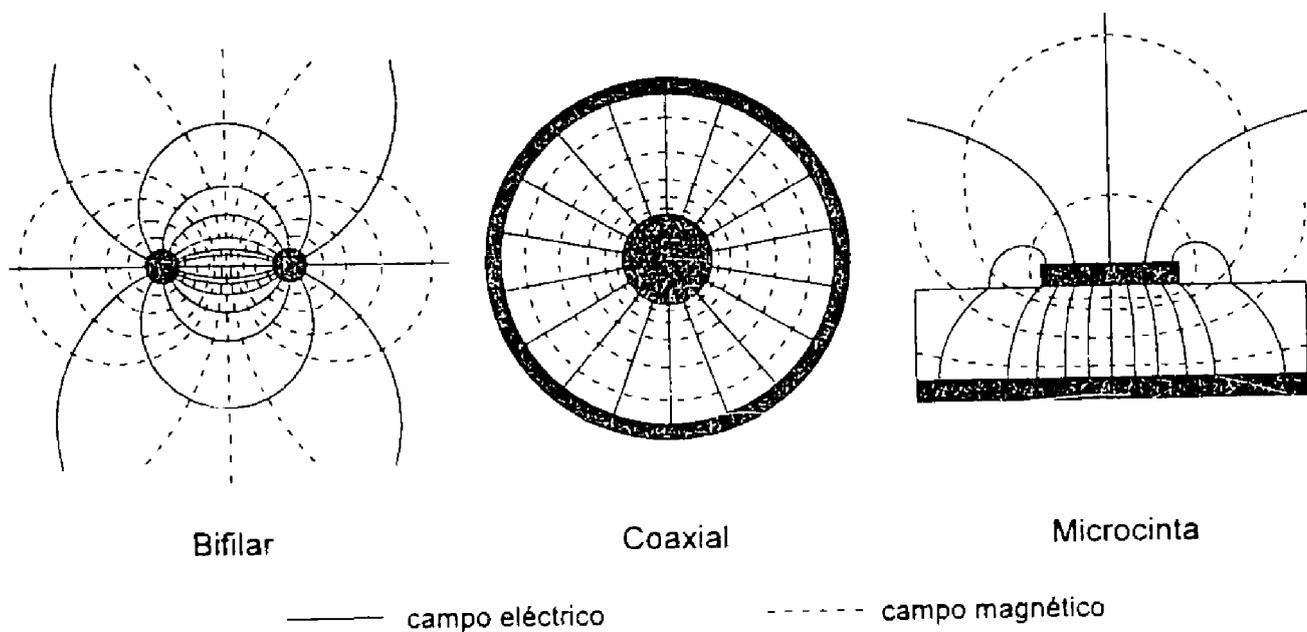
\* Estrictamente, la propagación puede ser TEM o cuasi-TEM, según el tipo de línea. Esto se aclarará en su momento, así como la existencia de modos superiores de propagación después de rebasar cierta frecuencia de trabajo.



**Fig. 1-13** El modo de propagación transversal electromagnético o TEM.

verá en capítulos siguientes, también es posible que estas líneas transmitan la información con otras configuraciones de líneas de campo o *modos superiores*, pero generalmente son utilizadas abajo de la frecuencia de corte del primer modo superior, de tal manera que sólo exista el modo TEM. Todos estos conceptos se estudiarán en detalle más adelante, pero es preciso introducirlos en este punto aunque sea brevemente. La Fig. 1-14 muestra la distribución de las líneas de campo en el corte transversal de una línea bifilar, un coaxial y una microcinta. En los dos primeros casos, los campos **E** y **H** siempre forman  $90^\circ$  entre sí y también son perpendiculares a la dirección de propagación que, de acuerdo con las ilustraciones, sería hacia el interior del papel o hacia afuera, según la resultante del producto cruz de **E** con **H** (vector de Poynting). Por lo que respecta a la microcinta, el modo de propagación es cuasi-TEM, es decir, casi igual al TEM, pero este último modo no se logra por completo ya que no es posible satisfacer las condiciones de frontera en la interfase entre la superficie superior del sustrato dieléctrico y el medio que le rodea (aire), a menos que las dos permitividades fuesen iguales. De cualquier forma, es posible obtener los parámetros de operación de la línea con bastante aproximación suponiendo que la distribución de los campos es TEM.

Al tener una distribución transversal de los campos eléctrico y magnético, resulta fácil calcular los parámetros circuitales de la línea o cable por unidad de longitud (inductancia  $L$ , capacitancia  $C$ , resistencia  $R$  y conductancia



**Fig. 1-14** Campos eléctricos y magnéticos del modo de propagación TEM. El campo es más intenso en las regiones donde las líneas de flujo se representan con menos separación entre sí.

$G^*$ ), y entonces es posible evadir las ecuaciones de Maxwell y obtener soluciones para la operación completa de la línea aplicando la teoría general de circuitos. Como se verá en el capítulo 2, este tipo de líneas debe satisfacer ecuaciones diferenciales sencillas de la forma siguiente:

$$\frac{dV}{dz} = - (R + j\omega L) I \quad (1-1)$$

$$\frac{dI}{dz} = - (G + j\omega C) V \quad (1-2)$$

en donde  $V$  es el fasor de la diferencia de voltaje entre los conductores e  $I$  es el fasor de la corriente en uno de ellos. Sin duda, los términos voltaje y corriente son conceptos mucho más familiares y de más fácil comprensión que los de campos electromagnéticos, pero estos últimos sí deben emplearse para analizar otros tipos de líneas, como se indica en la siguiente sección.

\* Como simple comentario, algunos se refieren a  $G$  como la *perditancia*.

## 1.5 El modo dominante, los modos superiores y el análisis por campos electromagnéticos

Las guías de ondas o conductores huecos (Figs. 1-3 f, g y h) no pueden transmitir energía electromagnética a frecuencias muy bajas\* y tampoco pueden guiarla con una forma o modo de propagación TEM. La transmisión se inicia a partir de cierta frecuencia, cuyo valor depende de la geometría y las dimensiones de la guía. A esta frecuencia mínima a partir de la cual es posible que la información viaje o se propague se le denomina *frecuencia de corte*.

La distribución transversal de las líneas de campo eléctrico y magnético debe satisfacer las condiciones de frontera en todas las paredes metálicas internas de la guía. En teoría, hay un número infinito de posibles distribuciones de líneas de campo o modos de propagación y cada modo tiene su propia frecuencia de corte a partir de la cual existe. Es decir, conforme la frecuencia va aumentando, primero aparece el primer modo, llamado modo dominante; después aparece el segundo modo a partir de su propia frecuencia de corte y se propaga junto con el primero, que nunca desaparece; después aparece el tercer modo, que se propaga junto con el primero y el segundo; y así sucesivamente (Fig. 1-15).

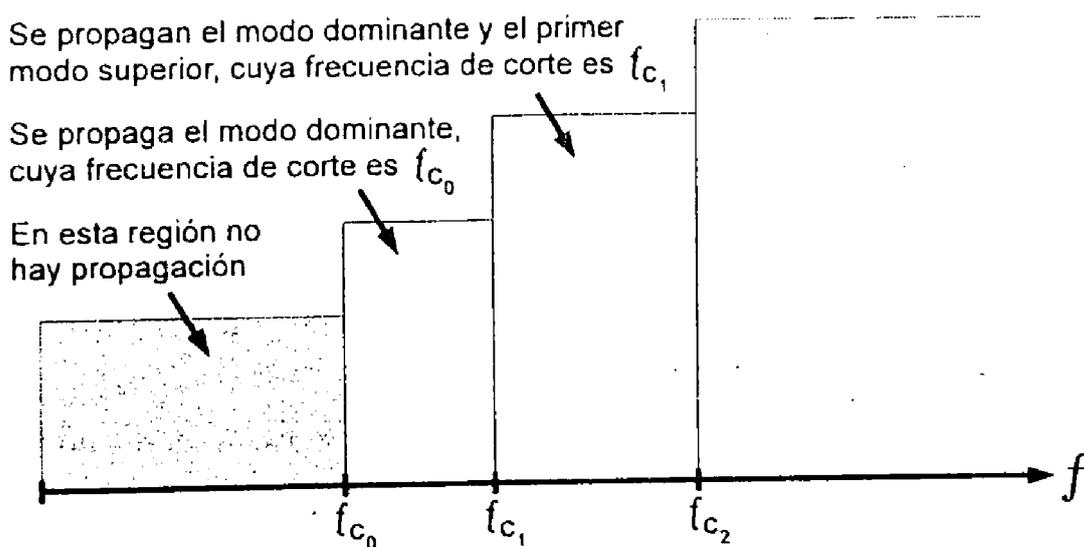
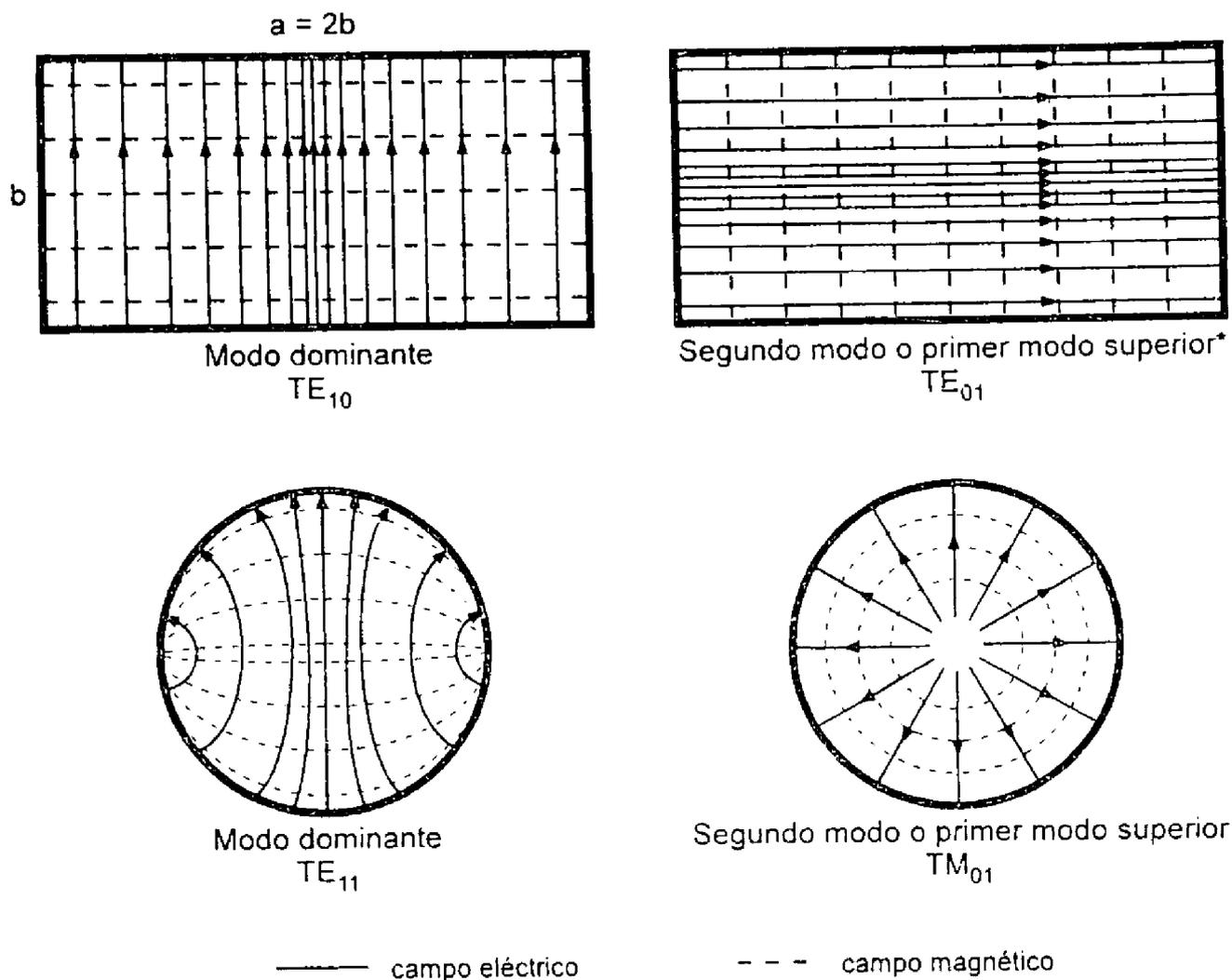


Fig. 1-15 Frecuencias de corte y regiones teóricas de propagación del modo dominante y de los modos superiores en una guía de ondas.

\* En realidad sí podrían, pero resultarían estructuras monstruosamente gigantescas e imprácticas.



**Fig. 1-16** Vista transversal de las líneas de campo o flujo eléctrico y magnético del modo dominante (o primer modo) y del segundo modo de propagación (o primer modo superior) en guías rectangulares (dimensiones 2:1) y circulares.

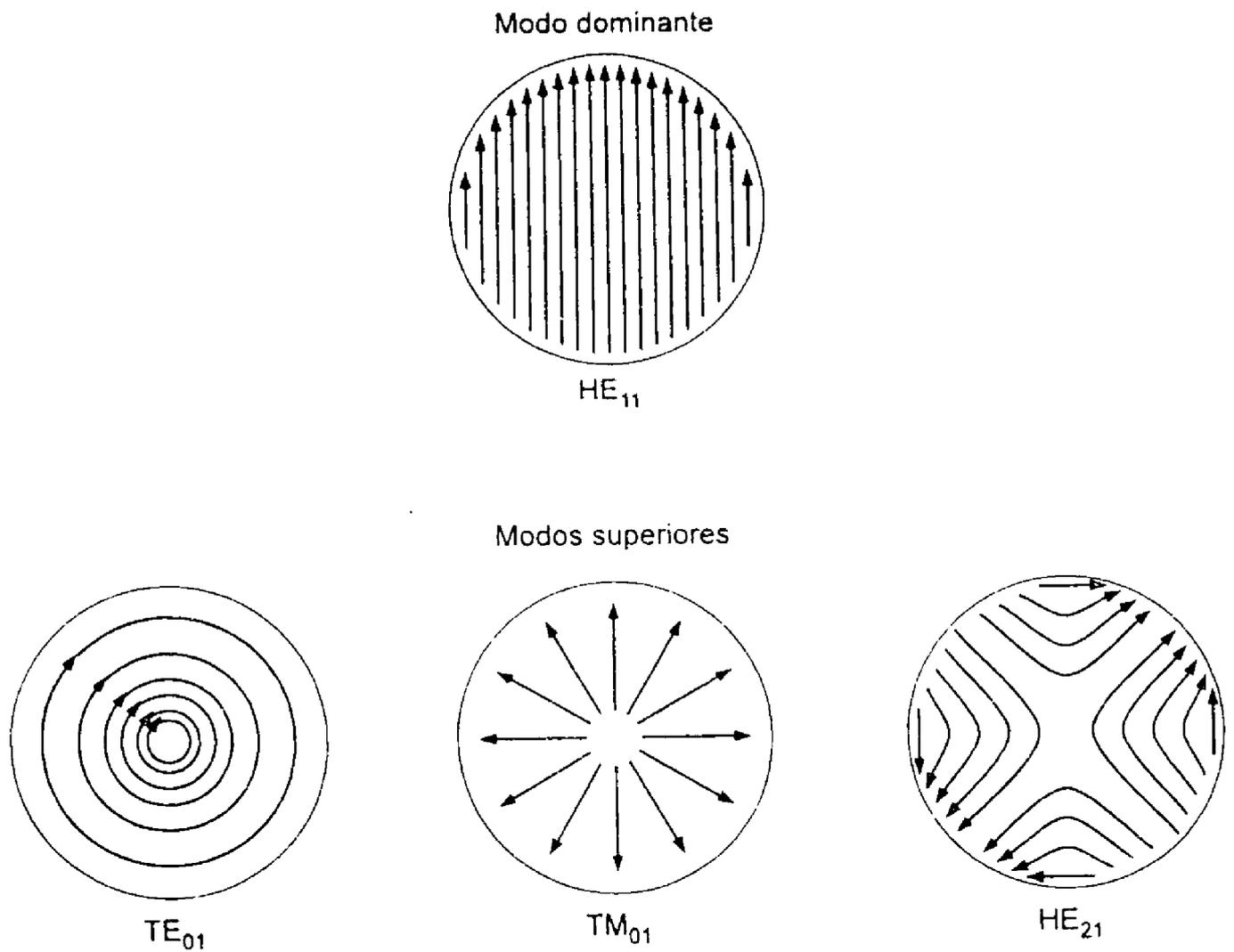
Los demás tipos de líneas, como la bifilar y el coaxial, también pueden tener modos superiores de propagación, pero como se utilizan a frecuencias más bajas que las guías de ondas y pueden transmitir, en teoría, desde frecuencia cero en el modo TEM (que en este caso viene siendo el modo dominante), los modos de orden superior no tienen la oportunidad de aparecer, pues se trabaja por debajo de sus frecuencias de corte correspondientes.

\* El modo  $TE_{20}$  también tiene la misma frecuencia de corte que el  $TE_{01}$ , para una guía con  $a = 2b$ , pero su distribución de campos es diferente.

Los modos de propagación en las guías de ondas son de dos tipos: TE o transversal eléctrico y TM o transversal magnético. El análisis matemático correspondiente a ellos se cubrirá debidamente en el capítulo 4. “Transversal eléctrico” significa que sólo el campo eléctrico es perpendicular a la dirección axial a lo largo de la guía, mientras que el campo magnético no lo es; es decir, hay una componente de campo magnético en la dirección axial a lo largo de la guía. Un razonamiento similar indica que un modo TM tiene una parte de su campo eléctrico en la dirección axial y todo su campo magnético es transversal. En la Fig. 1-16 se ilustran cuatro casos dentro del número infinito de posibles modos de propagación en guías rectangulares y circulares. Nótese, por ejemplo, que para el modo dominante en la guía rectangular, el campo eléctrico es más intenso en el centro y su magnitud va disminuyendo hacia la derecha y la izquierda (indicado por la mayor separación entre las líneas de flujo). Para la misma guía, en el primer modo superior, las líneas de campo eléctrico son horizontales y la intensidad disminuye hacia arriba y hacia abajo. Por lo que se refiere a la guía circular de la misma figura, es evidente que la distribución de las líneas del campo eléctrico es de polarización cuasi-vertical en el centro y que su curvatura se incrementa en los extremos para poder cumplir con la condición de frontera de que no hay componente tangencial de  $\mathbf{E}$  en la pared conductora, sino solamente componente normal. El primer modo superior de la guía circular tiene una distribución radial de campo eléctrico y contornos circulares concéntricos de líneas de campo magnético, muy parecida a la distribución correspondiente al cable coaxial en su modo dominante TEM (Fig. 1-14).

En el caso de las fibras ópticas ocurre algo similar, pero las condiciones de frontera que deben ser satisfechas son diferentes a las de las guías metálicas. La nomenclatura que se emplea para designar a los modos de propagación es un poco más compleja, pues se tienen los modos TE, TM, HE, EH y LP. Los últimos, denominados modos *linealmente polarizados*, en realidad son combinaciones de los otros tipos de modos. El análisis matemático correspondiente a este interesante tema y de gran novedad práctica se verá en el capítulo 7.

A manera de ejemplo, en la Fig. 1-17 se muestran las distribuciones de campo eléctrico del modo dominante (híbrido  $HE_{11}$ ) y de los tres modos superiores siguientes ( $TE_{01}$ ,  $TM_{01}$  y  $HE_{21}$ ) en una fibra óptica de salto de índice o índice escalonado.



**Fig. 1-17** Vista transversal de las líneas de campo eléctrico del modo dominante y de los tres modos superiores siguientes en una fibra óptica de salto de índice.

Todas las soluciones posibles de propagación en las guías de ondas y las fibras ópticas se pueden encontrar resolviendo las cuatro ecuaciones de Maxwell y satisfaciendo adecuadamente las condiciones de frontera en cada caso analizado, de acuerdo con su geometría y los materiales de que esté constituido. Dichas ecuaciones de campo son:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1-4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1-5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1-6)$$

en donde  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  = vector de intensidad de campo eléctrico (V/m)  
 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  = vector de intensidad de campo magnético (A/m)  
 $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  = vector de desplazamiento eléctrico (C/m<sup>2</sup>)  
 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  = vector de densidad de flujo magnético (W/m<sup>2</sup> ó T)  
 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  = vector de densidad de corriente (A/m<sup>2</sup>)  
 $\rho(\mathbf{r}, t)$  = densidad volumétrica de carga (C/m<sup>3</sup>)  
 $\mathbf{r}$  = vector de posición (m)  
 $t$  = tiempo (seg)

De las ecuaciones (1-4) y (1-6) se deriva la ecuación de continuidad o de conservación de carga:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1-7)$$

Además,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  están relacionados, respectivamente, con  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  por los parámetros constitutivos que caracterizan la naturaleza electromagnética del material del que está hecho el medio de propagación. Estas relaciones constitutivas, para un medio "lineal isotrópico homogéneo", es decir, un medio ordinario o simple como el aire u otros dieléctricos comunes, son:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1-8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1-9)$$

en donde  $\epsilon$  es la permitividad o constante dieléctrica del material, en faradios por metro (F/m), y  $\mu$  es su permeabilidad, en henrios por metro (H/m). Si el medio es conductor, también debe cumplirse la siguiente relación:

V/m = volts / metro

A/m = amperes / metro

C/m<sup>2</sup> = coulombs / metro cuadrado

W/m<sup>2</sup> = webers / metro cuadrado

T = tesla

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1-10)$$

en donde  $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t)$  = vector de densidad de corriente de conducción ( $\text{A}/\text{m}^2$ )  
 $\sigma$  = conductividad del medio en siemens por metro ( $\text{S}/\text{m}$ ).

James Maxwell se basó en los trabajos de varios excelsos científicos anteriores a su generación, de ahí que a la ec. (1-3) también se le refiere como “ley de Faraday”, a la ec. (1-4) como “ley generalizada de Ampere”, y a la ec. (1-5) como “ley de Gauss”. El mérito personal de Maxwell radica en haber integrado y relacionado todos esos resultados matemáticamente, prediciendo además la posibilidad de la propagación de las ondas electromagnéticas, es decir, la *transmisión de información*. Dicha predicción fue comprobada en la práctica años más tarde por el físico alemán Enrique Hertz, en cuyo honor lleva su apellido la unidad usada para las frecuencias radioeléctricas.

Como ya se indicó con anterioridad, todas estas ecuaciones son la base para analizar matemáticamente los modos de propagación y otros parámetros igualmente importantes de operación de las guías de ondas y las fibras ópticas. En muchos casos, conocidos estos parámetros, es posible obtener circuitos equivalentes de dichas líneas y aplicar criterios de análisis similares a los de las líneas de transmisión convencionales, e inclusive métodos gráficos como la carta de Smith.

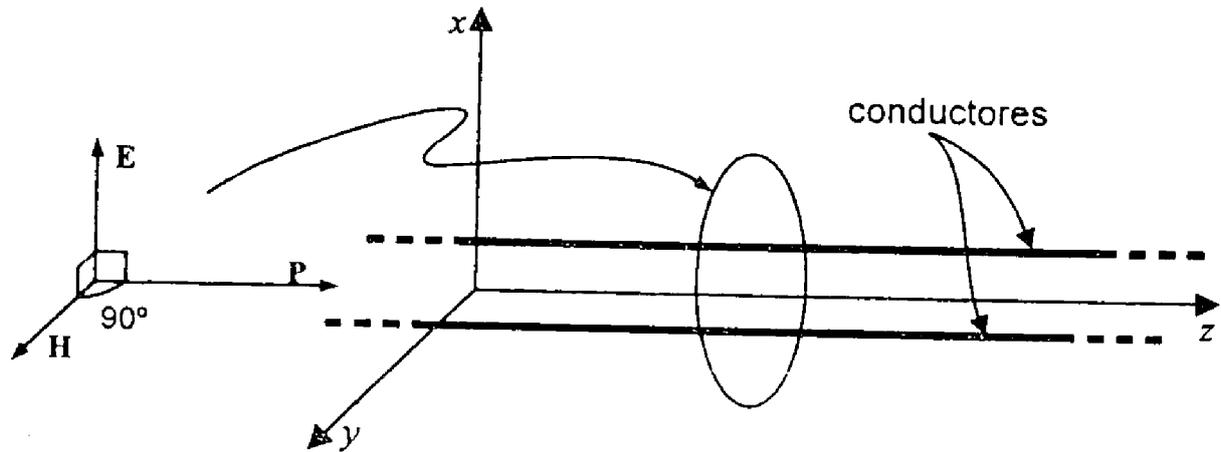
# Teoría de las líneas de dos conductores

---

## 2.1 Conceptos generales y parámetros de una línea

Las líneas que transmiten información en el modo de propagación TEM, como la bifilar y el coaxial, o esencialmente TEM, como la microcinta, pueden ser analizadas ya sea resolviendo directamente las ecuaciones de Maxwell, o bien, usando la teoría general de circuitos.

En el primer caso, si se resuelven las ecuaciones de Maxwell, la forma de las soluciones obtenidas es muy similar a la de la propagación de ondas planas uniformes en el espacio libre, cuya distribución también es TEM; es decir que las ondas electromagnéticas son transversales, porque tanto los campos  $\mathbf{E}$  como  $\mathbf{H}$  son mutuamente perpendiculares a la dirección axial de propagación. Si se consideran a la línea y al flujo de potencia a lo largo del eje  $z$  (Fig. 2-1), las ecuaciones se resuelven obligando que  $E_z = H_z = 0$ , para que los campos resultantes sean completamente transversales entre los conductores. Dicho de otra forma, el campo eléctrico total está dado por  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y$ , donde  $\mathbf{a}_x$  y  $\mathbf{a}_y$  son vectores unitarios en las direcciones  $x$  y  $y$ ; además, este campo debe ser normal o perpendicular a las superficies conductoras. Este análisis, aunque aproximado, es lo suficientemente válido en la práctica. Es aproximado porque se considera a los conductores como si fuesen perfectos y a los campos como si viajasen solamente entre y



**Fig. 2-1** Propagación del modo TEM a lo largo de una línea bifilar. Según la región considerada entre o alrededor de los conductores, el campo  $\mathbf{E}$  puede tener las componentes  $E_x$  y  $E_y$ , pero siempre  $E_z = 0$ . Lo mismo aplica para el campo  $\mathbf{H}$ , de modo que la pareja de vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  puede rotar, manteniéndose la perpendicularidad entre ambos y resultando siempre el flujo de potencia  $\mathbf{P}$  en la dirección  $z$  (véase también la Fig. 1-13).

alrededor de los conductores; algo así como si la línea bifilar sólo fuese una guía o pastor indicando la dirección del desplazamiento de potencia.

Pero si se quisiera ser extremadamente riguroso, habría que calcular, según la frecuencia de operación, la profundidad de penetración de los campos dentro de los conductores. La distribución resultante de las ondas ya no sería estrictamente TEM, sino cuasi o esencialmente TEM, pues al haber corriente dentro de los conductores, sí existiría una pequeñísima componente de  $\mathbf{E}$  en la dirección  $z$ . Esta componente está dada por la ecuación (1-10), que se repite a continuación (Ley de Ohm):

$$J_z = \sigma E_z \quad (2-1)$$

donde  $\sigma$  es una conductividad muy grande y  $E_z$  es pequeño, dando como resultado una corriente importante. Como podrá intuirse, dicha corriente provoca pérdidas de potencia en la señal, que se disipa en forma de calor.

El segundo método de análisis, empleando la teoría general de circuitos, es más sencillo y conduce a los mismos resultados. Este método alternativo

se prefiere en ingeniería de comunicaciones porque se pueden definir y utilizar las variables de voltaje  $V$ , corriente  $I$  y potencia  $P$ , que definitivamente son más familiares que las variables de campo eléctrico, campo magnético y densidad de potencia.

Para emplear la teoría general de circuitos es preciso representar a la línea como una red de parámetros distribuidos. Tales parámetros o constantes son su inductancia  $L$ , capacitancia  $C$ , resistencia  $R$  y conductancia  $G$ , especificadas todas ellas por unidad de longitud. Considérese la línea de la Fig. 2-2, que consiste de dos conductores paralelos separados uniformemente. Tal diagrama puede representar igualmente a una línea bifilar, un cable coaxial o una microcinta. En el extremo izquierdo se tiene el generador o transmisor (por ejemplo, un amplificador, un teléfono o una computadora); en el derecho, la carga o equipo receptor (por ejemplo, una antena, una central telefónica o una impresora digital). Entre los dos conductores hay una diferencia de potencial  $V$  y en la superficie de cada uno de ellos (efecto pelicular o piel) fluye una corriente  $I$ .

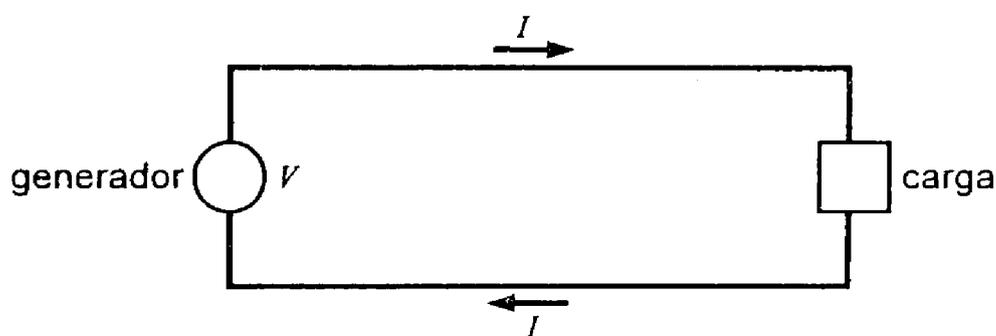


Fig. 2-2 Línea de transmisión fundamental.

Los cuatro parámetros de la línea ( $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$ ) se pueden calcular para cada caso particular si se conocen sus dimensiones y la frecuencia de operación, empleando los conceptos que se estudian en teoría electromagnética básica.

Por ejemplo, por definición, la inductancia  $L$  es igual al flujo magnético concatenado  $\psi$  producido por cada unidad de corriente  $I$ , y la capacitancia  $C$  es el cociente de la carga eléctrica  $Q$  en cada conductor por cada unidad

de diferencia de potencial o voltaje  $V$ . La capacitancia sólo depende de las dimensiones físicas y la geometría de la línea, mientras que la inductancia es función de la distribución de la corriente (a frecuencias bajas hay corriente en la superficie y dentro del conductor, y a frecuencias muy altas la distribución es solamente pelicular).

Por otra parte, si los conductores de la línea fuesen perfectos, no habría resistencia al paso de la corriente y tampoco pérdidas de potencia durante la transmisión\*. Asimismo, si el medio dieléctrico o aislante entre los conductores fuese perfecto, no habría conducción (fugas o arcos eléctricos) entre ellos. Sin embargo, aunque muy buenos, los conductores no son perfectos, y el material dieléctrico entre ambos tampoco lo es. Por ello, para que el modelo circuital de la línea quede completo, es preciso considerar una resistencia  $R$  en serie y una conductancia  $G$  en paralelo. Como se verá más adelante, en varios casos y según la frecuencia de trabajo,  $R$  y  $G$  son despreciables y es posible simplificar los cálculos de operación de la línea; pero por lo pronto, es necesario plantear el caso más general con sus cuatro parámetros.

El valor de la resistencia  $R$  de la línea depende de la resistividad (inverso de la conductividad) del material del que esté hecha, de su geometría, y de la distribución de su densidad de corriente (que es función de la frecuencia). En la Fig. 2-3 se muestra el rango de los valores de conductividad  $\sigma$  para los buenos conductores en comparación con la de los semiconductores y los materiales "aislantes", y en la Tabla 2-1 se proporcionan los valores de  $\sigma$  de los principales conductores. La distribución de la corriente es función de la profundidad de penetración  $\ell$ , a la frecuencia de operación, que está dada por la relación siguiente:

$$\ell = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2-2)$$

Es más común utilizar la letra  $\delta$  para designar a la profundidad de penetración, pero para evitar confusión con la tangente de pérdidas asociada con los dieléctricos ( $\tan \delta$ ) que se verá a continuación, en este texto dicha profundidad de penetración se representará por la letra  $\ell$ .

---

\* De ahí el creciente interés, entre otras posibles aplicaciones, en la nueva tecnología de los superconductores.

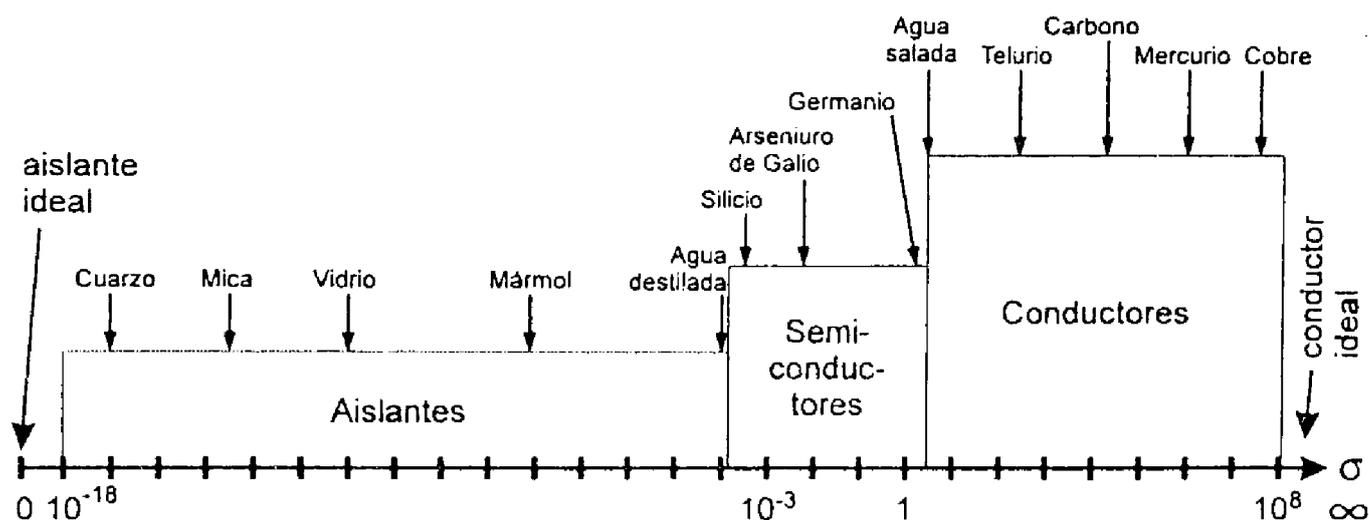


Fig. 2-3 Rango de los valores de conductividad  $\sigma$  (siemens/metro) de los materiales aislantes, semiconductores y conductores.

Tabla 2-1 Conductividad  $\sigma$  de algunos de los principales conductores.

Conductor	$\sigma$ (S/m)*
Fierro (hierro)	$1.03 \times 10^7$
Níquel	$1.45 \times 10^7$
Latón	$1.50 \times 10^7$
Zinc	$1.67 \times 10^7$
Tungsteno	$1.82 \times 10^7$
Aluminio	$3.82 \times 10^7$
Oro	$4.10 \times 10^7$
Cobre	$5.80 \times 10^7$
Plata	$6.17 \times 10^7$

\* También es común emplear las unidades  $\Omega/m$  (mhos por metro) que son equivalentes a S/m. El valor recíproco de la conductividad se denomina *resistividad* y sus unidades son  $\Omega/m$ .

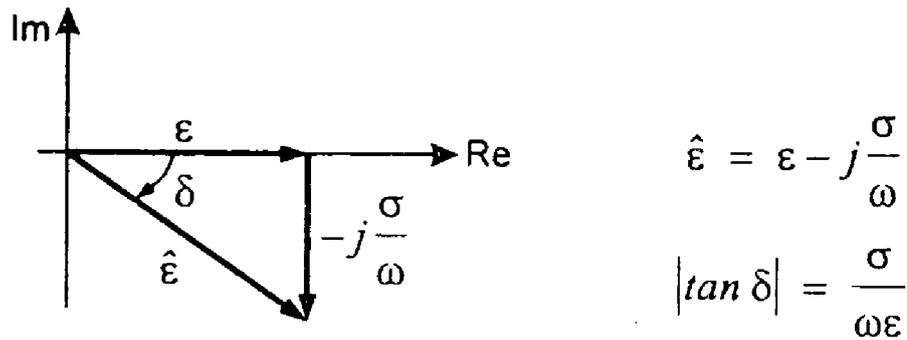
Por lo que se refiere a la conductancia  $G$  entre los dos conductores, también es función de la frecuencia y de las propiedades del material aislante, ya que éste posee cierta conductividad que crece con la frecuencia de las corrientes alternas y produce pérdidas elevadas denominadas como *histéresis del dieléctrico*. Este fenómeno de histéresis es despreciable a bajas frecuencias, pero a frecuencias altas se convierte en la causa principal de pérdidas en el dieléctrico. Es una característica de todos los materiales aislantes sólidos y líquidos, pero hay algunos como la mica, el cuarzo y varios compuestos sintéticos polimerizados que tienen una histéresis muy baja, por lo cual se utilizan como aislantes en microondas. Por otra parte, dicha propiedad de histéresis se aprovecha industrialmente en diversas aplicaciones, como por ejemplo en los hornos de microondas, ya que cuando los recipientes y los alimentos son sujetos a campos alternos de alta frecuencia (2.45 GHz), su conductividad alterna  $\sigma$  (que es mayor que la  $\sigma$  estática) aumenta muchísimo y consumen mucha energía, que se transforma en calor.

Cuando se desea analizar un problema de este tipo usando las ecuaciones de Maxwell, los efectos del fenómeno de histéresis del dieléctrico son considerados definiendo una permitividad compleja, ya que, de acuerdo con una de dichas relaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \underbrace{\sigma \mathbf{E}}_{\substack{\text{densidad de} \\ \text{corriente de} \\ \text{conducción}}} + \underbrace{j\omega\epsilon \mathbf{E}}_{\substack{\text{densidad de} \\ \text{corriente de} \\ \text{desplazamiento}}} \\ &= j\omega \underbrace{\left( \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right)}_{\substack{\text{permitividad} \\ \text{compleja}}} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2-3)$$

Dicha permitividad compleja,  $\hat{\epsilon}$ , se puede representar en el plano complejo como se indica en la Fig. 2-4. Nótese que la parte real,  $\epsilon$ , es igual a  $\epsilon_r \epsilon_0$ , donde  $\epsilon_r$  no tiene unidades y  $\epsilon_0 \equiv 8.8542 \times 10^{-12}$  F/m.

Para el modelo circuital de la línea, es posible consultar datos como los de la Tabla 2-2, proporcionados por los fabricantes, en donde se especifica la *tangente de pérdidas* (Fig. 2-4), relacionada con la permitividad real y la conductividad del dieléctrico por la ecuación:



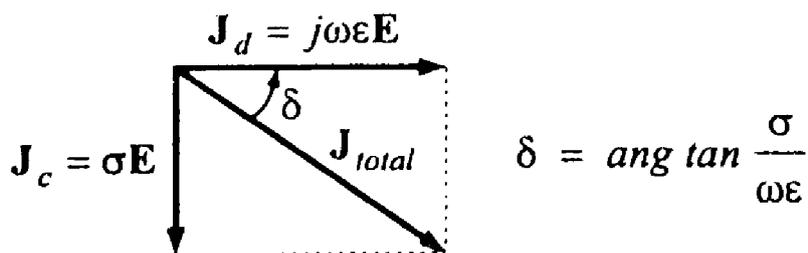
**Fig. 2-4** Representación de la permitividad compleja de un material y definición del ángulo de disipación  $\delta$ . La tangente de este ángulo se denomina *tangente de pérdidas* o factor de disipación. Todas éstas son cantidades escalares.

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (2-4)$$

de donde se puede despejar  $\sigma$  y estimar su valor aproximado para la frecuencia de operación en cuestión, ya que  $\omega = 2\pi f$ .

La tangente de pérdidas también se puede interpretar como se indica a continuación. De la ec. (2-3) se observa que la razón de la densidad de corriente de conducción  $\mathbf{J}_c$  y la densidad de corriente de desplazamiento  $\mathbf{J}_d$  es

$$\frac{\mathbf{J}_c}{\mathbf{J}_d} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}$$



**Fig. 2-5** Relación de fases entre las densidades de corriente de la ec. (2-3).  $\mathbf{J}_c$  y  $\mathbf{J}_d$  son vectores paralelos, pero hay un desfase de  $90^\circ$  entre ambos.

**Tabla 2-2** Valores comunes de la "constante" dieléctrica o permitividad relativa  $\epsilon_r$  y de la tangente de pérdidas de algunos materiales aislantes típicos.\*

Dieléctrico	$\epsilon_r$	$\tan \delta$
Aire	1.0005	—
Alcohol etílico	2.5	$100.00 \times 10^{-3}$
Oxido de aluminio	8.8	$0.60 \times 10^{-3}$
Baquelita	4.74	$22.00 \times 10^{-3}$
Dióxido de carbono	1.001	—
Vidrio	4 - 7	$2.00 \times 10^{-3}$
Hielo	4.2	$50.00 \times 10^{-3}$
Mica	5.4	$0.60 \times 10^{-3}$
Nylon	3.5	$20.00 \times 10^{-3}$
Papel	3	$8.00 \times 10^{-3}$
Plexiglas	3.45	$30.00 \times 10^{-3}$
Polietileno	2.26	$0.20 \times 10^{-3}$
Polipropileno	2.25	$0.30 \times 10^{-3}$
Poliestireno	2.56	$0.05 \times 10^{-3}$
Porcelana	6	$14.00 \times 10^{-3}$
Vidrio Pyrex	4	$0.60 \times 10^{-3}$
Cuarzo	3.8	$0.75 \times 10^{-3}$
Hule	2.5 - 3	$2.00 \times 10^{-3}$
Nieve	3.3	$500.00 \times 10^{-3}$
Tierra seca	2.8	$50.00 \times 10^{-3}$
Teflón	2.1	$0.30 \times 10^{-3}$
Madera seca	1.5 - 4	$10.00 \times 10^{-3}$

\* Nótese que estos valores son aproximados, pues además de que ambos dependen de la temperatura y de la frecuencia, principalmente  $\tan \delta$ , su composición química puede variar mucho según el producto, como por ejemplo en el caso del vidrio y el hule. Los valores listados quedan dentro del rango  $f < 10$  GHz. Cuando se requieran datos más precisos, se deben obtener del fabricante o consultar algún manual actualizado de fisico-química o de materiales para ingenieros electrónicos. El manual "Dielectric Materials and Applications", editado periódicamente por la M.I.T. Press del Instituto de Tecnología de Massachusetts, E.U., es una excelente referencia.

O sea que los dos vectores de densidad de corriente tienen la misma dirección, pero están  $90^\circ$  fuera de fase con respecto al tiempo. Esta relación de fases puede representarse gráficamente como se muestra en la Fig. 2-5. En ella se observa que  $\delta$  es el ángulo con el cual la densidad de corriente de desplazamiento adelanta a la densidad **total** de corriente, que es igual a la suma vectorial de  $\mathbf{J}_c$  y  $\mathbf{J}_d$ . Como era de esperarse, este ángulo  $\delta$  es el mismo resultado que el de la ec. (2-4).

En la Tabla 2-2 se aclara que los valores listados para  $\tan \delta$  son aproximados. Estos son útiles y suficientes para resolver una buena cantidad de problemas. Sin embargo, estrictamente y como ya se apuntó con anterioridad, la conductividad de los dieléctricos aumenta con la frecuencia, aunque no linealmente. Como ejemplo, en la Fig. 2-6 se muestran las curvas

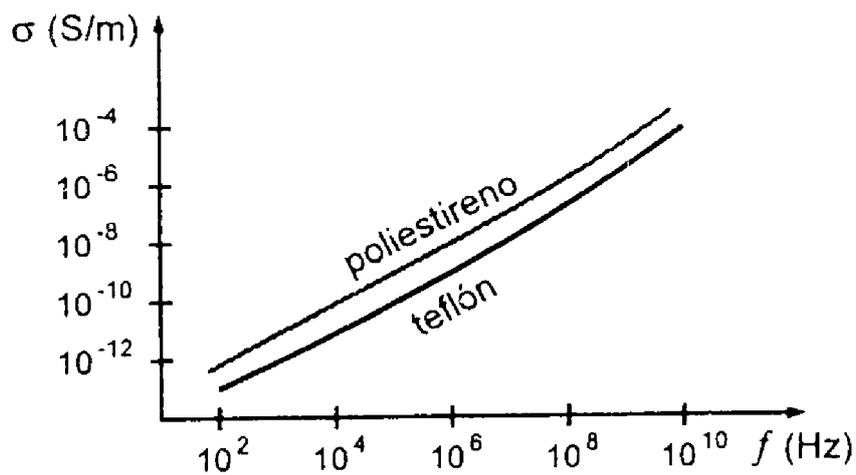


Fig. 2-6 Variación de la conductividad  $\sigma$  con la frecuencia, para el poliestireno y el teflón.

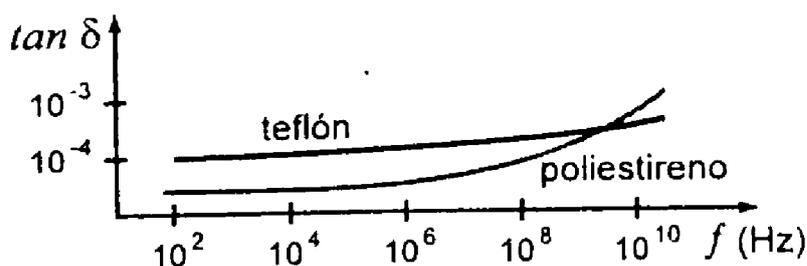


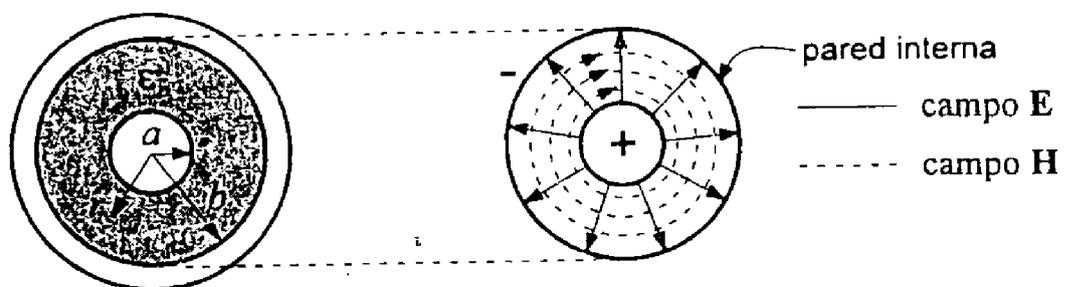
Fig. 2-7 Variación de la tangente de pérdidas  $\tan \delta$  con la frecuencia, para el poliestireno y el teflón.

aproximadas de  $\sigma$  contra  $f$  para el poliestireno y el teflón. Nótese que las escalas en los ejes son logarítmicas. Por otra parte, en la Fig. 2-7 se muestran las curvas de la tangente de pérdidas contra la frecuencia, también con escalas logarítmicas, de las cuales se observa, por comparación con la Fig. 2-6, que la tangente de pérdidas varía menos con la frecuencia que la conductividad, lo cual también puede deducirse, con un poco de trabajo, por inspección de la ec. (2-4).

De todo lo anterior puede intuirse que el proceso matemático para deducir las fórmulas de  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  para la geometría de cada línea y el rango de frecuencias de operación es algo laborioso; por ello, a continuación sólo se presenta el caso del cable coaxial, a manera de recordatorio de los conceptos básicos que el lector debe haber estudiado en Teoría Electromagnética. Posteriormente, las expresiones para bajas y altas frecuencias correspondientes a los tipos de líneas más comunes se presentan concentradas en cuadros, como referencia, y se realizan ejercicios numéricos con líneas prácticas utilizando dichas fórmulas.

**Ejercicio 2-1** Deduzca las expresiones matemáticas para calcular la capacitancia y la inductancia por unidad de longitud de un cable coaxial a altas frecuencias. Considere al radio del conductor interno igual a  $a$  y al radio interno del conductor externo igual a  $b$ .

*Solución*



Primero se calculará la capacitancia por unidad de longitud. Sea  $V$  la diferencia de potencial entre los dos conductores y  $+Q$  y  $-Q$  las cargas respectivas en ellos. A una distancia radial  $r$  dentro del dieléctrico la densidad de flujo eléctrico  $\mathbf{D}$  tiene una magnitud igual a

$$D = \frac{Q}{2\pi r}$$

y dado que  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , la diferencia de potencial  $V$  se obtiene realizando la siguiente integral

$$= \int_a^b \frac{Q}{2\pi \epsilon r} dr$$

resultando que

$$= \frac{Q(\ln b - \ln a)}{2\pi \epsilon} = \frac{Q \ln(b/a)}{2\pi \epsilon}$$

Por definición, la capacitancia  $C$  es igual a la carga entre la diferencia de potencial, así que

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(b/a)} \quad \text{F/m}$$

Para calcular la inductancia es necesario obtener el flujo magnético total concatenado  $\psi$  y dividirlo por la corriente  $I$  que lo produce. La densidad de flujo magnético  $\mathbf{B}$  tiene la misma dirección que  $\mathbf{H}$  en la figura, y ambos campos están relacionados por la expresión  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . La corriente  $I$  del conductor interno fluye hacia el interior del papel. Entonces, la magnitud de  $\mathbf{B}$  a una distancia radial  $r$  es igual a

$$B = \mu H = \mu \frac{I}{2\pi r}$$

Si se considera un área  $A$  transversal al papel, con base  $dr$  y altura (longitud) igual a 1, el flujo que la concatena es igual a

$$\phi = (B)(A) = (B)(1)(dr) = \mu \frac{I}{2\pi r} dr$$

de modo que el flujo total concatenado o eslabonado por unidad de longitud será igual a la integral de la expresión anterior para toda  $r$  :

$$\Psi = \int_a^b \mu \frac{I}{2\pi r} dr$$

La corriente  $I$  puede salir del integrando, y al dividir  $\Psi$  entre ella, se tiene que la inductancia  $L$  es igual a

$$L = \frac{\Psi}{I} = \int_a^b \frac{\mu}{2\pi r} dr = \frac{\mu}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

Finalmente,

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \quad \text{H/m}$$

**Concentración de fórmulas para calcular los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  por unidad de longitud de líneas bifilares, cables coaxiales y placas paralelas.**

Cuadro 2-1

### Línea Bifilar

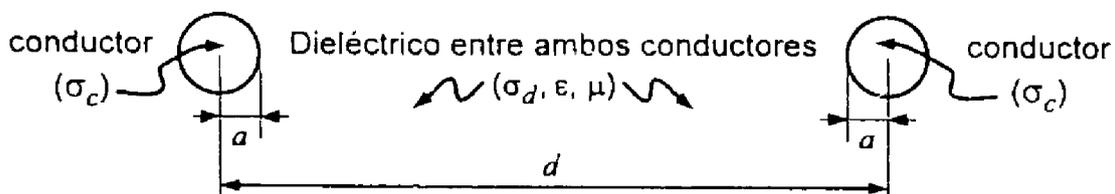


Fig. 2-8 Geometría de una línea bifilar y parámetros de sus materiales.

### Bajas frecuencias

$$L = \frac{\mu}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \cosh^{-1}(d/2a) \right] \quad R = \frac{2}{\sigma_c \pi a^2}$$

$$C = \frac{\pi \epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)} \approx \frac{\pi \epsilon'}{\ln(d/a)} \quad G = \frac{\pi \sigma_d}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

Altas frecuencias

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}(d/2a) \approx \frac{\mu}{\pi} \ln(d/a), \quad (a \ll d)^*$$

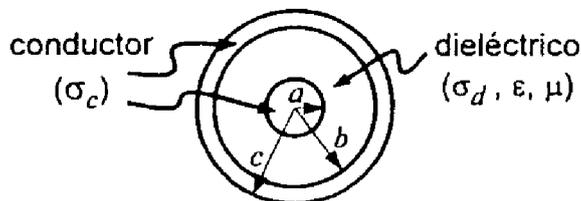
$$C = \frac{\pi \epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)} \approx \frac{\pi \epsilon'}{\ln(d/a)}, \quad (a \ll d)$$

$$R = \frac{1}{\pi a \ell \sigma_c} \quad G = \frac{\pi \sigma_d}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

\* $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ . Si  $a \ll d$ , aproximadamente  $d/a \geq 10$ , el resultado de la operación  $\cosh^{-1}(d/2a)$  se puede aproximar por  $\ln(d/a)$ .

**Cuadro 2-2**

**Cable Coaxial**



**Fig. 2-9** Geometría de un cable coaxial y parámetros de sus materiales.

Bajas frecuencias

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left\{ \ln(b/a) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(c^2 - b^2)} \left[ b^2 - 3c^2 + \frac{4c^4}{(c^2 - b^2)} \ln(c/b) \right] \right\}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad R = \frac{1}{\sigma_c\pi} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2 - b^2} \right) \quad G = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)}$$

Altas frecuencias

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$$

$$R = \frac{1}{2\pi\ell\sigma_c} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad G = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)}$$

Cuadro 2-3

### Línea de placas paralelas (dos conductores planos)

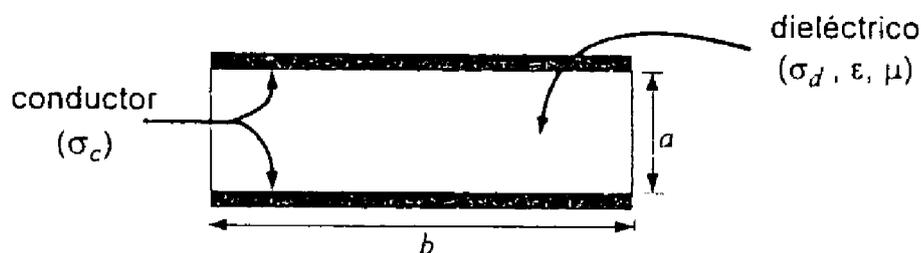


Fig. 2-10 Geometría de una línea de placas paralelas y parámetros de sus materiales.

Como estas líneas se usan generalmente a altas frecuencias, sólo se dan las fórmulas correspondientes a dicha situación (véase también la sección 4.5). En las expresiones se considera que  $b \gg a$ .

Altas frecuencias

$$L = \frac{\mu a}{b} \quad C = \frac{\epsilon b}{a} \quad R = \frac{2}{\sigma_c \ell b} \quad G = \frac{\sigma_d b}{a}$$

En todas las expresiones para calcular la inductancia por unidad de longitud es preciso incluir el valor de la permeabilidad  $\mu$  del medio, en donde  $\mu = \mu_r \mu_0$ . A menos que se especifique otra cosa,  $\mu_r \equiv 1$ , de modo que  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m.

**Ejercicio 2-2** Una línea bifilar tiene conductores de cobre con radio igual a 2 mm. La separación entre centros es de 2 cm y el material aislante es polietileno. Supóngase que la tangente de pérdidas es constante con la frecuencia y encuentre los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  por unidad de longitud, a frecuencias de operación de 1 kHz, 10 kHz y 1 MHz.

*Solución*

Si la profundidad de penetración  $\ell$  (ec. 2-2) es comparable o mayor que el radio del conductor, se utilizan las expresiones para bajas frecuencias. Si  $\ell$  es pequeño en comparación al radio, se usan las expresiones para altas frecuencias. Para el cobre,  $\mu_r = 1$  y  $\sigma = 5.8 \times 10^7$  S/m (Tabla 2-1).

$$\ell = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{(2\pi f)(4\pi \times 10^{-7})(5.8 \times 10^7)}} = \frac{0.066}{\sqrt{f}}$$

$f$	radio $a$	$\ell$	Expresión a usar
1 kHz	$2 \times 10^{-3}$ m	$2.08 \times 10^{-3}$ m	bajas frecuencias
10 kHz	$2 \times 10^{-3}$ m	$0.66 \times 10^{-3}$ m	altas frecuencias
1 MHz	$2 \times 10^{-3}$ m	$0.066 \times 10^{-3}$ m	altas frecuencias

Para el polietileno,  $\epsilon_r = 2.26$  y  $\tan \delta = 0.2 \times 10^{-3}$  (Tabla 2-2)\*.

---

\* Recuérdese que el enunciado del ejercicio permite suponer que la tangente de pérdidas es constante. Para un diseño preciso se debe conocer con mayor exactitud el valor de  $\tan \delta$  a la frecuencia de interés. Sin embargo, el error introducido en este ejercicio es poco, ya que  $0.2 \times 10^{-3} < \tan \delta < 0.3 \times 10^{-3}$  para el polietileno, en el rango de frecuencias de 50 Hz a 1 GHz.

$$\tan \delta = \frac{\sigma_{\text{dieléctrico}}}{\omega \epsilon} = \frac{\sigma_d}{\omega \epsilon_r \epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \sigma_d &\approx (2\pi f)(2.26 \times 8.8542 \times 10^{-12})(0.2 \times 10^{-3}) \\ &= 25.15 \times 10^{-15} f \end{aligned}$$

$f$	$\sigma_d$ aproximada*
1 kHz	$25.15 \times 10^{-12}$
10 kHz	$25.15 \times 10^{-11}$
1 MHz	$25.15 \times 10^{-9}$

Para la línea bifilar en cuestión,  $d/a = 10$ , o sea que  $d \gg a$ . De manera que, aplicando las fórmulas del Cuadro 2-1:

Para  $f = 1$  kHz

$$L \approx \frac{\mu}{4\pi} + \frac{\mu}{\pi} \ln(d/a) = 10^{-7} + (4 \times 10^{-7})(2.30) = 1.02 \mu\text{H/m}$$

$$C \approx \frac{\pi \epsilon}{\ln(d/a)} = \frac{(\pi)(2.26)(8.8542 \times 10^{-12})}{\ln(10)} = 27.33 \text{ pF/m}$$

$$R = \frac{2}{\sigma_c \pi a^2} = \frac{2}{(5.8 \times 10^7)(\pi)(2 \times 10^{-3})^2} = 2.74 \text{ m}\Omega/\text{m}$$

$$G \approx \frac{\pi \sigma_d}{\ln(d/a)} = \frac{(\pi)(25.15 \times 10^{-12})}{\ln(10)} = 34.35 \text{ p}\Omega/\text{m}$$

\* Estos valores son aproximados, ya que, como se recordará, la conductividad de los dieléctricos no aumenta en forma estrictamente lineal con la frecuencia.

Para  $f = 10$  kHz

$$L \approx \frac{\mu}{\pi} \ln(d/a) = (4 \times 10^{-7})(2.30) = 0.92 \text{ } \mu\text{H/m}$$

$$C \approx \frac{\pi \epsilon}{\ln(d/a)} = 27.33 \text{ pF/m}$$

$$R = \frac{1}{\pi a \ell \sigma_c} = \frac{1}{(\pi)(2 \times 10^{-3})(0.66 \times 10^{-3})(5.8 \times 10^7)} = 4.16 \text{ m}\Omega/\text{m}$$

$$G \approx \frac{\pi \sigma_d}{\ln(d/a)} = \frac{(\pi)(25.15 \times 10^{-11})}{\ln(10)} = 343.5 \text{ p}\Omega/\text{m}$$

Para  $f = 1$  MHz

$$L \approx 0.92 \text{ } \mu\text{H/m}$$

$$C \approx 27.33 \text{ pF/m}$$

$$R = \frac{1}{\pi a \ell \sigma_c} = \frac{1}{(\pi)(2 \times 10^{-3})(0.066 \times 10^{-3})(5.8 \times 10^7)} = 41.6 \text{ m}\Omega/\text{m}$$

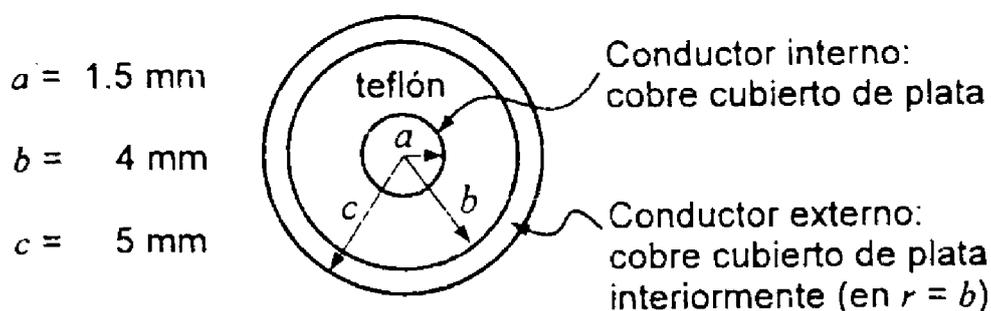
$$G \approx \frac{\pi \sigma_d}{\ln(d/a)} = \frac{(\pi)(25.15 \times 10^{-9})}{\ln(10)} = 34.35 \text{ n}\Omega/\text{m}$$

Concentrando resultados:

$f$	$L$	$C$	$R$	$G$
1 kHz	1.02 $\mu\text{H/m}$	27.33 pF/m	2.74 m $\Omega/\text{m}$	34.35 p $\Omega/\text{m}$
10 kHz	0.92 $\mu\text{H/m}$	27.33 pF/m	4.16 m $\Omega/\text{m}$	343.5 p $\Omega/\text{m}$
1 MHz	0.92 $\mu\text{H/m}$	27.33 pF/m	41.6 m $\Omega/\text{m}$	34.35 n $\Omega/\text{m}$

Se nota que la capacitancia es independiente de la frecuencia, al igual que la inductancia (a partir de cierta frecuencia intermedia). Esto es fácil de deducir por observación y comparación de las ecuaciones correspondientes para bajas y altas frecuencias. En cambio, la resistencia y la conductancia aumentan con la frecuencia. Esto es de esperarse, ya que a mayor frecuencia el efecto pelicular de la corriente en los conductores es más marcado; el área efectiva en la que se distribuye la corriente es menor y, por tanto, la resistencia a su paso aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la frecuencia de trabajo. El incremento de  $G$  con la frecuencia es directamente proporcional al incremento de la conductividad del dieléctrico debido al fenómeno de histéresis, lo cual también se puede deducir por observación de las ecuaciones correspondientes.

**Ejercicio 2-3** Se tiene un cable coaxial diseñado para funcionar a muy altas temperaturas, por ejemplo en cohetes, misiles y satélites. Las dimensiones de su corte transversal se muestran en la figura. El dieléctrico entre ambos conductores de cobre es teflón y las paredes que hacen contacto con dicho dieléctrico están recubiertas de plata. Por simplicidad, considérese que el teflón está distribuido uniformemente y que la corriente pelicular sólo fluye por las cubiertas de plata.



Calcule los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  de esta línea a 100 MHz y 1 GHz.

### Solución

Primero se estimará la profundidad de penetración  $\ell$  para determinar la validez de que la corriente fluye en las cubiertas de plata solamente.

$$\ell = \sqrt{\frac{2}{(2\pi f) \mu \sigma_{\text{plata}}}} = \frac{1}{\sqrt{f}} \left[ \frac{10^7}{(4\pi^2)(6.17 \times 10^7)} \right]^{1/2} \rightarrow \text{como se drapaja?}$$

$$\ell = \frac{0.064}{\sqrt{f}}$$

$$\begin{array}{ll} \text{A 100 MHz,} & \ell = 0.0064 \text{ mm} \\ \text{y a 1 GHz,} & \ell = 0.0020 \text{ mm} \end{array}$$

por lo que la suposición hecha es correcta.

De la Tabla 2-2, para el teflón  $\epsilon_r = 2.1$  y  $\tan \delta = 0.3 \times 10^{-3}$ . Luego, la conductividad aproximada del dieléctrico a las frecuencias especificadas es:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= 2\pi f \epsilon_r \epsilon_0 \tan \delta \\ &= 2\pi f (2.1)(8.8542 \times 10^{-12})(0.3 \times 10^{-3}) \\ &= 35f \times 10^{-15} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \text{A 100 MHz,} & \sigma_d = 35 \times 10^{-7} \text{ S/m} \\ \text{y a 1 GHz,} & \sigma_d = 35 \times 10^{-6} \text{ S/m}^* \end{array}$$

Usando ahora las fórmulas del Cuadro 2-2:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \ln(2.666) \\ &= 0.196 \text{ } \mu\text{H/m} \quad (\text{a 100 MHz y a 1 GHz}) \end{aligned}$$

---

\* Nuevamente, se hace hincapié en que estos valores son aproximados, ya que la conductividad no varía linealmente con la frecuencia. Para mayor precisión, podrían leerse los valores de  $\sigma_d$  para el teflón, a la frecuencia correspondiente, de la gráfica de la Fig. 2-6; pero para muchos otros dieléctricos, el método aproximado de este ejercicio es suficiente si no se conoce la gráfica en función de  $f$ .

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} = \frac{(2\pi)(2.1)(8.8542 \times 10^{-12})}{0.9808}$$

$$= 119 \text{ pF/m} \quad (\text{a } 100 \text{ MHz y a } 1 \text{ GHz})$$

$$R = \frac{1}{2\pi\ell\sigma_c} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{(2\pi)(\ell)(6.17 \times 10^7)} (666.66 + 250)$$

$$R = \frac{23.65 \times 10^{-7}}{\ell}$$

$$R_{100 \text{ MHz}} = \frac{23.65}{64} = 0.37 \text{ } \Omega/\text{m}$$

$$R_{1 \text{ GHz}} = \frac{23.65}{20} = 1.18 \text{ } \Omega/\text{m}$$

$$G = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi}{0.9808} \sigma_d = 6.4 \sigma_d$$

$$G_{100 \text{ MHz}} = (6.4)(35 \times 10^{-7}) = 22.4 \text{ } \mu\text{S}/\text{m}$$

$$G_{1 \text{ GHz}} = (6.4)(35 \times 10^{-6}) = 224 \text{ } \mu\text{S}/\text{m}$$

Concentrando resultados:

$f$	$L$	$C$	$R$	$G$
100 MHz	0.196 $\mu\text{H}/\text{m}$	119 pF/m	0.37 $\Omega/\text{m}$	22.4 $\mu\text{S}/\text{m}$
1 GHz	0.196 $\mu\text{H}/\text{m}$	119 pF/m	1.18 $\Omega/\text{m}$	224 $\mu\text{S}/\text{m}$

## 2.2 Ecuación general de una línea de transmisión

Conocidos los cuatro parámetros básicos de una línea ( $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$ )\* es posible determinar la relación que existe entre las ondas de voltaje y corriente que viajan a lo largo de ella, desde el generador hacia la carga (Fig. 2-2), así como la velocidad con la que lo hacen. El método de análisis considera que dichos parámetros básicos están distribuidos uniformemente a lo largo de toda la longitud de los cables que constituyen a la línea, y no concentrados como en un circuito ordinario. Tal línea de transmisión con parámetros distribuidos se puede representar por un circuito equivalente como el de la Fig. 2-11, que está integrado por muchas resistencias e inductancias en serie, así como muchas conductancias y capacitancias en paralelo.

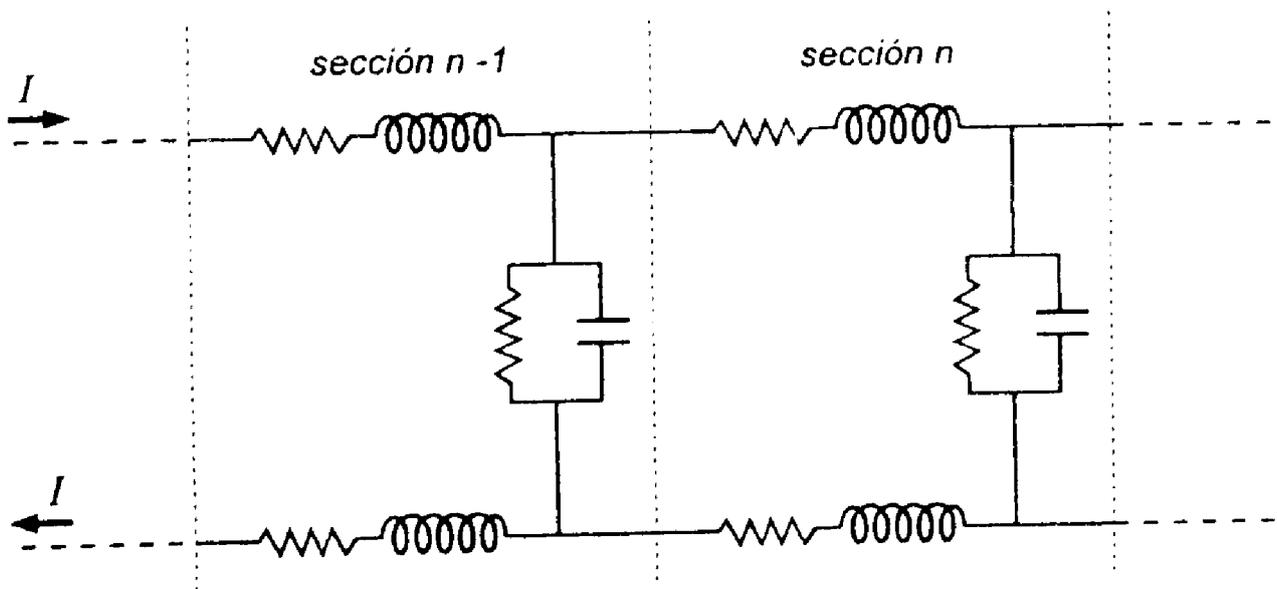


Fig. 2-11. Línea de transmisión con parámetros distribuidos.

Es obvio que tanto la línea “de ida” (superior) como la “de regreso” (inferior) en la Fig. 2-11 tienen su propia resistencia e inductancia, pero es más común, por simplicidad, representar al circuito equivalente como se indica en la Fig. 2-12. También hay otras representaciones posibles, como el circuito equivalente T o el circuito  $\pi$ . En el primer caso se considera que la

\* En otros textos también se les llama “constantes primarias” de la línea.

capacitancia y la conductancia están concentradas en la mitad (parte central) de cada sección, formándose así una especie de "T". En el segundo se supone que, en lugar de estar en el centro o en un solo extremo (Fig. 2-12),

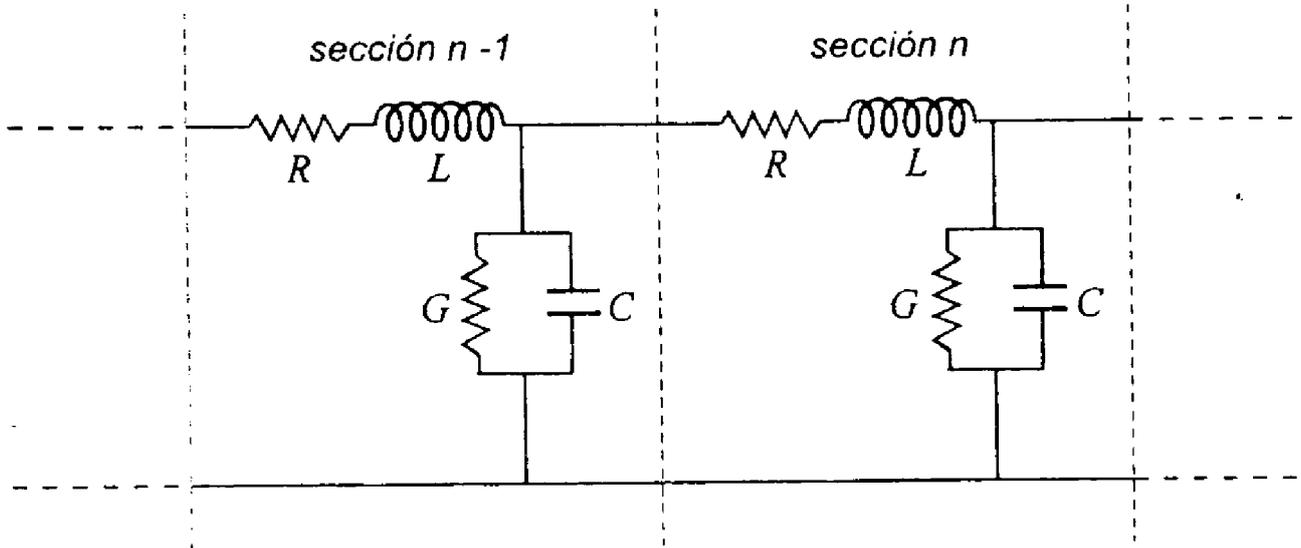


Fig. 2-12. Circuito equivalente empleado comúnmente para analizar una línea de transmisión con parámetros distribuidos.

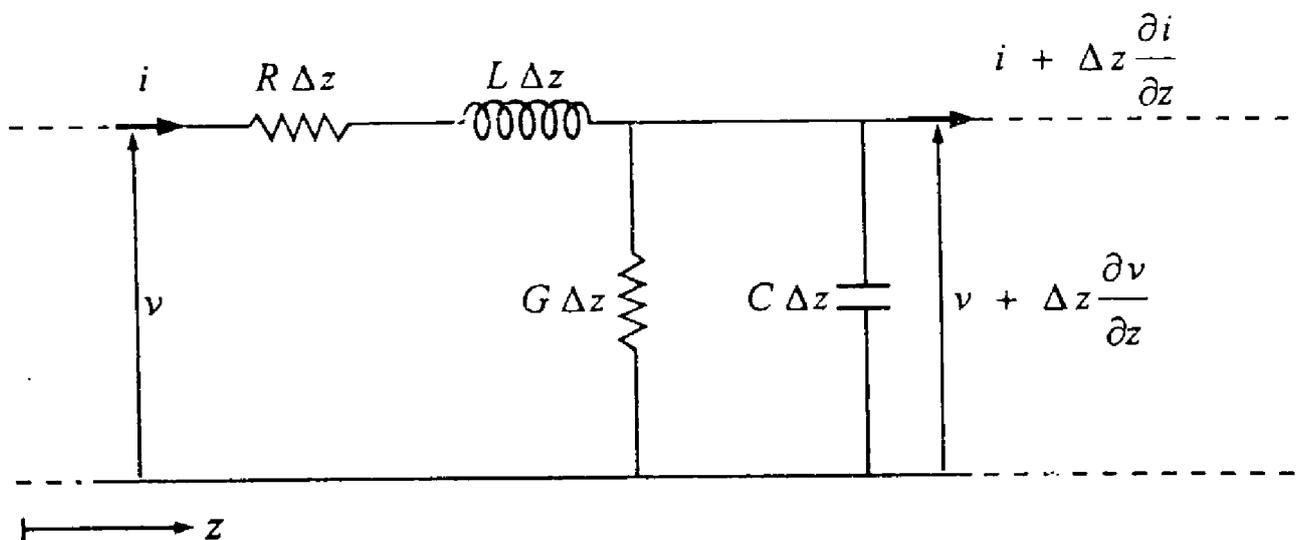


Fig. 2-13. Circuito equivalente de una sección muy pequeña de una línea de transmisión.

estos parámetros están repartidos en dos partes iguales, una al principio de cada sección y la otra al final, formando algo así como dos pilares que le dan al circuito la apariencia de un puente o una “ $\pi$ ”. En realidad, en el límite diferencial, cualquiera de estos circuitos equivalentes conducirá a las mismas expresiones matemáticas que se deducen a continuación.

Considérese una sección cualquiera de la línea, cuya longitud sea muy pequeña o infinitesimal, con sus parámetros colocados como se indica en la Fig. 2-13. El valor numérico de cada uno de estos parámetros es igual al parámetro correspondiente por unidad de longitud multiplicado por la longitud de la sección, que es igual a  $\Delta z$ . La corriente  $i$  y el voltaje  $v$  son funciones tanto de la distancia  $z$  como del tiempo  $t$ , de modo que al final de la sección considerada se tienen incrementos en corriente y voltaje como se indican en la figura. Si  $\Delta z$  se hace tender al valor cero ( $\Delta z \rightarrow 0$ ), se obtienen la misma simetría y resultados que con un circuito equivalente T o  $\pi$ . De la misma Fig. 2-13 se pueden escribir ahora las relaciones siguientes para los cambios de voltaje y corriente:

$$\underbrace{v - \left[ v + \Delta z \frac{\partial v}{\partial z} \right]}_{\text{Voltaje inicial - Voltaje final}} = (R \Delta z)(i) + (L \Delta z) \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)$$

$$i - \left[ i + \Delta z \frac{\partial i}{\partial z} \right] = (G \Delta z)(v) + (C \Delta z) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = - \left( R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \right) \quad (2-5)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \left( G v + C \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (2-6)$$

La pareja de ecuaciones (2-5) y (2-6) se puede resolver diferenciando una de ellas con relación a  $z$  y la otra con relación a  $t$ , para sustituir esta última en la primera y eliminar la variable de corriente. De manera que, de la ec. (2-5):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - \left( R \frac{\partial i}{\partial z} + L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \right) \quad (2-7)$$

y de la ec. (2-6):

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = - \left( G \frac{\partial v}{\partial t} + C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \quad (2-8)$$

Sustituyendo (2-6) y (2-8) en (2-7):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = R \left[ G v + C \frac{\partial v}{\partial t} \right] + L \left[ G \frac{\partial v}{\partial t} + C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right]$$

y reordenando términos se llega a la ecuación diferencial que debe satisfacer la onda de voltaje:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (RG)v + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + (LC) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2-9)$$

A esta ecuación se le llama comúnmente, por razones históricas, como la *ecuación del telegrafista*. Si en lugar de eliminar la variable  $i$  siguiendo el procedimiento anterior, se elimina la variable  $v$ , entonces se obtiene una ecuación diferencial de segundo grado idéntica a la ec. (2-9) que debe satisfacer la onda de corriente:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = (RG)i + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + (LC) \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (2-10)$$

Las soluciones de las expresiones (2-9) y (2-10) se pueden determinar fácilmente si se considera que las variaciones del voltaje y la corriente con relación al tiempo son senoidales, y como las ecuaciones son lineales y de

coeficientes constantes\* es posible utilizar fasores, sustituyendo al voltaje  $v(z,t)$  por  $V(z) e^{j\omega t}$  y a la corriente  $i(z,t)$  por  $I(z) e^{j\omega t}$ . Al efectuar dichas sustituciones en las ecuaciones (2-5) y (2-6), se tiene:

$$\frac{dV}{dz} = - (R + j\omega L) I \quad (2-11)$$

$$\frac{dI}{dz} = - (G + j\omega C) V \quad (2-12)$$

Finalmente, al derivar (2-11) y sustituir en el resultado a la expresión (2-12), se obtiene la ecuación diferencial de segundo grado en forma fasorial:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) V \quad (2-13)$$

cuya solución general es de la forma

$$V(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z} \quad (2-14)$$

en donde  $A$  y  $B$  son constantes por definir y

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (2-15)$$

Si se desea obtener la expresión para  $v(z,t)$  a partir del fasor  $V(z)$ , y recordando la definición de un fasor, simplemente se emplea la relación siguiente:

$$v(z,t) = \text{Re} \left[ V(z) e^{j\omega t} \right] \quad (2-16)$$

Igualmente para la corriente, una vez conocido el fasor  $I(z)$ , la expresión en función del espacio y el tiempo se obtiene como:

---

\* Nótese que, de acuerdo con lo visto en la sección 2.1, los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $G$  y  $C$  no son constantes en general, ya que dependen de la frecuencia. Sin embargo, si la línea es uniforme en cuanto a su geometría y a la composición de sus materiales en toda su longitud, es decir, si  $R$ ,  $L$ ,  $G$  y  $C$  son independientes de  $z$  y de  $t$ , entonces se pueden considerar como coeficientes constantes a una frecuencia determinada en las ecs. (2-9) y (2-10) o en las originales (2-5) y (2-6).

$$i(z,t) = \text{Re} \left[ I(z) e^{j\omega t} \right] \quad (2-17)$$

A  $\gamma$ , dada por la ec. (2-15), se le da el nombre de *constante de propagación*. Es evidente que cada línea de transmisión tiene su propio valor particular para  $\gamma$ , a determinada frecuencia, dependiendo de su geometría y de los materiales que la compongan, pues los cuatro parámetros básicos por unidad de longitud  $R$ ,  $L$ ,  $G$  y  $C$  intervienen en la ecuación que la define, además de la variable  $\omega$ . Ahora bien, si se observa la Fig. 2-12, se ve que el término  $(R + j\omega L)$  es igual a la impedancia en serie de la línea,  $Z$ , por unidad de longitud, y que  $(G + j\omega C)$  es la admitancia en paralelo,  $Y$ , también por unidad de longitud. De modo que la constante de propagación (ec. 2-15) es igual a la raíz cuadrada del producto de la impedancia en serie por la admitancia en paralelo de la línea, lo cual se puede escribir de la forma siguiente:

$$\gamma = \sqrt{ZY} \quad (2-18)$$

La constante de propagación es un número complejo y también se puede expresar como:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2-19)$$

en donde la parte real,  $\alpha$ , indica la **atenuación** que sufre la onda de voltaje, o de corriente según sea el caso, conforme viaja o se *propaga* a lo largo de la línea; y  $\beta$ , que es la parte imaginaria, indica la **rapidez del cambio de fase** de la onda conforme se propaga. Las unidades de la *constante de atenuación*  $\alpha$  son nepers por metro, y las de la *constante de fase*  $\beta$  son radianes por metro. Sin embargo, es más común especificar a  $\alpha$  en decibeles por metro y emplear la letra  $L^*$ ; la conversión de nepers a decibeles se puede efectuar por medio de la relación siguiente:

$$(\text{atenuación } L \text{ en dB/m}) = (8.686) (\text{atenuación } \alpha \text{ en Np/m}) \quad (2-20)$$

ya que 1 neper es igual a 8.686 dB.

---

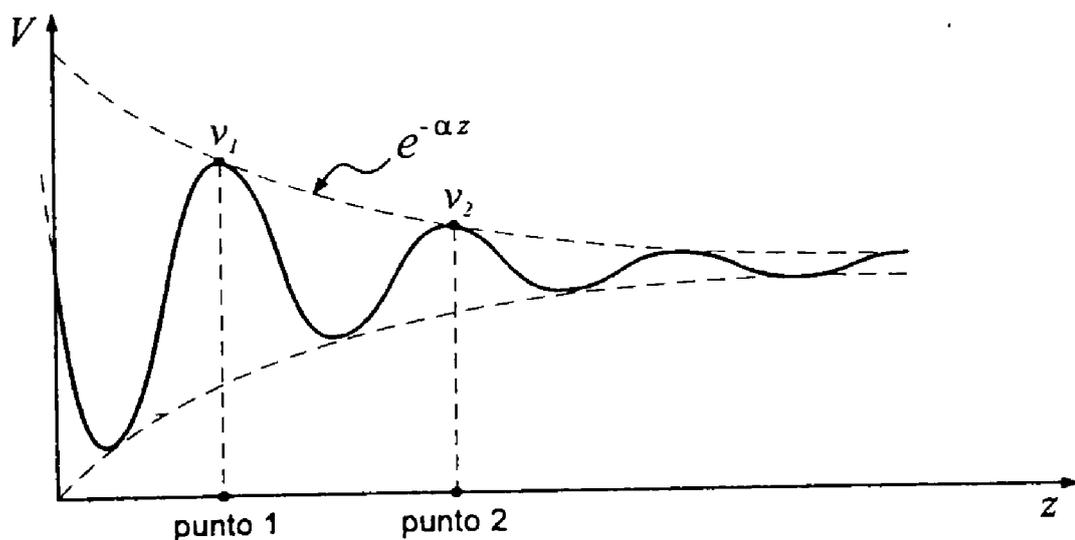
\* No debe confundirse con el parámetro  $L$ , inductancia por unidad de longitud. El símbolo proviene de la palabra en inglés *Loss*, que significa *pérdida* (de intensidad o de potencia).

Los nepers se usan generalmente en desarrollos teóricos y los decibeles en trabajos de laboratorio y de planeación de sistemas en la práctica. Su uso alternativo es similar a la utilización diferente que se le da a los radianes y a los grados, respectivamente.

El procedimiento para obtener la relación (2-20) es muy sencillo. De la ec. (2-14) se ve que la onda de voltaje consiste de dos partes: la primera viaja en la dirección positiva del eje  $z$  y la segunda en sentido contrario. Un poco más adelante se aclarará la interpretación de esto, cuando se estudie la reflexión, pero por lo pronto supóngase que sólo existe el primer término y que la señal se atenúa como se muestra en la Fig. 2-14. La pérdida de voltaje en cualquier punto a lo largo de la línea es proporcional a  $e^{-\alpha z}$ , y la pérdida de potencia es proporcional al cuadrado de  $V$ , o sea, proporcional a  $e^{-2\alpha z}$ . Es decir, suponiendo que la potencia inicial en el punto 1 sea igual a la unidad, la pérdida de potencia de la señal al avanzar una distancia  $z$  y pasar del punto 1 al punto 2, en decibeles\*, es igual a:

$$\begin{aligned} \text{Pérdida} &= 10 \log_{10} P_1 - 10 \log_{10} P_2 = 10 \log_{10} (P_1/P_2) = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{e^{-2\alpha z}} \right) \\ &= 10 \log_{10} e^{2\alpha z} = 20 \alpha z \log_{10} e = 8.686 \alpha z \quad \text{dB} \end{aligned}$$

de donde queda demostrada la validez de la relación (2-20). Regresemos ahora a la ecuación (2-14), que es la forma *general* de la onda de voltaje.



**Fig. 2-14.** Atenuación exponencial de una onda senoidal de voltaje a lo largo de una línea.

\* Ciertos autores, más estrictos con relación al castellano, prefieren utilizar los términos *decibelios* y *neperios*, respectivamente, en lugar de decibeles y nepers.

Derivándola con relación a  $z$  y sustituyéndola en la ec. (2-11), se obtiene la expresión fasorial para la onda de corriente:

$$\begin{aligned} I(z) &= - \frac{1}{(R + j\omega L)} \frac{dV}{dz} \\ &= - \frac{Y}{(R + j\omega L)} \left[ -Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z} \right] \end{aligned}$$

Si se emplea la fórmula (2-15) para  $\gamma$  en la expresión anterior de la corriente y se simplifica, se llega a

$$I(z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}} \left[ Ae^{-\gamma z} - Be^{+\gamma z} \right] \quad (2-21)$$

El denominador de la ecuación (2-21) es evidentemente un número complejo, al igual que la constante de propagación  $\gamma$ ; sólo que ésta es igual a la raíz cuadrada del *producto* de la impedancia  $Z$  y la admitancia  $Y$  por unidad de longitud de la línea (ecs. 2-15 y 2-18), mientras que la operación en la ec. (2-21) es la raíz cuadrada del *cociente* de  $Z$  sobre  $Y$ . A este nuevo número complejo, que claramente es una impedancia, se le da el nombre de *impedancia característica* de la línea y se denota como  $Z_o$ :

$$Z_o = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \quad \Omega \quad (2-22)$$

De manera similar a lo que se comentó en párrafos anteriores para la constante de propagación  $\gamma$ , cada línea de transmisión tendrá su propio valor particular de impedancia característica  $Z_o$ , dependiendo de la geometría y las dimensiones de la línea, así como de la frecuencia de operación, ya que la frecuencia angular  $\omega$  es igual a  $2\pi f$  en la ec. (2-22). De hecho, este parámetro,  $Z_o$ , es comúnmente proporcionado por los fabricantes de cables en sus catálogos de productos y, como se verá más adelante, no es realmente necesario conocer los parámetros básicos  $R$ ,  $L$ ,  $G$  y  $C$  de la línea para resolver una buena cantidad de determinados problemas. Por ejemplo, hay

cables coaxiales con impedancias características nominales de  $50 \Omega$  (radiodifusión y computadoras) y  $75 \Omega$  (televisión por cable), cables bifilares de  $300 \Omega$  (antenas receptoras de TV o FM), y cables bifilares multipar para telefonía y datos de  $75 \Omega$ ,  $100 \Omega$ ,  $150 \Omega$ ,  $600 \Omega$ , etc.

Hasta ahora se han definido dos nuevos parámetros de la línea de transmisión: su constante de propagación  $\gamma$  y su impedancia característica  $Z_o$ . Ambos parámetros\* son números complejos y son función de la frecuencia  $f$  y de los parámetros básicos por unidad de longitud  $R$ ,  $L$ ,  $G$  y  $C$ . Más adelante se aclarará por qué los valores prácticos dados en el párrafo anterior para  $Z_o$  son reales y no complejos.

Existe un tercer nuevo parámetro por definir, que nos da información adicional sobre cómo funciona la línea en cuestión. Este parámetro es la *velocidad de fase*  $v_p^{**}$ , que se define como

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} \quad \text{m/seg} \quad (2-23)$$

donde  $\beta$  es la constante de fase o parte imaginaria de la constante de propagación (ecs. 2-15 y 2-19), en radianes/metro, y  $\omega$  es la frecuencia angular en radianes/segundo. Para interpretar esta velocidad de fase, obsérvese la Fig. 2-15, en la que, por simplicidad, se considera que la línea no tiene atenuación y que la onda de voltaje no es amortiguada como en la Fig. 2-14. Es decir, que  $\gamma$  es puramente imaginaria, puesto que  $\alpha = 0$  y, como también se verá en una de las próximas secciones, esta consideración es válida para muchos casos a altas frecuencias, aun cuando a primera vista resulte contradictorio por el hecho de que  $R$  aumenta con la raíz cuadrada de la frecuencia.

La onda senoidal de la Fig. 2-15 viaja hacia la derecha, en la dirección positiva de  $z$ , y su forma y magnitud no son alteradas conforme avanza hacia la carga, puesto que no hay atenuación. La línea tiene una longitud total *física*, medida en metros, y una longitud total *eléctrica* correspondiente, medida en longitudes de onda  $\lambda$ . Por definición,  $\lambda$  es la distancia entre puntos sucesivos de la onda que tienen la misma fase eléctrica; por ejemplo, la

\* En otros textos también se les llama "constantes secundarias" de la línea.

\*\* El subíndice  $p$  proviene de *phase*, que significa *fase* en inglés.

distancia entre los puntos 1 y 2 o entre A y B en la figura. Su valor depende de la frecuencia  $f$  de oscilación y de la velocidad de propagación  $v$ ; y esta velocidad, a su vez, depende de las características del medio por el cual la onda viaja (tipo de dieléctrico entre los conductores de la línea).

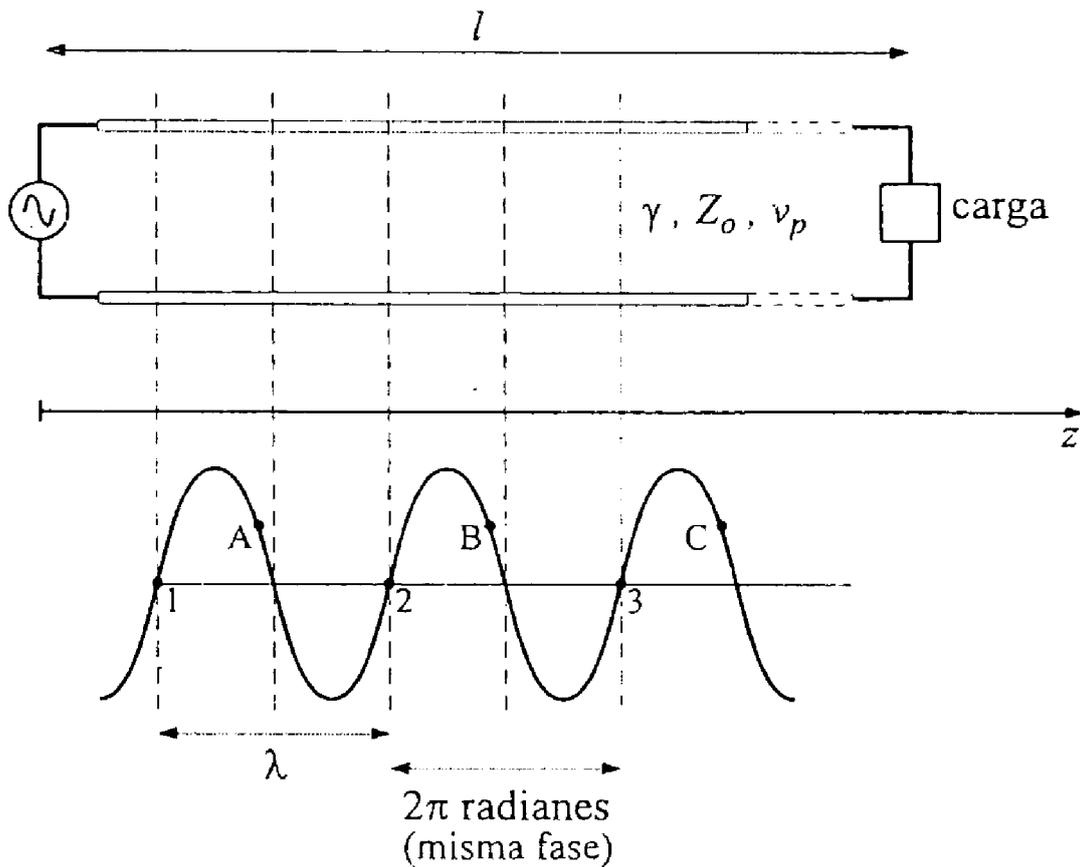


Fig. 2-15. Onda de voltaje que se propaga sobre una línea de transmisión sin pérdidas, del generador hacia la carga.

Si entre los conductores hay aire, se puede considerar que la velocidad de la onda es igual a la de la luz en el espacio libre, es decir,  $300\,000\text{ km/seg}^*$ ; pero si el medio tiene una constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$  mayor que la unidad (véase la Tabla 2-2), entonces la onda se propaga con una velocidad menor que la de la luz, igual a:

\* Estrictamente, de acuerdo con experimentos muy precisos, la velocidad de la luz es casi igual a  $2.9979 \times 10^8\text{ m/seg}$ ; pero para efectos de cálculo académico, es suficiente utilizar la aproximación de  $3 \times 10^8\text{ m/seg}$ .

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2-24)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz\*. Al reducirse la velocidad de propagación, la longitud de onda automáticamente se reduce también, como si la onda fuese comprimida a lo largo del eje  $z$ . Esta nueva longitud de onda dentro del medio de propagación sin pérdidas se calcula como:

$$\lambda_{medio} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f} = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2-25)$$

donde  $\lambda_o$  es la longitud de onda en el espacio libre a la misma frecuencia.

De la ec. (2-25) se ve que  $\lambda$  y  $\beta$  son inversamente proporcionales entre sí; si una aumenta, la otra disminuye, y viceversa. De modo que si  $\beta = 2\pi/\lambda$ , al sustituirla en la ec. (2-23) resulta que:

$$v_p = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2-26)$$

Esta velocidad de fase  $v_p$  es independiente de la frecuencia (si el medio es considerado sin pérdidas,  $\alpha = 0$ ) y es la velocidad con la que se mueve *un punto*, digamos B en la Fig. 2-15, que define la localización de una *fase constante* determinada. Dicho en otras palabras, es la velocidad a la que se mueve en la dirección  $z$  un punto imaginario en el que la fase es constante. Para modos de propagación TEM, como es el caso de las líneas analizadas en este capítulo, en que generalmente se puede considerar que  $\alpha = 0$ , la velocidad de propagación  $v$  a la que viaja la potencia de la señal es igual numéricamente a la velocidad de fase  $v_p$ ; pero para las guías de ondas, por

---

\* En realidad, la ec. (2-24) es una forma simplificada, aunque suficientemente aproximada, para calcular la velocidad de propagación o transmisión. Estrictamente,  $v$  también depende de la permeabilidad magnética relativa ( $v = c/\sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ ), pero  $\mu_r$  es igual a la unidad para los materiales dieléctricos. Asimismo, al haber corrientes en los conductores (ec. 2-1) y, por lo tanto, pérdidas, esto tiene el efecto de frenar a las ondas que viajan por la línea; sin embargo, para líneas prácticas utilizadas a altas frecuencias este efecto es muy pequeño y puede ser despreciado (se tiene un decremento en la velocidad  $v$  del orden de una milésima, o menor, según la frecuencia).

ejemplo, la situación es diferente, como se verá en el capítulo 4, ya que  $v_p$  es mucho mayor que  $v$ .

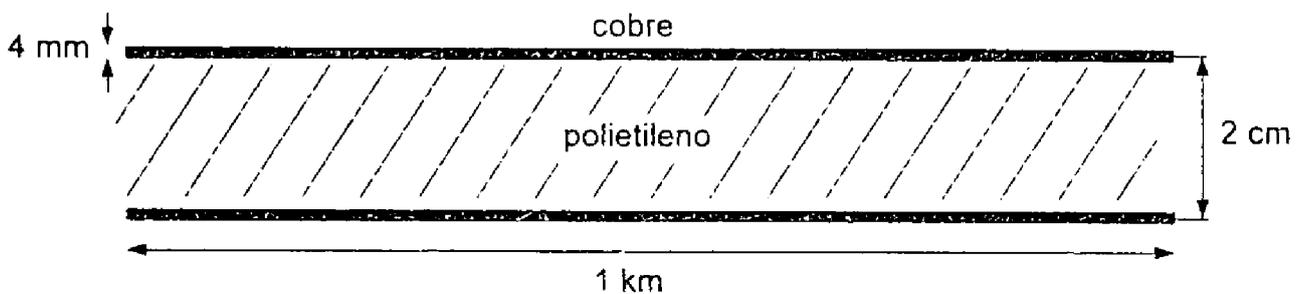
De manera que si  $l$  es la longitud total de la línea de la Fig. 2-15, el tiempo total que tarda un punto arbitrario con determinada fase en recorrer la distancia desde el generador hasta la carga es igual a

$$t_d = \frac{l}{v_p} = \frac{\beta l}{\omega} \quad (2-27)$$

Este tiempo,  $t_d^*$ , es el *tiempo de retardo* de la línea.

**Ejercicio 2-4** Obtenga los valores de la impedancia característica, la constante de atenuación, la constante de fase y la velocidad de fase de la línea bifilar de cobre del ejercicio 2-2. Si la línea mide 1 km, ¿cuánto tiempo tardaría una señal en viajar desde el generador hasta el extremo opuesto?

*Solución*



Los resultados obtenidos para los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  se reproducen en la tabla siguiente:

$f$	$L$	$C$	$R$	$G$
1 kHz	1.02 $\mu\text{H/m}$	27.33 pF/m	2.74 m $\Omega/\text{m}$	34.35 p $\Omega/\text{m}$
10 kHz	0.92 $\mu\text{H/m}$	27.33 pF/m	4.16 m $\Omega/\text{m}$	343.5 p $\Omega/\text{m}$
1 MHz	0.92 $\mu\text{H/m}$	27.33 pF/m	41.6 m $\Omega/\text{m}$	34.35 n $\Omega/\text{m}$

\* El subíndice  $d$  proviene de *delay*, que significa *retardo* o retraso en inglés.

Usando la ec. (2-22), se tiene que la impedancia característica es igual a

$$Z_o = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}$$

Para  $f = 1$  kHz

$$Z_o = \sqrt{\frac{2.74 \times 10^{-3} + j(2\pi)(10^3)(1.02 \times 10^{-6})}{34.35 \times 10^{-12} + j(2\pi)(10^3)(27.33 \times 10^{-12})}}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{(2.74 + j6.41)}{(0.03435 + j171.72)}} \times 10^3 = 197.37 - j40.40 \quad \Omega$$

Para  $f = 10$  kHz

$$Z_o = \sqrt{\frac{4.16 \times 10^{-3} + j(2\pi)(10^4)(0.92 \times 10^{-6})}{343.5 \times 10^{-12} + j(2\pi)(10^4)(27.33 \times 10^{-12})}}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{(0.416 + j5.78)}{(0.03435 + j171.72)}} \times 10^3 = 183.59 - j6.58 \quad \Omega$$

Para  $f = 1$  MHz

$$Z_o = \sqrt{\frac{41.6 \times 10^{-3} + j(2\pi)(10^6)(0.92 \times 10^{-6})}{34.35 \times 10^{-9} + j(2\pi)(10^6)(27.33 \times 10^{-12})}}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{(0.0416 + j5.78)}{(0.03435 + j171.72)}} \times 10^3 = 183.47 - j0.64 \quad \Omega$$

De la ec. (2-15) se obtiene la constante de propagación  $\gamma$  :

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Para  $f = 1$  kHz

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(2.74 + j6.41)(0.03435 + j171.72)} \times 10^{-6} \\ &= (6.94 + j33.89) \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Para  $f = 10$  kHz

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(0.416 + j5.78)(0.03435 + j171.72)} \times 10^{-5} \\ &= (11.36 + j315.26) \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Para  $f = 1$  MHz

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(0.0416 + j5.78)(0.03435 + j171.72)} \times 10^{-3} \\ &= (0.1165 + j31.5) \times 10^{-3}\end{aligned}$$

La constante de atenuación pedida,  $\alpha$ , es la parte real de  $\gamma$ , y la constante de fase,  $\beta$ , es la parte imaginaria.

Finalmente, la velocidad de fase se calcula a partir de la ec. (2-23):

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta}$$

Para  $f = 1$  kHz

$$v_p = \frac{(2\pi) \times 10^3}{33.89 \times 10^{-6}} = 1.85 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

Para  $f = 10$  kHz

$$v_p = \frac{(2\pi) \times 10^4}{315.26 \times 10^{-6}} = 1.99 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

Para  $f = 1$  MHz

$$v_p = \frac{(2\pi) \times 10^6}{315 \times 10^{-3}} = 1.99 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

Concentrando resultados:

$f$	$Z_0$	$v_p$
1 kHz	197.37 - j 40.4 $\Omega$	$1.85 \times 10^8$ m/seg
10 kHz	183.59 - j 6.58 $\Omega$	$1.993 \times 10^8$ m/seg
1 MHz	183.47 - j 0.64 $\Omega$	$1.994 \times 10^8$ m/seg

$f$	$\alpha$	$\beta$
1 kHz	$6.94 \times 10^{-6}$ Np/m	$33.89 \times 10^{-6}$ rad/m
10 kHz	$11.36 \times 10^{-6}$ Np/m	$315.26 \times 10^{-6}$ rad/m
1 MHz	$0.1165 \times 10^{-3}$ Np/m	$31.5 \times 10^{-3}$ rad/m

Antes de continuar la solución del ejercicio, conviene analizar los resultados hasta ahora obtenidos y concentrados en estas tablas. Por lo que se refiere a la impedancia característica, conforme la frecuencia aumenta, su componente imaginaria tiende a cero y la parte real tiende al mismo valor que se obtendría para una línea sin pérdidas, al hacer  $R$  y  $G$  igual a cero, ya que, de la ec. (2-22),  $Z_0$  sería igual a  $\sqrt{L/C} = 183.47 \Omega$ . Asimismo, al aumentar la frecuencia, la velocidad de fase  $v_p$  tiende al valor que tendría la velocidad

de propagación en un medio con  $\epsilon_r = 2.26$  (polietileno) y sin pérdidas, pues de la ec. (2-24),  $v = c / \sqrt{\epsilon_r} = 1.996 \times 10^8$  m/seg.

Nótese que la atenuación  $\alpha$  aumenta con la frecuencia. El porqué puede ser ignorada para la solución de muchos problemas prácticos a altas frecuencias se aclarará pronto, en las secciones siguientes.

Para concluir este ejercicio, el tiempo de retardo está dado por la ec. (2-27):

$$t_d = \frac{l}{v_p}$$

Si  $l = 10^3$  m, se obtienen los valores siguientes a las frecuencias especificadas:

$f$	$t_d$
1 kHz	5.4 $\mu$ seg
10 kHz	5.0 $\mu$ seg
1 MHz	5.0 $\mu$ seg

### 2.3 Propagación en líneas acopladas

Considérese una línea de transmisión de longitud infinita, como en la Fig. 2-16, por la que viaja una onda de voltaje, dada por el primer término de la ec. (2-14):

$$V_i(z) = Ae^{-\gamma z} \quad (2-28)$$

A esta onda de voltaje que parte del generador hacia una carga situada en el otro extremo de la línea se le da el nombre de *incidente*, de allí el subíndice  $i$ . Como en este caso la línea es infinita, la onda nunca alcanzará la carga y las condiciones para una posible onda reflejada jamás se darán, de allí que a propósito se haya omitido el segundo término de la ec. (2-14) para escribir la ec. (2-28). El voltaje y la corriente de la onda pura incidente pueden entonces escribirse a partir de las ecs. (2-28), (2-21) y (2-19) como:

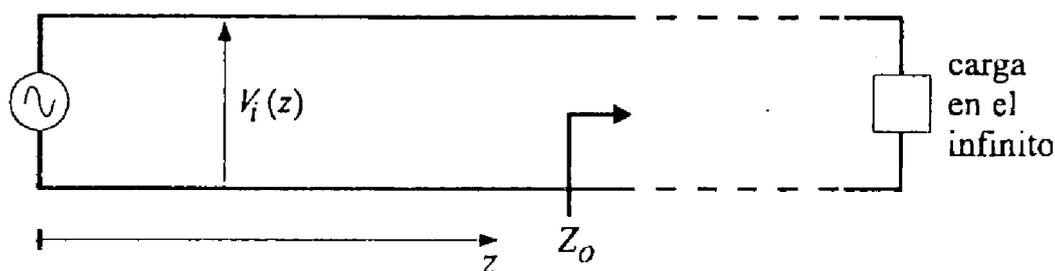


Fig. 2-16 Línea de longitud infinita.

$$V_i(z) = Ae^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$I_i(z) = \frac{1}{Z_0} [Ae^{-\alpha z} e^{-j\beta z}]$$

Se nota que, independientemente de la atenuación  $\alpha$  de la línea, el cociente del voltaje sobre la corriente siempre es igual a  $Z_0$ . Este resultado es independiente de  $z$ , o sea que es el mismo para todos los puntos de la línea. Por lo tanto, se puede decir que la onda progresiva siempre “ve” hacia la derecha una impedancia igual a  $Z_0$ . Puede pensarse, entonces, que si al final de una línea **finita** de impedancia característica  $Z_0$  se conecta una carga con impedancia también igual a  $Z_0$ , la línea se comportará igual a como si fuese infinita, en el sentido de que no habrá una onda reflejada. La gran importancia que tiene la impedancia característica de una línea en la práctica es que, al usarse un valor igual como carga, esto hace parecer a la línea como infinita, desde el punto de vista de la ausencia de reflexiones. En conclusión, una línea de longitud finita que esté terminada con una carga igual a su impedancia característica le entregará toda la potencia incidente disponible a la carga. Cuando esto ocurre, se dice que la línea está *acoplada* (Fig. 2-17).

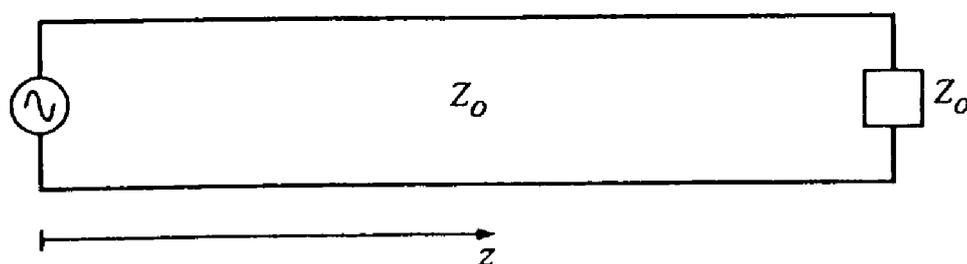


Fig. 2-17 Línea finita acoplada.

El objetivo de un ingeniero en transmisión siempre será entregar la mayor potencia posible a la carga. Sin embargo, si la impedancia característica,  $Z_0$ , y la impedancia de la carga,  $Z_L^*$ , son diferentes, la línea ya no se comportará como si fuese infinita; estará desacoplada y habrá una onda reflejada (Fig. 2-18).

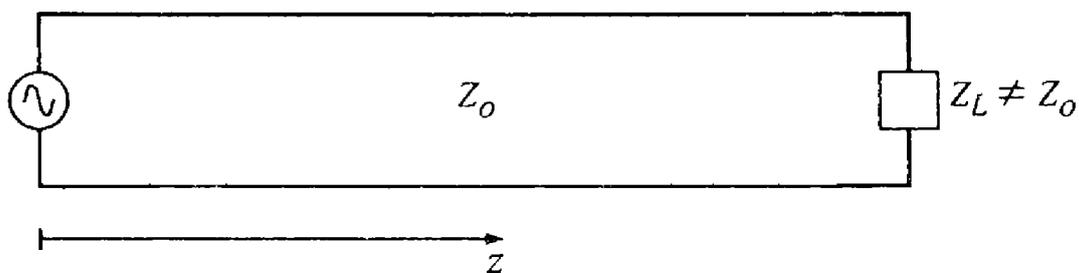


Fig. 2-18 Línea finita desacoplada.

La onda total de voltaje en una línea desacoplada estará dada por la superposición, para toda  $z$ , de la onda incidente y la onda reflejada,  $V_r(z)$ , tal como lo expresa la solución general dada por la ec. (2-14):

$$V(z) = \underbrace{Ae^{-\gamma z}}_{V_i(z)} + \underbrace{Be^{+\gamma z}}_{V_r(z)} \quad (2-29)$$

Acordemente, para la corriente total se tendrá la expresión:

$$I(z) = \underbrace{\frac{Ae^{-\gamma z}}{Z_0}}_{I_i(z)} - \underbrace{\frac{Be^{+\gamma z}}{Z_0}}_{I_r(z)} \quad (2-30)$$

Antes de estudiar algunas técnicas de acoplamiento, con el obvio fin de eliminar o reducir la reflexión y optimizar la entrega de potencia a la carga, será preciso examinar el comportamiento de esta onda compuesta y sus efectos en una línea cualquiera. Pero previamente a ello, se hará un ejercicio con una línea acoplada.

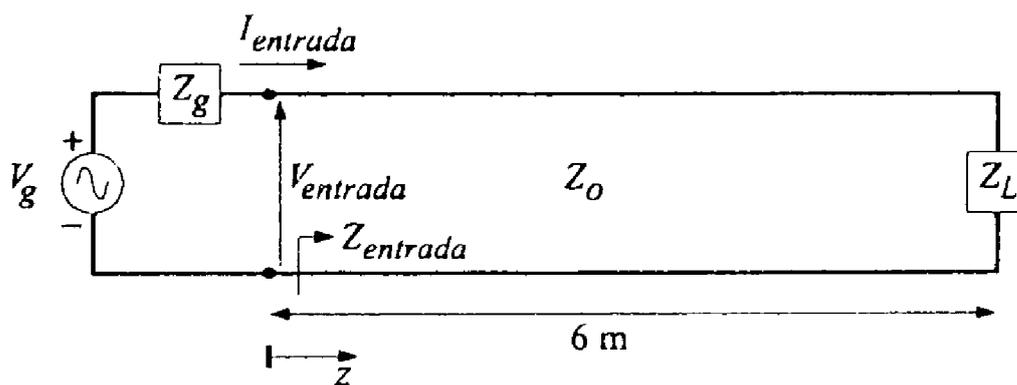
\* El subíndice  $L$  proviene de la palabra en inglés *Load* o carga.

Hacer:

**Ejercicio 2-5** Un generador de señales está conectado a una línea de transmisión cuya impedancia característica vale  $75 \Omega$ . La línea mide 6 metros y el dieléctrico en su interior tiene una permitividad relativa de 2.6. Al final de la línea se conecta una carga cuya impedancia de entrada vale  $75 \Omega$ . Si el generador tiene una resistencia interna de  $1 \Omega$  y un voltaje de salida en circuito abierto igual a  $1.5 \cos(2\pi \times 10^8) t$  V, encuentre: a) las expresiones matemáticas instantáneas para el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea, y b) la potencia promedio que se le entrega a la carga.

**Solución**

De acuerdo con los datos proporcionados, el circuito se puede representar de la forma siguiente:



$$V_g = 1.5 \angle 0^\circ$$

$$Z_g = 1 \Omega$$

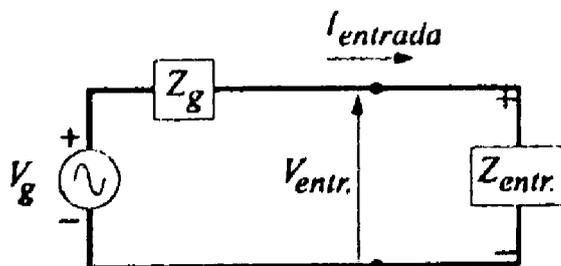
$$f = 100 \text{ MHz}$$

$$Z_0 = 75 \Omega = Z_L$$

Como la línea está acoplada, la impedancia que se ve en todos los puntos de la línea es la misma y, por lo tanto, la impedancia de entrada también vale eso:

$$Z_{\text{entrada}} = 75 \Omega$$

La parte izquierda del circuito se puede representar ahora como:



de donde:

$$V_{entr.} = \left( \frac{Z_{entr.}}{Z_g + Z_{entr.}} \right) V_g = \left( \frac{75}{76} \right) (1.5 \angle 0^\circ) = 1.48 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_{entr.} = \left( \frac{1}{Z_g + Z_{entr.}} \right) V_g = \frac{1.5 \angle 0^\circ}{76} = 0.0197 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Si se considera que la atenuación  $\alpha$  es despreciable, entonces, a partir de las *ecs.* (2-23) y (2-24):

$$\gamma = j\beta = j \frac{\omega}{v} = j \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{c} = j \frac{2\pi \times 10^8 \sqrt{2.6}}{3 \times 10^8} = j1.075\pi \text{ rad/m}$$

Por lo tanto, de la *ec.* (2-28), se tiene que para cualquier punto de la línea, a una distancia  $z$  a la derecha de las terminales de la entrada, el voltaje está dado por:

$$V(z) = (V_{entr.}) e^{-j\beta z} = (1.48 e^{j0}) e^{-j1.075\pi z} = 1.48 e^{-j1.075\pi z} \text{ V}$$

y acordeamente, la corriente es igual a:

$$I(z) = (I_{entr.}) e^{-j\beta z} = 0.0197 e^{-j1.075\pi z} \text{ A}$$

Finalmente, utilizando las *ecs.* (2-16) y (2-17), se obtienen las expresiones pedidas en función del tiempo, para cualquier punto de la línea:

$$\begin{aligned} v(z,t) &= \text{Re} \left[ V(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ 1.48 e^{-j1.075\pi z} e^{j2\pi f t} \right] \\ &= 1.48 \cos \left[ 2\pi \times 10^8 t - 1.075\pi z \right] \quad \text{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(z,t) &= \text{Re} \left[ I(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ 0.0197 e^{-j1.075\pi z} e^{j2\pi f t} \right] \\ &= 0.0197 \cos \left[ 2\pi \times 10^8 t - 1.075\pi z \right] \quad \text{A} \end{aligned}$$

Así, por ejemplo, para el punto específico donde está la carga, las expresiones instantáneas se obtienen sustituyendo  $z = 6$  m en las ecuaciones anteriores.

Por lo que se refiere a la potencia promedio entregada a la carga, ésta debe ser igual a la potencia promedio de entrada, ya que se está considerando que la línea no tiene pérdidas ( $\alpha = 0$ ). De allí que, a partir de los fasores de voltaje y corriente:

$$\begin{aligned} (P_{prom.})_{carga} &= (P_{prom.})_{entr.} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V(z) I^*(z)] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ (1.48 e^{-j1.075\pi z}) (0.0197 e^{j1.075\pi z}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (1.48 \times 0.0197) = 14.6 \text{ mW} \end{aligned}$$

Nótese que  $I^*(z)$  representa al conjugado de  $I(z)$ .

## 2.4 Impedancia de entrada de una línea terminada con una carga arbitraria

Considérese una línea finita de longitud  $l$  como la de la Fig. 2-19. De ahora en adelante, conviene tomar al punto donde está la carga como  $z = 0$ , por lo que el generador estará situado en  $z = -l$ . Esta es una práctica común y no implica ninguna dificultad adicional. Las ecuaciones que describen el comportamiento de las ondas totales de voltaje y corriente son las mismas (2-29) y (2-30), pues la coordenada  $z$  crece en el mismo sentido que antes, de izquierda a derecha.

La impedancia  $Z$  vista hacia la derecha (en dirección hacia la carga) desde cualquier punto en la línea está dada, a partir de las ecs. (2-29) y (2-30), por:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}}{Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}} \quad (2-31)$$

Si  $z = -l$ , la impedancia de entrada  $Z_i^{(1)}$  vista por el generador hacia la derecha, será entonces:

<sup>(1)</sup> Es común utilizar este subíndice  $i$ , que proviene de la palabra en inglés *input* o entrada.

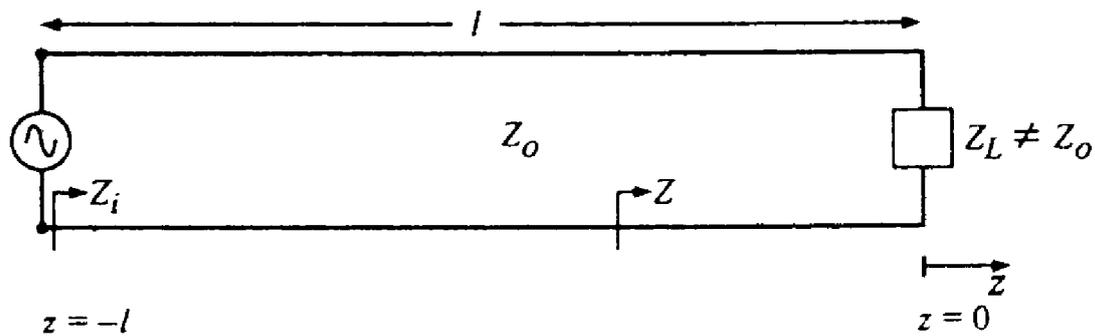


Fig. 2-19 Línea de longitud  $l$  terminada con una carga arbitraria en  $z = 0$ .

$$Z_i = Z_0 \frac{Ae^{\gamma l} + Be^{-\gamma l}}{Ae^{\gamma l} - Be^{-\gamma l}} \quad (2-32)$$

Ahora bien, en  $z = 0$ , donde está la carga  $Z_L$ , de la ec. (2-31) se obtiene:

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_0 \frac{A+B}{A-B} = Z_0 \frac{1+B/A}{1-B/A}$$

$$Z_L - \frac{B}{A} Z_L = Z_0 + \frac{B}{A} Z_0$$

de donde

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \rho \quad (2-33)$$

Al cociente  $B/A$  se le da el nombre de *coeficiente de reflexión* en el punto de carga. Se designa por la letra  $\rho$  y generalmente es una cantidad compleja.

Si el numerador y el denominador de la ec. (2-32) se dividen entre  $Ae^{\gamma l}$ , se tiene:

$$Z_i = Z_0 \frac{1 + (B/A)e^{-2\gamma l}}{1 - (B/A)e^{-2\gamma l}}$$

y como  $B/A = \rho$ :

$$Z_i = Z_0 \frac{1 + \rho e^{-2\gamma l}}{1 - \rho e^{-2\gamma l}} \quad (2-34)$$

Esta ecuación permite calcular la impedancia de entrada de la línea si se conocen su longitud, su impedancia característica, la constante de propagación  $\gamma$  y el coeficiente de reflexión  $\rho$  en el punto donde está la carga. Otra ecuación alternativa, en función de la impedancia de carga en lugar del coeficiente de reflexión, se puede obtener usando la *ec.* (2-33) y escribiendo la *ec.* (2-32) como:

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_0 \frac{\frac{B(Z_L + Z_0)e^{\gamma l}}{(Z_L - Z_0)} + \frac{B e^{-\gamma l}}{1}}{\frac{B(Z_L + Z_0)e^{\gamma l}}{(Z_L - Z_0)} - \frac{B e^{-\gamma l}}{1}} \\ &= Z_0 \frac{(Z_L + Z_0)e^{\gamma l} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma l}}{(Z_L + Z_0)e^{\gamma l} - (Z_L - Z_0)e^{-\gamma l}} \\ &= Z_0 \frac{Z_L (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) + Z_0 (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})}{Z_L (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) + Z_0 (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})} \\ &= Z_0 \frac{2Z_L \cosh \gamma l + 2Z_0 \sinh \gamma l}{2Z_0 \cosh \gamma l + 2Z_L \sinh \gamma l} \quad (1) \end{aligned}$$

y al dividir numerador y denominador entre  $2 \cosh \gamma l$ , queda finalmente:

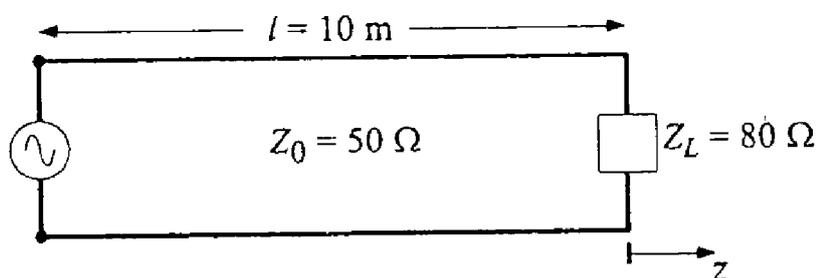
$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma l} \quad (2-35)$$

Recuérdese que las *ecs.* (2-34) y (2-35) dan el mismo resultado y se utilizan indistintamente, de acuerdo con los datos que se conozcan. Asimismo, si hubiese alguna preferencia especial por alguna de ellas, siempre es fácil emplear la *ec.* (2-33) para encontrar el dato que faltase.

<sup>(1)</sup> Véase el Apéndice 1.

**Ejercicio 2-6** Se tiene una línea de transmisión sin pérdidas, con papel como dieléctrico ( $\epsilon_r = 3$ ), que trabaja a una frecuencia de 300 MHz. La longitud de la línea es de 10 m y su impedancia característica es igual a  $50 \Omega$ . Al final de la línea se conecta una carga cuya impedancia es de  $80 \Omega$ . Encuentre el coeficiente de reflexión para voltajes en la carga y la impedancia de entrada de la línea. Calcule también la impedancia que se vería a distancias de  $\lambda/2$  y  $\lambda$ , medidas desde el generador hacia la carga.

*Solución*



El coeficiente de reflexión para voltajes se obtiene empleando la ec. (2-33):

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{80 - 50}{80 + 50} = 0.23 = 0.23 \angle 0^\circ$$

Para calcular la impedancia de entrada se empleará la ec. (2-34), con  $l = 10 \text{ m}$  y  $\alpha = 0$ :

$$Z_i = Z_0 \frac{1 + \rho e^{-2\gamma l}}{1 - \rho e^{-2\gamma l}} = 50 \frac{1 + 0.23 e^{-j20\beta}}{1 - 0.23 e^{-j20\beta}}$$

Antes de realizar la operación final es preciso calcular  $\beta$ :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\omega}{\beta}$$

Despejando a  $\beta$  y sustituyendo valores:

$$\beta = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8 \sqrt{3}}{3 \times 10^8} = 10.88 \text{ rad/m}$$

Y sustituyendo ahora el valor de  $\beta$  en la expresión para  $Z_i$ :

$$Z_i = 50 \frac{1 + 0.23e^{-j217.6}}{1 - 0.23e^{-j217.6}} = 34.73 + j12.45 \Omega = 36.9 \angle 19.7^\circ \Omega$$

Para poder calcular la impedancia vista en  $z = -l + \lambda/2$  y  $z = -l + \lambda$ , y si se desea conocer cada posición en metros, es necesario obtener primero el valor de  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1 \text{ m}}{\sqrt{3}} = 0.577 \text{ m}$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el espacio libre a la misma frecuencia de 300 MHz.

De las ecs. (2-31) y (2-33) se tiene que:

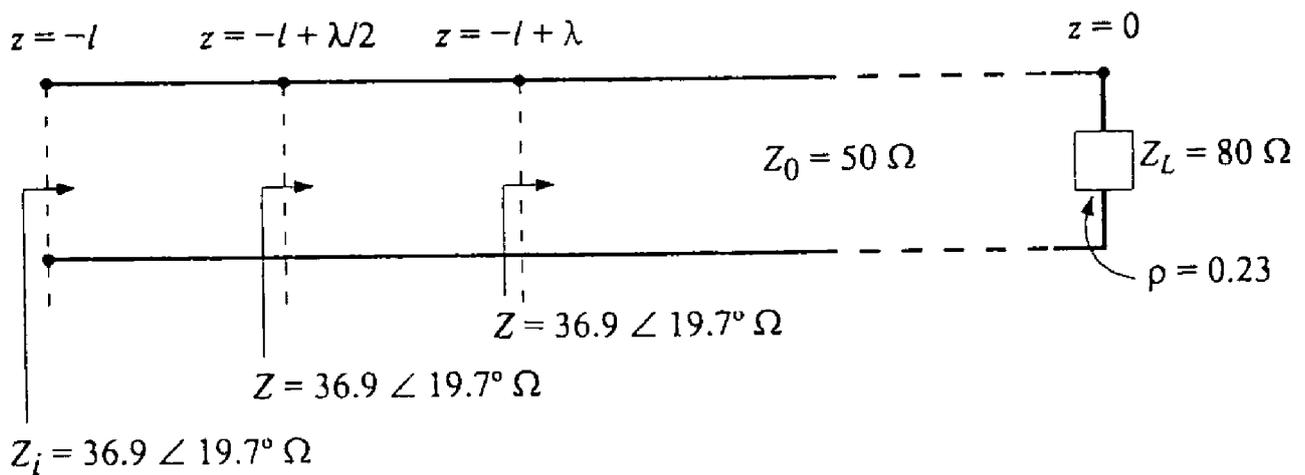
$$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-\gamma z} + \rho e^{\gamma z}}{e^{-\gamma z} - \rho e^{\gamma z}} = Z_0 \frac{1 + \rho e^{2\gamma z}}{1 - \rho e^{2\gamma z}}$$

Por lo tanto, sustituyendo los valores especificados de  $z$ :

$$\begin{aligned} Z|_{z=-l+\lambda/2} &= 50 \frac{1 + 0.23e^{j2\beta(-10+0.2885)}}{1 - 0.23e^{j2\beta(-10+0.2885)}} = 50 \frac{1 + 0.23e^{-j211.32}}{1 - 0.23e^{-j211.32}} \\ &= 34.73 + j12.45 \Omega = 36.9 \angle 19.7^\circ \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z|_{z=-l+\lambda} &= 50 \frac{1 + 0.23e^{j2\beta(-10+0.577)}}{1 - 0.23e^{j2\beta(-10+0.577)}} = 50 \frac{1 + 0.23e^{-j205.04}}{1 - 0.23e^{-j205.04}} \\ &= 34.73 + j12.45 \Omega = 36.9 \angle 19.7^\circ \Omega \end{aligned}$$

Gráficamente, los resultados obtenidos pueden mostrarse de la manera siguiente:



El hecho de que las tres impedancias valgan lo mismo no es ninguna sorpresa, debido al carácter periódico de las funciones trigonométricas involucradas en las fórmulas empleadas. Sin embargo, nótese que el valor de  $Z$  parece repetirse cada  $\lambda/2$ , en lugar de cada vez que se avance  $\lambda$ . Esto se debe a que en una línea desacoplada la onda total que se forma tiene un período igual a  $\lambda/2$ , como se verá con más detalle en la sección 2.9.

## 2.5 Impedancia de entrada de una línea terminada en corto circuito

Como caso particular se considerará ahora una línea en cuyo extremo final se tiene un corto circuito (Fig. 2-20). Al evaluar la ec. (2-29) en la carga, donde  $z = 0$ , y dado que el voltaje en ese punto vale cero, se obtiene:

$$V(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A \quad (\rho = -1)$$

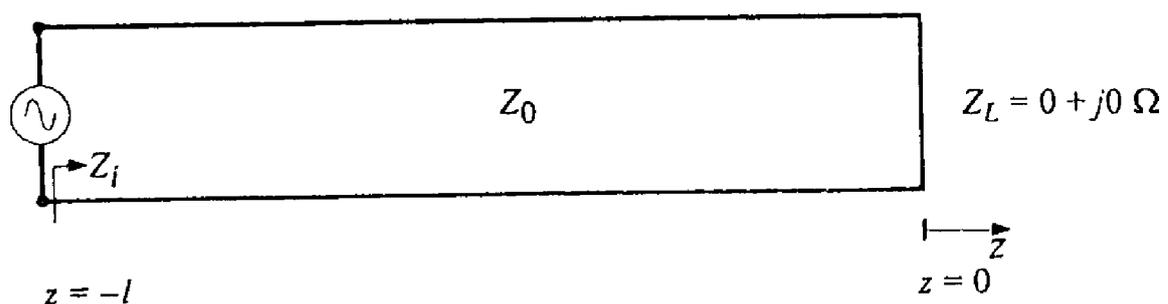


Fig. 2-20 Línea terminada en corto circuito.

Utilizando la relación anterior, las expresiones para  $V(z)$  e  $I(z)$  pueden reescribirse, a partir de las ecs. (2-29) y (2-30), de la siguiente forma:

$$V(z) = Ae^{-\gamma z} - Ae^{\gamma z} = A(e^{-\gamma z} - e^{\gamma z})$$

$$I(z) = \frac{Ae^{-\gamma z}}{Z_0} + \frac{Ae^{\gamma z}}{Z_0} = \frac{A}{Z_0}(e^{-\gamma z} + e^{\gamma z})$$

La impedancia de entrada vista por el generador puede obtenerse sustituyendo  $z = -l$  y tomando el cociente tradicional de las dos relaciones anteriores:

$$Z_{i,c.c.} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = Z_0 \frac{A(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})}{A(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})}$$

$$= Z_0 \frac{1 - e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}} = Z_0 \tanh \gamma l \quad (2-36)$$

Esta expresión también pudo haberse obtenido directamente de la ec. (2-35), sustituyendo  $Z_L = 0$ , pero a continuación se verá por qué conviene realizar el rápido cálculo anterior por separado.

En la práctica, medir la impedancia de entrada de una línea corta terminada en circuito cerrado permite medir indirectamente los parámetros  $R$  y  $L$  de la línea. Si la línea es lo suficientemente corta, de tal modo que  $|\gamma l| \ll 1$ , los exponenciales en la ec. (2-36) pueden expandirse para simplificar a la misma en forma muy aproximada:

$$Z_{i,c.c.} = Z_0 \frac{1 - e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}} \approx Z_0 \frac{1 - (1 - 2\gamma l)}{1 + (1 - 2\gamma l)}$$

$$= Z_0 \frac{2\gamma l}{2 - 2\gamma l} = Z_0 \frac{1}{\frac{1}{\gamma l} - 1}$$

$$\approx Z_0 \gamma l \quad (2-37)$$

Ahora bien, si las ecs. (2-15) y (2-22) se multiplican:

$$\gamma Z_0 = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}$$

o sea que

$$\gamma Z_0 = R + j\omega L \quad (2-38)$$

Finalmente, igualando la ec. (2-37) con la ec. (2-38):

$$Z_{i,c.c.} = l(R + j\omega L) \quad (2-39)$$

## 2.6 Impedancia de entrada de una línea terminada en circuito abierto

El desarrollo a seguir para analizar una línea terminada en circuito abierto (Fig. 2-21) es similar al de la sección anterior, en el que se trató la línea terminada en circuito cerrado.

Para un circuito abierto al final de la línea se tendrá una corriente igual a cero. Por lo tanto, a partir de la ec. (2-30):

$$I(0) = (1/Z_0)(A - B) = 0 \Rightarrow A = B \quad (\rho = 1)$$

por lo que

$$V(z) = A(e^{-\gamma z} + e^{\gamma z})$$

$$I(z) = \frac{A}{Z_0}(e^{-\gamma z} - e^{\gamma z})$$

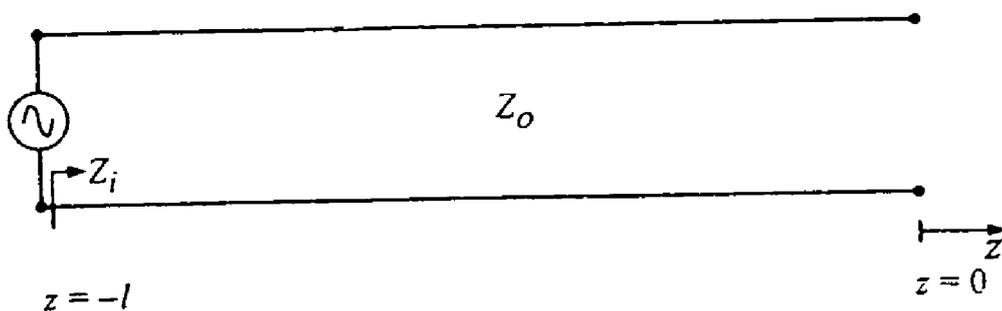


Fig. 2-21 Línea terminada en circuito abierto.

y la impedancia vista en  $z = -l$  será:

$$Z_{i,c.a.} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = Z_0 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}$$

$$Z_{i,c.a.} = Z_0 \frac{1 + e^{-2\gamma l}}{1 - e^{-2\gamma l}} = Z_0 \coth \gamma l \quad (2-40)$$

Si se supone nuevamente que la línea es corta ( $|\gamma l| \ll 1$ ), la ec. (2-40) se puede reducir a:

$$Z_{i,c.a.} \approx \frac{Z_0}{\gamma l} \quad (2-41)$$

Retomando las ecs. (2-15) y (2-22), pero ahora dividiendo a  $\gamma$  entre  $Z_0$ :

$$\frac{\gamma}{Z_0} = \frac{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}}{\sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}}$$

o sea que

$$\frac{\gamma}{Z_0} = G + j\omega C \quad (2-42)$$

e igualando la ec. (2-41) con la ec. (2-42):

$$Z_{i,c.a.} = \frac{1}{l(G + j\omega C)} \quad (2-43)$$

Por lo tanto, la impedancia de entrada medida a cierta frecuencia angular  $\omega$  para una línea corta de longitud  $l$  terminada en circuito abierto permite obtener los parámetros  $G$  y  $C$  de la línea.

**Ejercicio 2-7** Se desean estimar los valores de la impedancia característica y la constante de propagación para un cable de 1 km de longitud, a una frecuencia de 1 kHz. Con tal fin, se efectuaron mediciones de la impedancia de entrada terminando primero al cable en circuito abierto y después en circuito cerrado. Las lecturas obtenidas fueron, respectivamente,  $-j100 \Omega$  y  $j50 \Omega$ . ¿Cuánto valen aproximadamente  $Z_0$  y  $\gamma$ ?

### Solución

A 1 kHz, en el aire,  $\lambda_0 = 3 \times 10^8 / 10^3 = 3 \times 10^5 = 300,000$  m. Si se considera que  $\alpha = 0$ , entonces  $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$  y:

$$|j\beta_0 l| = \frac{2\pi}{300,000} \times 1000 = 0.02 \ll 1$$

Pero esta condición es diferente en el cable, porque el dieléctrico no es aire. Sin embargo, aun si  $\beta$  se duplicase y valiese  $2\beta_0$ , la condición  $|j\beta l|$  también se cumpliría en el cable y entonces se pueden emplear las aproximaciones dadas por las *ecs.* (2-39) y (2-43):

$$Z_{i,c.c.} = j50 = l(R + j\omega L)$$

$$Z_{i,c.a.} = -j100 = \frac{1}{l(G + j\omega C)}$$

Se concluye que  $R \approx 0$  y  $G \approx 0$ , y que:

$$50 = l\omega L \Rightarrow L = \frac{50}{10^3 \times 2\pi \times 10^3} = 7.96 \text{ } \mu\text{H/m}$$

$$100 = \frac{1}{l\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{10^2 \times 10^3 \times 2\pi \times 10^3} = 1.59 \text{ nF/m}$$

Finalmente, usando las *ecs.* (2-15) y (2-22):

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\beta = j\omega \sqrt{LC}$$

$$= j2\pi \times 10^3 \sqrt{7.96 \times 10^{-6} \times 1.59 \times 10^{-9}} = j7 \times 10^{-4} \text{ rad/m}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{7.96 \times 10^{-6}}{1.59 \times 10^{-9}}} = 70.75 \ \Omega$$


---

## 2.7 Obtención de $Z_0$ y $\gamma$ a partir de las impedancias de entrada medidas en líneas terminadas en corto circuito y circuito abierto

Es interesante notar que si se multiplican las ecs. (2-36) y (2-40), sin importar la longitud que pueda tener la línea, se obtiene:

$$(Z_{i,c.c.})(Z_{i,c.a.}) = Z_0^2$$

Por lo tanto, si se miden ambas impedancias de entrada, la impedancia característica de la línea se calcula fácilmente como:

$$Z_0 = \sqrt{(Z_{i,c.c.})(Z_{i,c.a.})} \quad (2-44)$$

La constante de propagación  $\gamma$  también puede obtenerse a partir de ambas mediciones, pero el procedimiento es un poco más laborioso, como se ve a continuación.

Al dividir la ec. (2-36) entre la ec. (2-40):

$$\frac{Z_{i,c.c.}}{Z_{i,c.a.}} = \tanh^2 \gamma l = \frac{(1 - e^{-2\gamma l})^2}{(1 + e^{-2\gamma l})^2}$$

despejando a  $e^{-2\gamma l}$ :

$$\sqrt{\frac{Z_{i,c.c.}}{Z_{i,c.a.}}} [1 + e^{-2\gamma l}] = [1 - e^{-2\gamma l}]$$

$$e^{-2\gamma l} \left[ \sqrt{\frac{Z_{i,c.c.}}{Z_{i,c.a.}}} + 1 \right] = 1 - \sqrt{\frac{Z_{i,c.c.}}{Z_{i,c.a.}}}$$

por lo que, finalmente:

$$e^{-2\gamma l} = \frac{1 - \sqrt{\frac{Z_{i,c.c.}}{Z_{i,c.a.}}}}{1 + \sqrt{\frac{Z_{i,c.c.}}{Z_{i,c.a.}}}} \quad (2-45)$$

El resultado de la ec. (2-45) es una cantidad compleja, que puede representarse en forma polar como  $r e^{j\theta}$ , y como  $\gamma = \alpha + j\beta$ , entonces es posible escribir las igualdades siguientes:

$$e^{-2\alpha l} e^{-2j\beta l} = r e^{j(\theta \pm 2\pi n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Igualando las magnitudes:

$$e^{-2\alpha l} = r \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2l} (\ln r) \quad (2-46)$$

e igualando las fases:

$$\beta = -\frac{1}{2l} (\theta \pm 2\pi n) \quad (2-47)$$

en donde  $\theta$  está en radianes y el valor correcto de  $n$  depende de la longitud de la línea en términos de  $\lambda$ .

**Ejercicio 2-8** Un cable telefónico de 20 km de longitud fue sometido a pruebas de medición con terminaciones en corto circuito y circuito abierto, a una frecuencia de 1.5 kHz. Los valores obtenidos para la impedancia de entrada fueron:

$$\begin{aligned} Z_{i,c.c.} &= 1382 \angle 5.1^\circ \quad \Omega \\ Z_{i,c.a.} &= 421 \angle -26.3^\circ \quad \Omega \end{aligned}$$

Calcule a partir de estos datos: a) la impedancia característica, b) la constante de propagación, y c) los cuatro parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $G$  y  $C$  de la línea, a la frecuencia en que se hicieron las mediciones.

### Solución

a) Obtención de  $Z_0$ . Para ello se utiliza la ec. (2-44):

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{(1382 \angle 5.1^\circ)(421 \angle -26.3^\circ)} = 749.75 - j140.31 \quad \Omega \\ &= 762.77 \angle -10.6^\circ \quad \Omega \end{aligned}$$

b) Obtención de  $\gamma$ . A partir de la ec. (2-45):

$$\begin{aligned} e^{-2\gamma l} &= \frac{1 - \sqrt{\frac{1382 \angle 5.1^\circ}{421 \angle -26.3^\circ}}}{1 + \sqrt{\frac{1382 \angle 5.1^\circ}{421 \angle -26.3^\circ}}} = \frac{1 - \sqrt{3.2826 \angle 31.4^\circ}}{1 + \sqrt{3.2826 \angle 31.4^\circ}} \\ &= -0.294 - j0.126 = 0.319 \angle -156.75^\circ \end{aligned}$$

Primero se obtendrá  $\alpha$ , igualando las magnitudes en ambos miembros, de acuerdo con la ec. (2-46):

$$\alpha = -\frac{1}{2 \times 20 \times 10^3} \ln(0.319) = 0.0000285 \text{ Np/m}$$

Si se utiliza la conversión a decibeles dada por la ec. (2-20):

$$\alpha = (8.686)(0.0000285) = 0.0002476 \text{ dB/m}$$

Para encontrar la constante de fase  $\beta$ , hay que decidir sobre el valor de  $n$  en la ec. (2-47). Como primer paso, es necesario convertir la longitud de la línea a dimensiones eléctricas, es decir, en términos de  $\lambda$ . Como no se conoce el material dieléctrico del cable, se supondrá que  $\lambda$  es cercana a  $\lambda_0$ , la longitud de onda a la velocidad de la luz:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{1.5 \times 10^3} = 200 \text{ km}$$

Evidentemente, la línea de 20 km es corta ( $\ll \lambda_0$ ), por lo que el producto  $\beta l$  debe estar en el rango  $0 < \beta l < 2\pi$ , al no haber longitud suficiente para que se cumpla un ciclo. De acuerdo con lo anterior, y por observación de la ec. (2-47),  $n$  se debe tomar igual a 1, con el signo negativo, para que se tenga

$$2\beta l = 2\pi - \theta$$

Ahora todo es cuestión de sustituir los valores de  $l$  y de  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2 \times 20 \times 10^3} \left[ 2\pi - \underbrace{\frac{(-156.75^\circ) \times \pi}{180^\circ}}_{\text{radianes}} \right] \\ &= \frac{2\pi + 2.736}{2 \times 20 \times 10^3} = 0.000225 \text{ rad/m} \end{aligned}$$

De manera que:

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0.0000285 + j0.000225 = 0.000334 \angle 42.33^\circ$$

c) Para encontrar los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $G$  y  $C$  del cable pueden emplearse las ecs. (2-38) y (2-42), **sin** ninguna restricción sobre la longitud de la línea, ya que son expresiones generales:

$$\begin{aligned} \gamma Z_0 &= R + j\omega L \\ \frac{\gamma}{Z_0} &= G + j\omega C \end{aligned}$$

Sustituyendo entonces los valores obtenidos para  $Z_0$  y  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 R + j\omega L &= (0.334 \times 10^{-3} \angle 42.33^\circ)(762.8 \angle -10.6^\circ) \\
 &= 0.255 \angle 31.73^\circ = 0.217 + j0.134
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
 R &= 0.217 \quad \Omega/\text{m} \\
 L &= \frac{0.134}{2\pi f} = \frac{0.134}{2\pi \times 1.5 \times 10^3} = 14.2 \quad \mu\text{H}/\text{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G + j\omega C &= \frac{(0.334 \times 10^{-3} \angle 42.33^\circ)}{(762.8 \angle -10.6^\circ)} = 0.438 \times 10^{-6} \angle 52.93^\circ \\
 &= 0.264 \times 10^{-6} + j0.35 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
 G &= 0.264 \quad \mu\text{S}/\text{m} \\
 C &= \frac{0.35 \times 10^{-6}}{2\pi f} = \frac{0.35 \times 10^{-6}}{2\pi \times 1.5 \times 10^3} = 37.1 \quad \text{pF}/\text{m}
 \end{aligned}$$

## 2.8 Reactancia de entrada y aplicaciones de líneas sin pérdidas terminadas en corto circuito y en circuito abierto

Además de ser utilizada para transmitir información, como lo es en la mayor parte de los casos, una línea puede servir también como elemento de un circuito. En el rango de frecuencias de UHF (300 MHz a 3 GHz) es difícil fabricar elementos de circuitos con parámetros concentrados, pues la longitud de onda varía entre 10 cm y 1 m. En estos casos, se pueden diseñar segmentos de transmisión que produzcan una impedancia inductiva o capacitiva, y que se puedan utilizar para acoplar una carga arbitraria con la línea principal y efectuar la máxima transferencia de potencia posible. A estas altas frecuencias, las pérdidas en una línea se pueden considerar como

despreciables, por lo que se refiere al cálculo de  $Z_0$ , de  $\gamma$  y de la impedancia vista en cualquier punto de la línea, puesto que  $\omega L = 2\pi fL \gg R$  y  $\omega C = 2\pi fC \gg G$ . Al hacer estas consideraciones, las *ecs.* (2-15) y (2-22) se reducen a:

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (2-48)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2-49)$$

Por lo tanto,  $\alpha \approx 0$  y  $Z_0$  es real (puramente resistiva).

En lo que se refiere a la impedancia de entrada vista desde el generador en dirección a la carga, la ecuación general (2-35) se reduce, haciendo  $\gamma = j\beta$ , a:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh j\beta l}{Z_0 + Z_L \tanh j\beta l}$$

y como\*  $\tanh j\beta l = (0 + j \tan \beta l)/(1 + 0) = j \tan \beta l$ , la ecuación anterior queda finalmente de la forma:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad (2-50)$$

en donde  $l$  es la longitud total de la línea.

A continuación procederemos a utilizar la *ec.* (2-50) para los dos casos especiales en que la línea termina en corto circuito o en circuito abierto.

### a) Línea terminada en corto circuito

En este caso,  $Z_L = 0$  y la *ec.* (2-50) se reduce a:

$$Z_i = Z_0 \frac{jZ_0 \tan \beta l}{Z_0} = jZ_0 \tan \beta l = jX_i \quad (2-51)$$

### b) Línea terminada en circuito abierto

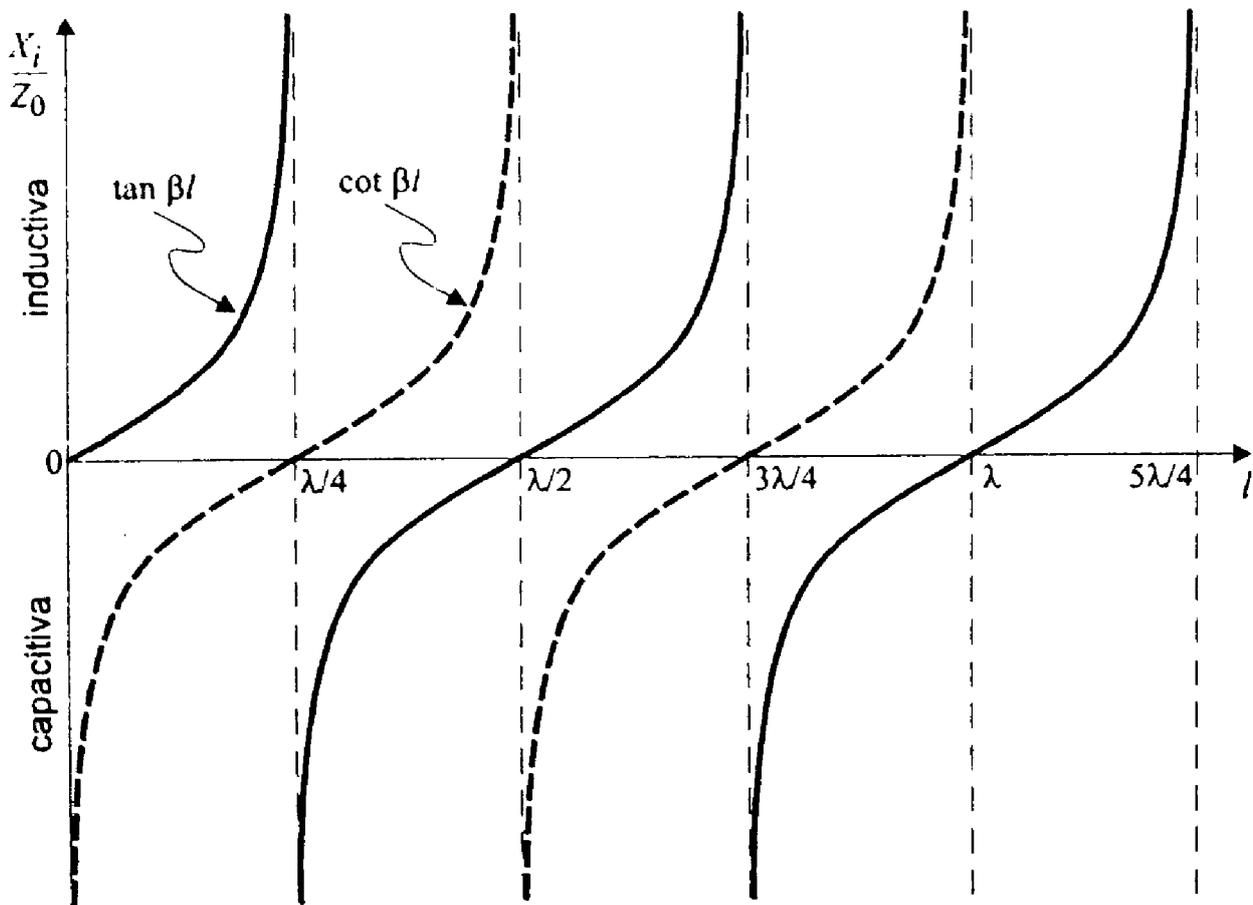
Ahora  $Z_L \rightarrow \infty$  y la *ec.* (2-50) toma la forma:

---

\* Véase el Apéndice 1.

$$\begin{aligned}
 Z_i &= Z_0 \frac{1 + (jZ_0 \tan \beta l)/Z_L}{(Z_0/Z_L) + j \tan \beta l} \\
 &= \frac{Z_0}{j \tan \beta l} = -jZ_0 \cot \beta l = jX_i \quad (2-52)
 \end{aligned}$$

Las ecs. (2-51) y (2-52) muestran que cuando una línea sin pérdidas de longitud arbitraria  $l$  termina en corto circuito o en circuito abierto, la impedancia de entrada es puramente reactiva ( $jX_i$ ). En cualquiera de los dos casos, la reactancia puede ser inductiva o capacitiva, dependiendo del valor de  $\beta l$ , ya que las funciones  $\tan \beta l$  y  $\cot \beta l$  pueden tomar valores positivos o negativos. En la Fig. 2-22 se muestra la forma de la gráfica de la reactancia de entrada en función de la longitud eléctrica de la línea para los dos tipos de terminación.



**Fig. 2-22** Curvas típicas de la reactancia de entrada, normalizada con relación a  $Z_0$ , de una línea de longitud  $l$  terminada en corto circuito (—) y en circuito abierto (---).

En la práctica, no es posible obtener una línea realmente terminada en circuito abierto (impedancia de carga infinita), ya que existen problemas de radiación en el extremo abierto, especialmente a altas frecuencias, y acoplamiento con objetos cercanos. Sin embargo, es interesante notar que las reactancias de entrada de líneas terminadas en circuito abierto o en corto circuito son idénticas cuando sus longitudes difieren entre sí por un múltiplo impar de  $\lambda/4$ . En la Fig. 2-23 se muestran algunas secciones de línea, ilustrando su equivalencia con una inductancia o una capacitancia, a una frecuencia determinada (compárese con los datos de la Fig. 2-22).

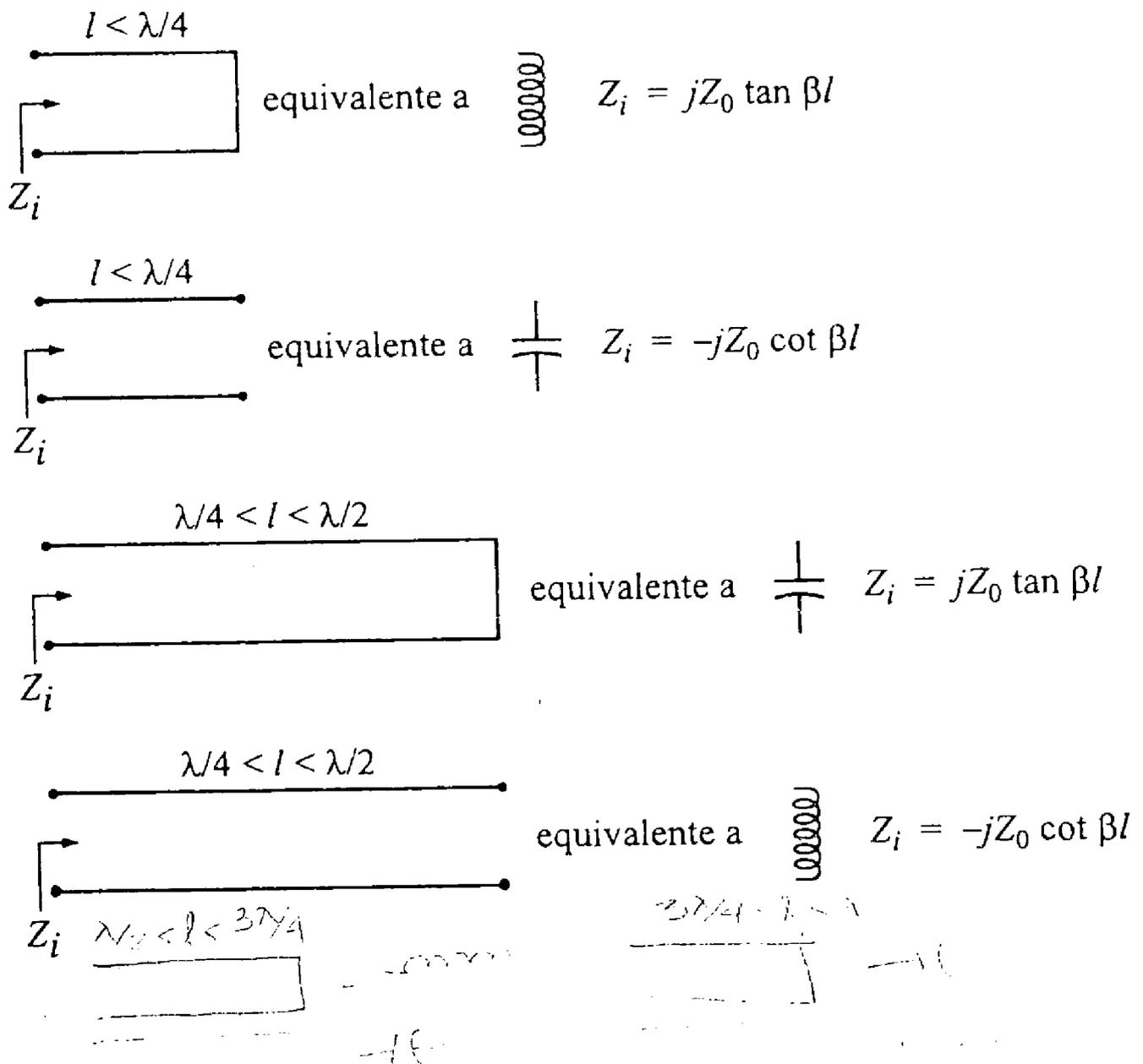


Fig. 2-23 Impedancia reactiva de entrada de algunas secciones de líneas terminadas en corto circuito o circuito abierto y sus equivalentes como componentes de un circuito.

**Ejercicio 2-9** Se tiene una línea sin pérdidas de longitud  $0.2\lambda$  a cierta frecuencia de trabajo y está terminada en corto circuito. Sus parámetros  $L$  y  $C$  son, respectivamente,  $0.2 \mu\text{H/m}$  y  $35 \text{ pF/m}$ . Calcule su impedancia de entrada.

*Solución*

La impedancia característica de la línea se calcula a partir de la ec. (2-49):

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0.2 \times 10^{-6}}{35 \times 10^{-12}}} = 75.6 \ \Omega$$

Utilizando la ec. (2-51) se encuentra la impedancia de entrada de la línea:

$$Z_i = jZ_0 \tan \beta l = j(75.6) \tan [(\beta)(0.2\lambda)]$$

y como  $\lambda = 2\pi/\beta$ :

$$Z_i = j(75.6) \tan [(\beta)(0.2)(2\pi/\beta)] = j(75.6) \tan 0.4\pi = j232.67 \ \Omega$$

**Ejercicio 2-10** Encuentre la longitud necesaria (en metros) de una línea terminada en circuito abierto para que a 600 MHz presente a la entrada una reactancia capacitiva de  $-j20 \ \Omega$ . Considere  $\epsilon_r = 1$  y los mismos parámetros  $L$  y  $C$  del ejercicio anterior.

*Solución*

A 600 MHz, la longitud de onda es igual a 0.5 m, considerando que el dieléctrico es el aire. De la ec. (2-52):

$$Z_i = -jZ_0 \cot \beta l = -j20 \ \Omega$$

Del ejercicio anterior,  $L = 0.2 \mu\text{H/m}$  y  $C = 35 \text{ pF/m}$ , por lo que  $Z_0 = 75.6 \ \Omega$ . De manera que, sustituyendo:

$$-j20 = -j(75.6) \cot \left[ \frac{2\pi}{0.5} l \right]$$

de donde

$$(4\pi)l = \text{angcot } 0.26455 \Rightarrow l = 10.44 \text{ cm}$$


---

## 2.9 Líneas desacopladas y ondas estacionarias

En la sección 2.4 se demostró cómo calcular la impedancia de entrada de una línea desacoplada, terminada con una carga arbitraria (véase también la Fig. 2-19), y se obtuvo la ec. (2-35):

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma l} \quad =(2-35)$$

En esa misma sección también se introdujo el concepto de *coeficiente de reflexión\**, que en el punto final de la línea, donde está la carga, está definido por:

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad =(2-33)$$

Asimismo, en la sección 2.8, ya se indicó que cuando la atenuación de una línea es muy baja (pocas pérdidas) y la frecuencia de transmisión es muy alta, entonces  $\omega L \gg R$  y  $\omega C \gg G$ . Esto permite aproximar a  $Z_0$  y  $\gamma$  como:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad =(2-49)$$

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad =(2-48)$$

De aquí en adelante, a menos que se indique otra cosa, se continuará el estudio del comportamiento de las líneas suponiendo que  $\alpha = 0$  y que se transmite a altas frecuencias. Este enfoque es muy válido en la práctica, en aquellos casos donde la longitud total de la línea es, cuando mucho, de unas

---

\* En algunos otros libros de texto, este coeficiente se representa por la letra  $\Gamma$ .

cuantas longitudes de onda y la atenuación acumulada es muy baja. Bajo este criterio, en la misma sección 2.8, se demostró que la *ec.* (2-35) se reduce a:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad = (2-50)$$

Vale la pena recordar que la *ec.* (2-50), derivada a su vez de la *ec.* (2-31), no sólo permite calcular la impedancia de entrada de la línea, sino también la impedancia  $Z$  vista en **cualquier punto de la línea**, sustituyendo en lugar de  $l$  la distancia que hay entre dicho punto y la carga (véase nuevamente la Fig. 2-19).

Si  $\rho = 0$ , la línea estará acoplada, porque  $Z_L = Z_0$  en la *ec.* (2-33). Pero si  $\rho \neq 0$ , la línea estará desacoplada. El objetivo de un ingeniero en transmisión es lograr que  $\rho$  sea muy pequeña, de modo que la potencia transferida a la carga sea máxima. Por lo general, un “acoplamiento” se considera aceptable si  $|\rho| \leq 0.2$ , con lo cual se entrega a la carga aproximadamente el 96% de la potencia incidente. Veamos ahora cómo es la onda de voltaje total a lo largo de una línea desacoplada.

Para cualquier  $z$ , la magnitud del voltaje total se puede obtener a partir de la *ec.* (2-29) como:

$$|V(z)| = |Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z}| = \left| Ae^{-\gamma z} \left( 1 + \frac{B}{A} e^{2\gamma z} \right) \right|$$

El cociente  $B/A$  es igual al coeficiente de reflexión en la carga, dado por la *ec.* (2-33). En general, este coeficiente  $\rho$  es complejo y se representará ahora como:

$$\rho_v = \frac{B}{A} = |\rho_v| e^{j\theta} \quad |\rho_v| \leq 1 \quad (2-53)$$

Por lo tanto, suponiendo que  $\alpha = 0$ , la expresión para la magnitud del voltaje total toma la forma:

$$\begin{aligned}
 |V(z)| &= \left| A e^{-j\beta z} \left| 1 + \rho_v e^{j2\beta z} \right| \right| = A \left| 1 + \rho_v e^{j2\beta z} \right| \\
 &= A \left| 1 + |\rho_v| e^{j\theta} e^{j2\beta z} \right| \\
 &= A \left| \underbrace{1 + |\rho_v| \cos(2\beta z + \theta)}_{\text{parte real}} + \underbrace{j|\rho_v| \sin(2\beta z + \theta)}_{\text{parte imaginaria}} \right| \\
 &= A \left[ 1 + 2|\rho_v| \cos(2\beta z + \theta) + \underbrace{|\rho_v|^2 \cos^2(2\beta z + \theta) + |\rho_v|^2 \sin^2(2\beta z + \theta)}_{=|\rho_v|^2} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

y finalmente:

$$|V(z)| = A \sqrt{1 + 2|\rho_v| \cos(2\beta z + \theta) + |\rho_v|^2} \quad (2-54)$$

La función dada por la ec. (2-54) se puede graficar fácilmente. Considerando que  $-1 \leq \cos(2\beta z + \theta) \leq 1$ , los valores extremos de dicha función son:

$$\begin{aligned}
 \text{cuando } \cos(2\beta z + \theta) = 1 \quad \Rightarrow \quad |V(z)| &= A \sqrt{1 + 2|\rho_v| + |\rho_v|^2} \\
 &= A(1 + |\rho_v|)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{cuando } \cos(2\beta z + \theta) = -1 \quad \Rightarrow \quad |V(z)| &= A \sqrt{1 - 2|\rho_v| + |\rho_v|^2} \\
 &= A(1 - |\rho_v|)
 \end{aligned}$$

De allí que la onda de voltaje total tenga como valor máximo  $A(1 + |\rho_v|)$  y como mínimo un valor igual a  $A(1 - |\rho_v|)$ . Su gráfica se muestra en la Fig. 2-24.

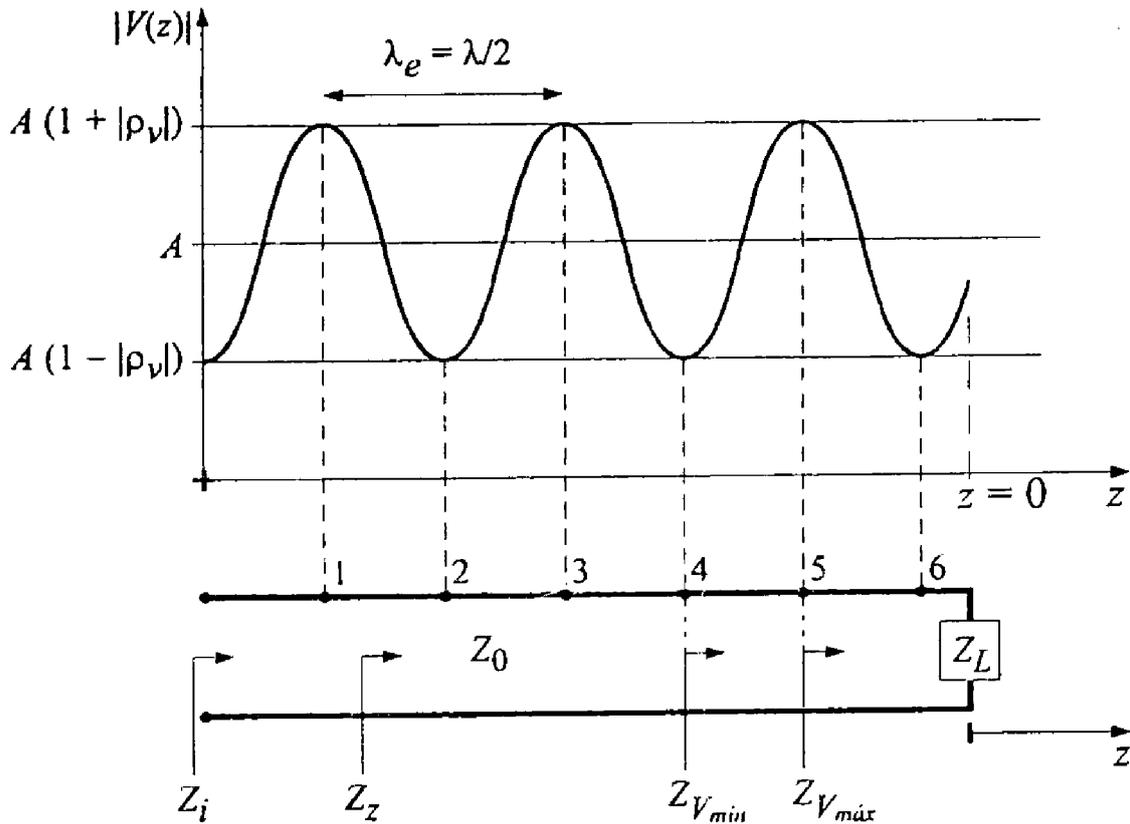


Fig. 2-24 Línea desacoplada ( $Z_L \neq Z_0$ ) y su patrón típico de onda de voltaje total (patrón de onda estacionaria).

El patrón de la onda total de voltaje es periódico y se denomina *patrón de onda estacionaria*, pero resulta interesante (y siempre debe recordarse) que su período es diferente al de la onda incidente. La onda incidente y la reflejada tienen un período de  $\beta z$ , mientras que la onda total (superposición de las dos ondas anteriores) tiene un período de  $2\beta z$ . Es decir, que si la onda incidente tiene una longitud de onda  $\lambda$ , entonces la onda estacionaria tendrá una longitud de onda  $\lambda_e = \lambda/2$ . En la Fig. 2-24, los puntos 1, 3 y 5 son aquellos donde la onda estacionaria de voltaje es máxima, y en los puntos 2, 4 y 6 el voltaje es mínimo. La posición de estos puntos máximos y mínimos a lo largo de la línea depende del grado de desacoplamiento, es decir, del ángulo  $\theta$  del coeficiente de reflexión en la carga, dado por la ec. (2-53).

La onda total de corriente tiene una forma similar, pero su valor es máximo cuando el voltaje es mínimo, y viceversa. El procedimiento para deducir la expresión matemática de esta onda estacionaria de corriente es el mismo

que se utilizó aquí para el voltaje. El lector inquieto puede fácilmente demostrar que la expresión a la que se llega es:

$$|I(z)| = \frac{A}{Z_0} \sqrt{1 - 2|\rho_v| \cos(2\beta z + \theta) + |\rho_v|^2} \quad (2-55)$$

Al cociente del voltaje máximo de la onda estacionaria sobre el voltaje mínimo se le da el nombre de relación de onda estacionaria o ROE\*:

$$ROE = VSWR = \frac{V_{m\acute{a}x.}}{V_{m\acute{i}n.}} = \frac{1 + |\rho_v|}{1 - |\rho_v|} \quad (2-56)$$

Ahora bien, si se efectúa el cociente del voltaje máximo sobre la corriente mínima (ambos están en el mismo punto sobre la línea), es obvio que se obtendrá el valor de la impedancia vista en ese punto, hacia la carga (Fig. 2-24):

$$\begin{aligned} Z|_{V_{m\acute{a}x.}} &= \frac{|V(z)|_{m\acute{a}x.}}{|I(z)|_{m\acute{i}n.}} = \frac{A(1 + |\rho_v|)}{\frac{A}{Z_0}(1 - |\rho_v|)} \\ &= Z_0 \frac{1 + |\rho_v|}{1 - |\rho_v|} = (Z_0)(VSWR) \end{aligned} \quad (2-57)$$

Similarmente, para un punto donde el voltaje sea mínimo, la corriente será máxima y se tendrá:

$$\begin{aligned} Z|_{V_{m\acute{i}n.}} &= \frac{|V(z)|_{m\acute{i}n.}}{|I(z)|_{m\acute{a}x.}} = \frac{A(1 - |\rho_v|)}{\frac{A}{Z_0}(1 + |\rho_v|)} \\ &= Z_0 \frac{1 - |\rho_v|}{1 + |\rho_v|} = \frac{Z_0}{VSWR} \end{aligned} \quad (2-58)$$

Como  $Z_0$  es real, ambas impedancias dadas por las ecs. (2-57) y (2-58) también son puramente resistivas.

---

\* En inglés se le denomina *VSWR*, que son las siglas de *Voltage Standing-Wave Ratio*. Asimismo, en español, algunos se refieren a este concepto como COE o coeficiente de onda estacionaria.

De la ec. (2-56) se desprende que la magnitud del coeficiente de reflexión de voltajes se puede calcular si se conoce el  $VSWR$ . Es decir, no es necesario conocer el valor absoluto de los voltajes, sino solamente su proporción o  $VSWR$ . Este dato se puede medir indirectamente en un laboratorio con un detector de onda estacionaria, como el mostrado en la Fig. 2-25. Por lo general, se utiliza una línea coaxial rígida, con una ranura longitudinal en su parte superior, por la cual se desliza una pequeña sonda de campo eléctrico. El campo eléctrico medido es proporcional al voltaje entre los conductores de la línea, y su cociente máximo a mínimo se despliega en la carátula de un medidor de  $VSWR$ .

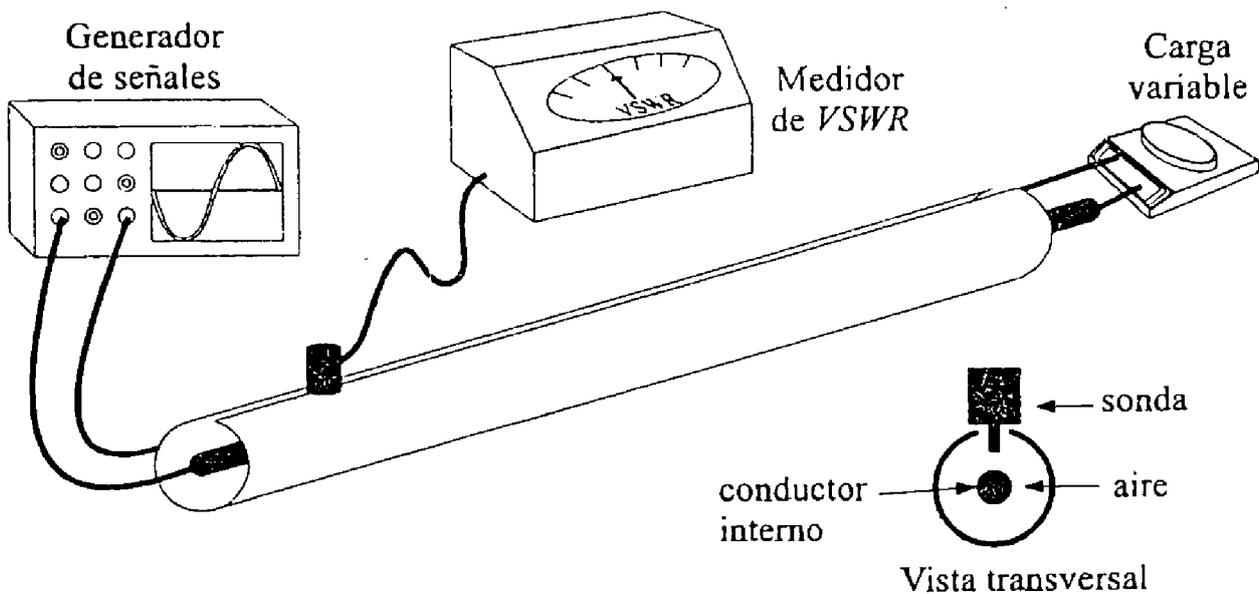


Fig. 2-25 Línea coaxial ranurada y medidor de  $VSWR$  o  $ROE$ .

Conocido el  $VSWR$ , de la ec. (2-56) se puede despejar  $|\rho_v|$ :

$$1 + |\rho_v| = VSWR - (VSWR)|\rho_v|$$

$$|\rho_v| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} \quad (2-59)$$

Antes de efectuar algunos ejercicios para reforzar los conocimientos anteriores, conviene observar detalladamente el comportamiento del coeficiente de reflexión a lo largo de la línea. La ec. (2-53) establece que su fase está dada por  $\theta$  en la carga ( $z = 0$ ). Pero también es posible definirlo para otros puntos de la línea, a partir de la ec. (2-29):

$$\rho_v(z) = \frac{V_r(z)}{V_i(z)} = \frac{Be^{\gamma z}}{Ae^{-\gamma z}} = \left(\frac{B}{A}\right)e^{2\gamma z} \quad (2-60)$$

En la carga, cuando  $z = 0$ ,  $\rho_v(0) = B/A = \rho$  dada por las ecs. (2-33) y (2-53). De manera que la ec. (2-60) se puede reescribir, con  $\gamma = j\beta$ , como:

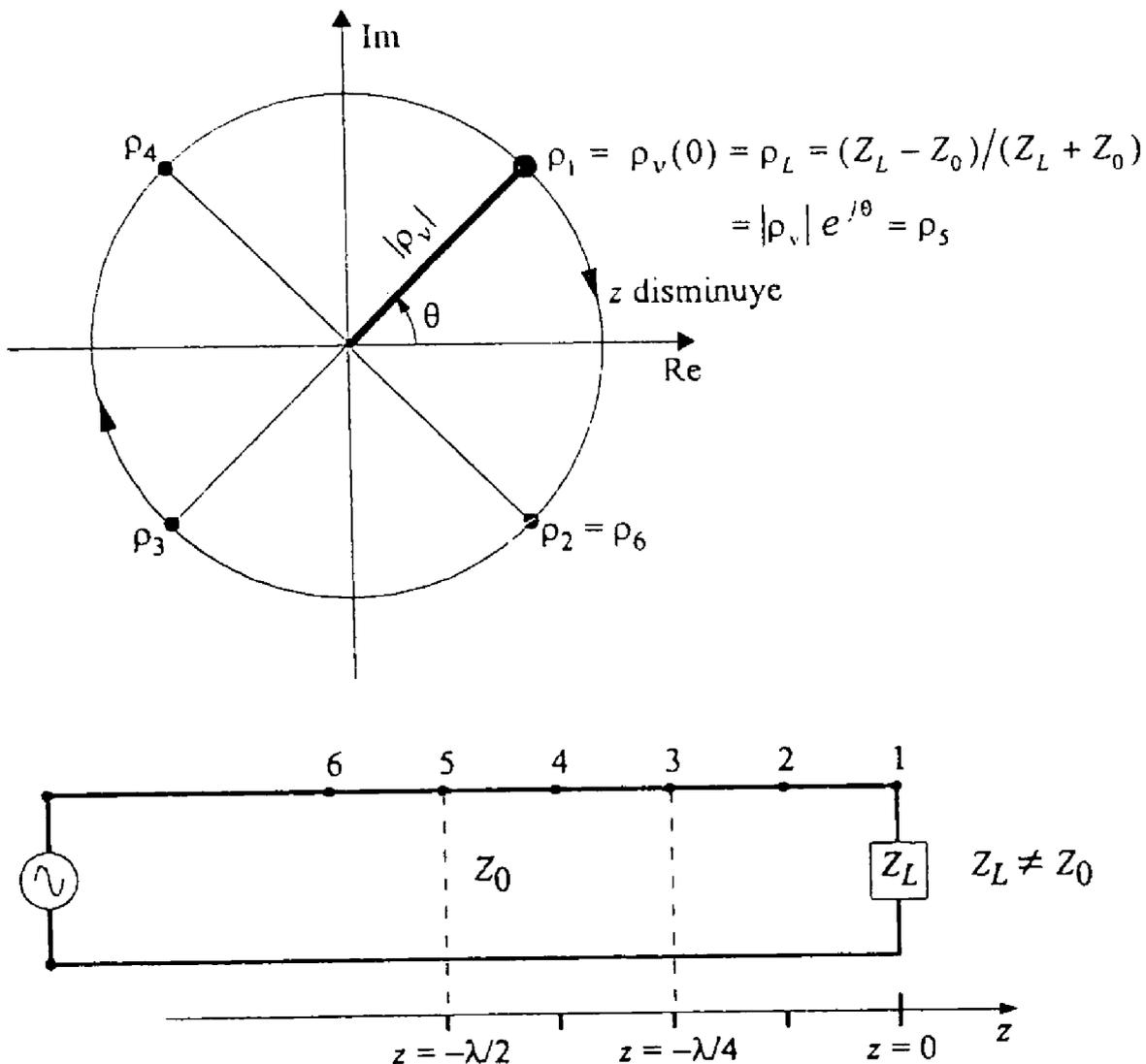


Fig. 2-26 Línea desacoplada y lugar geométrico del coeficiente de reflexión asociado con la onda estacionaria de voltaje. El desplazarse hacia el generador equivale a girar en el sentido de las manecillas del reloj en el plano complejo.

$$\rho_v(z) = \rho e^{j2\beta z} = |\rho_v| e^{j\theta} e^{j2\beta z} = |\rho_v| e^{j(2\beta z + \theta)} \quad (2-61)$$

De la ecuación anterior se deduce que el lugar geométrico en el plano complejo del coeficiente de reflexión de voltajes es un círculo de radio  $|\rho_v|$  y se repite cada vez que se avanza  $\lambda_e$  o  $\lambda/2$  a lo largo de la línea (Fig. 2-26).

**Ejercicio 2-11** Un cable coaxial con impedancia característica de  $100 \Omega$  y aire como dieléctrico en su interior tiene conectada una carga de  $80 + j50 \Omega$ . Obtenga el coeficiente de reflexión en donde está la carga y a 25 cm medidos desde la carga hacia el generador. Calcule también el valor del *VSWR* y las posiciones del primer mínimo y del primero y segundo máximos de voltaje, desde la carga hacia el generador; indique estas distancias en centímetros. Considere que la frecuencia de operación es de 300 MHz.

### Solución

En la carga, el coeficiente de reflexión está dado por la ec. (2-33):

$$\rho(z=0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{80 + j50 - 100}{80 + j50 + 100} = 0.288 \angle 96.28^\circ$$

La frecuencia es 300 MHz y  $\lambda = 1$  m; por lo tanto, para la onda estacionaria,  $\lambda_e = 1 \text{ m}/2 = 50$  cm. Retroceder 25 cm, desde la carga hacia el generador, equivale a girar media vuelta en el plano complejo, en el sentido de las manecillas del reloj (Fig. 2-26). Por lo tanto, en este punto, el coeficiente de reflexión sería:

$$\rho_v = 0.288 \angle 96.28^\circ + 180^\circ = 0.288 \angle 276.28^\circ$$

El *VSWR* está dado por la ec. (2-56):

$$ROE = VSWR = \frac{1 + |\rho_v|}{1 - |\rho_v|} = \frac{1.288}{0.712} = 1.81$$

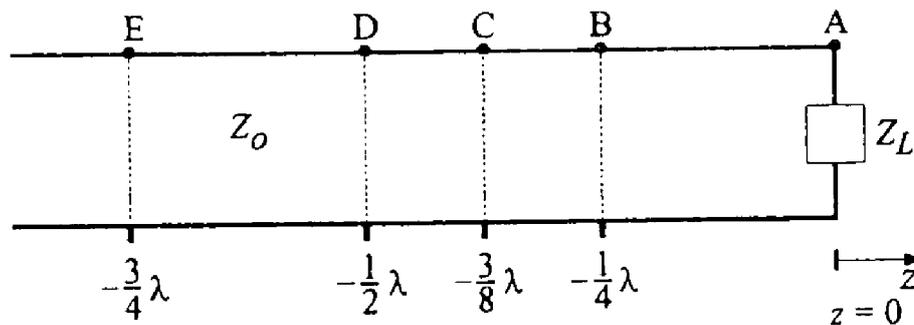


de donde

$$z_{1,\min.} = \left( \frac{-180^\circ - 96.28^\circ}{4(180^\circ)} \right) \lambda = -0.384\lambda = -38.4 \text{ cm}$$

Los resultados obtenidos pueden interpretarse de acuerdo con la figura de la página anterior.

**Ejercicio 2-12** Una línea de transmisión con  $Z_0 = 100 \Omega$  está terminada en un carga con  $Z_L = 120 + j80 \Omega$ . Encuentre el coeficiente de reflexión de voltajes a lo largo de la línea en los puntos mostrados en la figura siguiente.



*Solución*

El punto A corresponde a la carga. De la ec. (2-33):

$$\rho_v(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{120 + j80 - 100}{120 + j80 + 100} = 0.35 \angle 56^\circ$$

El punto B se halla en  $z = -\lambda/4$ . El ángulo del coeficiente de reflexión se obtiene de la ec. (2-61):

$$\text{ángulo coef.} = 2\beta z + \theta = (2) \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \left( -\frac{\lambda}{4} \right) + 56^\circ = -124^\circ$$

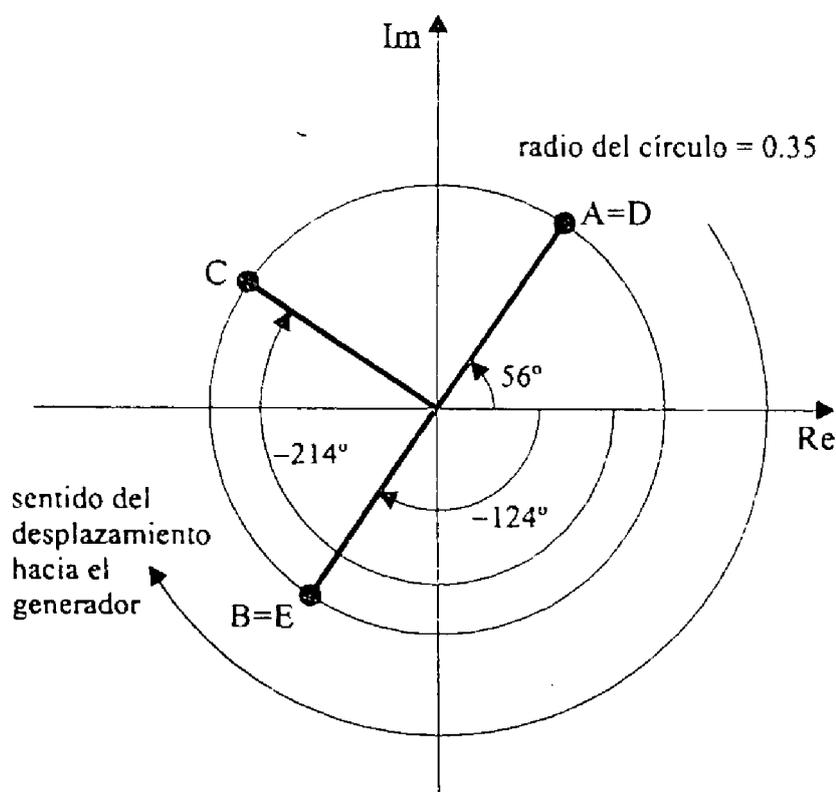
De la misma forma, para los puntos restantes:

$$\text{punto C: ángulo coef.} = \left( \frac{4\pi}{\lambda} \right) \left( -\frac{3}{8}\lambda \right) + 56^\circ = -214^\circ$$

$$\text{punto D: ángulo coef.} = \left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)\left(-\frac{1}{2}\lambda\right) + 56^\circ = 56^\circ$$

$$\text{punto E: ángulo coef.} = \left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)\left(-\frac{3}{4}\lambda\right) + 56^\circ = -124^\circ$$

Estos resultados quedarían representados en el plano complejo de la siguiente forma:



Nótese que los puntos separados  $\lambda/2$  entre sí tienen el mismo coeficiente de reflexión y su posición es la misma en el plano complejo.

**Ejercicio 2-13** Determine el valor del  $VSWR$  que tendría una línea cualquiera, sin pérdidas, cuando al final se tuviese: a) una carga con impedancia igual a la característica, b) un corto circuito, y c) un circuito abierto.

*Solución*

Cuando  $Z_L = Z_0$ , la línea está acoplada y no se refleja nada. Por lo tanto,  $\rho_v = 0$ .

Cuando la línea termina en un corto circuito, el voltaje total en ese punto vale cero. Por lo tanto,  $\rho_v = -1$ .

Cuando la línea termina en circuito abierto, el voltaje total en ese punto es máximo. Por lo tanto,  $\rho_v = +1$ .

Sustituyendo los tres valores anteriores de  $\rho_v$  en la ec. (2-56) se tiene:

$$ROE = VSWR = \frac{1 + |\rho_v|}{1 - |\rho_v|}$$

Tipo de carga	$\rho_v(0)$	VSWR
$Z_L = Z_0$	0	1
$Z_L = 0$ (corto circuito)	-1	$\rightarrow \infty$
$Z_L \rightarrow \infty$ (circuito abierto)	1	$\rightarrow \infty$

**Ejercicio 2-14** Grafique la forma de las ondas estacionarias de voltaje y corriente para una línea cualquiera sin pérdidas, cuando ésta termina en: a) una resistencia pura mayor que  $Z_0$ , b) una resistencia pura menor que  $Z_0$ , c) un circuito cerrado, y d) un circuito abierto.

*Solución*

Partiendo de las ecs. (2-54) y (2-55), y tomando como referencia la Fig. 2-24, que corresponde a una línea terminada en una carga compleja arbitraria, se deduce lo siguiente:

a)  $Z_L = R_L; \quad Z_0 = R_0; \quad R_L > R_0$

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \text{real positivo} < 1$$

Por lo tanto, el ángulo del coeficiente de reflexión es igual a  $0^\circ$  y la función de voltaje dada por la ec. (2-54) es máxima cuando  $z = 0$ , es decir, en la carga. En cambio, la corriente dada por la ec. (2.55) es mínima en la carga.

b)  $Z_L = R_L; \quad Z_0 = R_0; \quad R_L < R_0$

$$\rho = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \text{real negativo} > -1$$

Ahora  $\theta = -180^\circ$  y la situación es contraria a la del inciso a). Es decir, en la carga se tiene corriente máxima y voltaje mínimo.

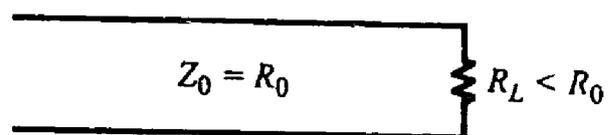
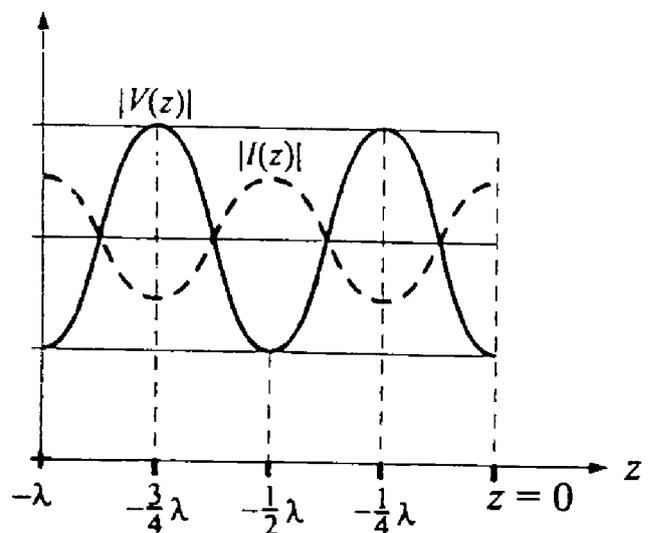
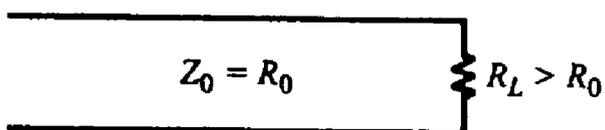
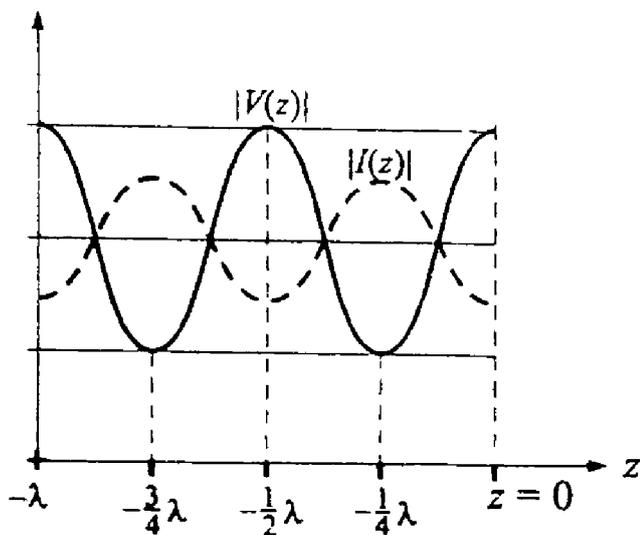
c)  $Z_L = 0$  (circuito cerrado)

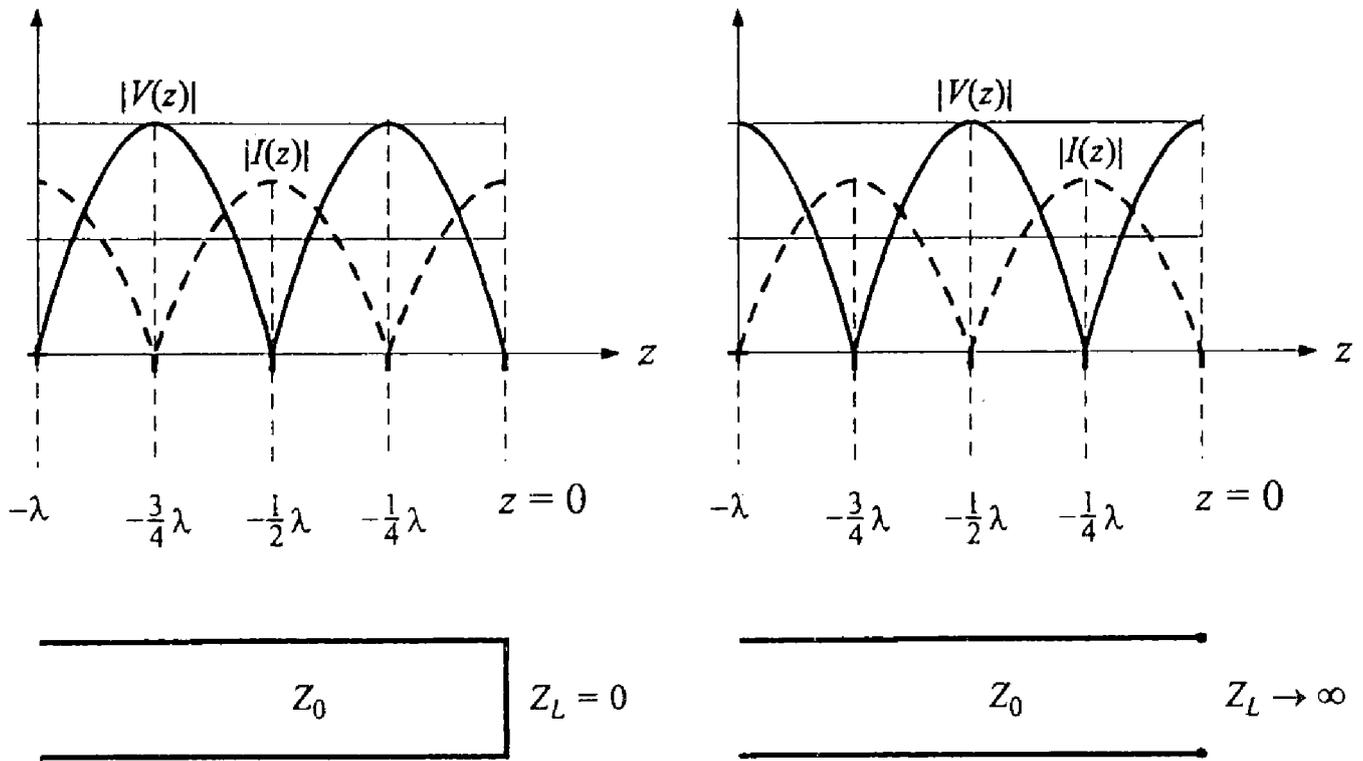
Aquí  $\rho = -1 = 1 \angle 180^\circ$  y la situación es similar a la del inciso b), con corriente máxima y voltaje mínimo en la carga. Pero este voltaje mínimo en la carga ahora vale cero.

d)  $Z_L \rightarrow \infty$  (circuito abierto)

Como  $\rho = 1 = 1 \angle 0^\circ = \text{real positivo}$ , se tiene algo parecido al inciso a), con voltaje máximo y corriente mínima en la carga. Pero esta corriente mínima vale cero.

En base a lo anterior, las gráficas correspondientes para los cuatro casos analizados toman las formas siguientes:





**Ejercicio 2-15** Se efectuaron mediciones con una línea rígida ranurada de  $Z_0 = 75 \Omega$  y terminada en una carga compleja. El primer máximo de voltaje se encontró a 15 cm de la carga, y el segundo máximo se detectó al avanzar otros 20 cm hacia el generador. El  $VSWR$  leído fue igual a 2.5. Encuentre: a) el valor de la impedancia vista en el primer máximo de voltaje, b) la posición del primer máximo de corriente desde la carga hacia el generador, c) la frecuencia a la que se hicieron las mediciones, d) la magnitud del coeficiente de reflexión de voltajes, y e) el valor de la impedancia de la carga.

### Solución

a) La impedancia vista en cualquier máximo de voltaje es real y está dada por la ec. (2-57):

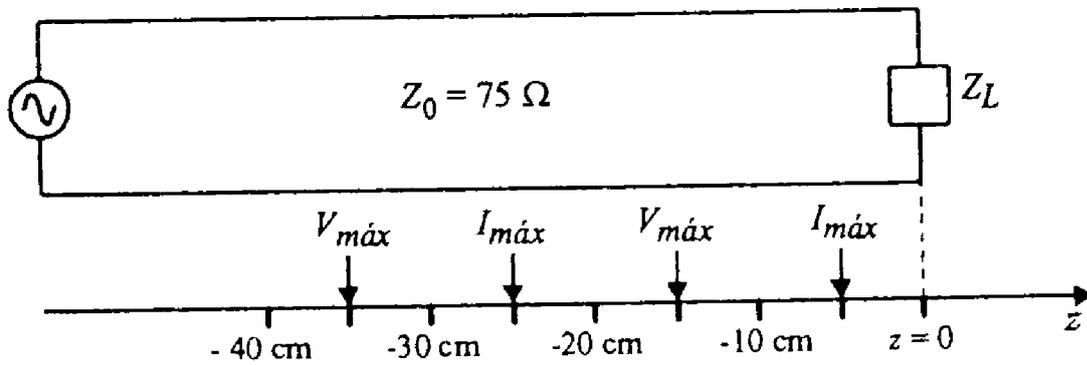
$$Z|_{V_{\max}} = (Z_0)(VSWR) = (75)(2.5) = 187.5 \Omega$$

b) En  $z = -15$  cm se tiene el primer máximo de voltaje.

En  $z = -15 - 20 = -35$  cm se tiene el siguiente máximo de voltaje.

Por lo tanto, centrado entre ambos máximos debe haber un máximo de corriente, es decir, en  $z = -15 - 10 = -25$  cm. También hay otro máximo

de corriente hacia la carga en  $z = -25 + 20 = -5$  cm. El siguiente máximo de corriente se saldría de la línea, por lo cual la posición pedida es  $z = -5$  cm.



c) La longitud de onda a la frecuencia de trabajo es el doble de la distancia que hay entre dos puntos máximos de voltaje o de corriente de la onda estacionaria. Es decir,  $\lambda = (2)(20 \text{ cm}) = 40 \text{ cm}$ . De allí que la frecuencia a la que se hicieron las mediciones es, considerando aire en el interior de la línea rígida:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{0.4} = 750 \text{ MHz}$$

d) De la ec. (2.59) se tiene que:

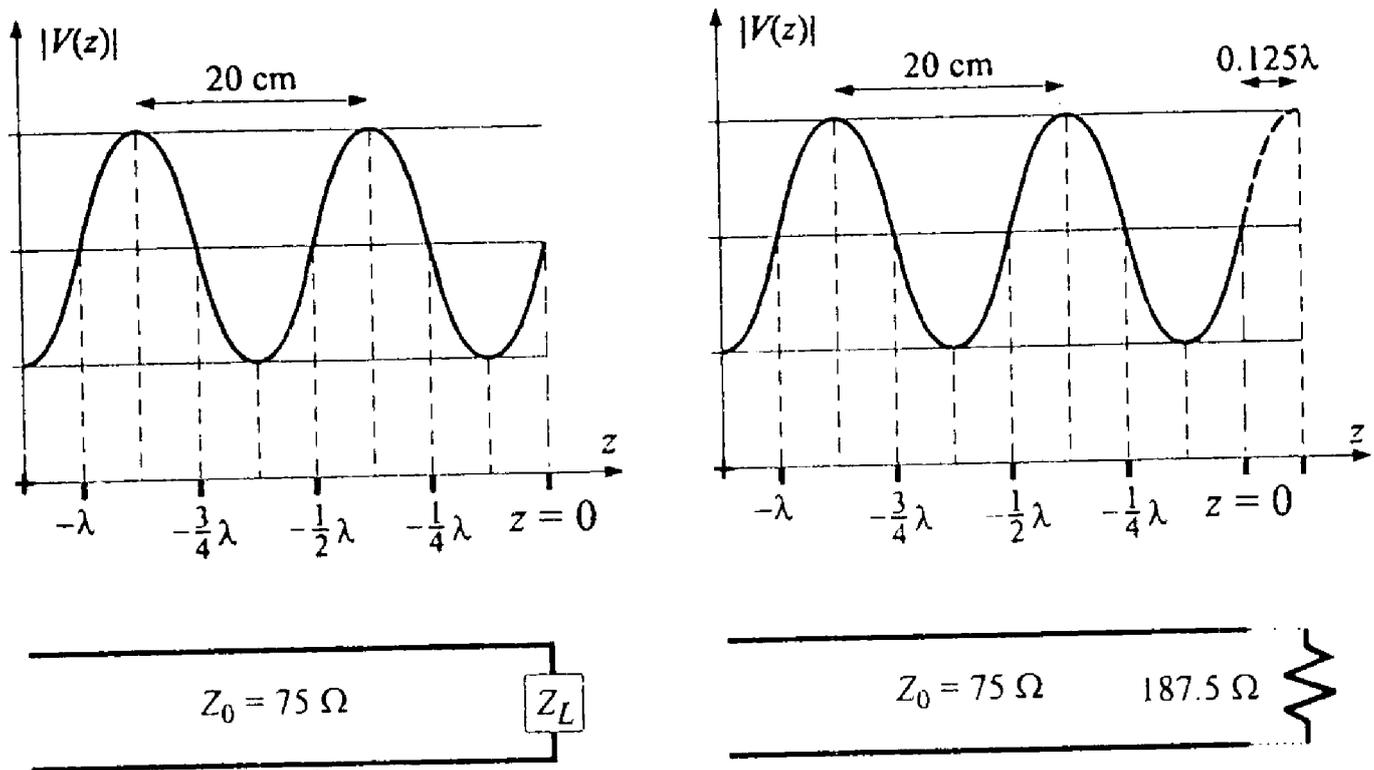
$$|\rho_v| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} = \frac{2.5 - 1}{2.5 + 1} = 0.43$$

e) La función dada por la ec. (2-54) es máxima en  $z = -15 \text{ cm} = -0.375\lambda$ , de modo que el radicando también debe ser máximo. O sea que:

$$\cos(2\beta z + \theta) = 1 = \cos \left[ \underbrace{(2) \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) (-0.375\lambda) + \theta}_{= 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots} \right]$$

por lo tanto:

$$-1.5\pi + \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 270^\circ = -90^\circ$$



El coeficiente de reflexión en la carga es entonces igual a  $0.43 \angle -90^\circ$ , y finalmente la impedancia de la carga se puede obtener usando la ec. (2-33):

$$\rho_{carga} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0.43 \angle -90^\circ$$

$$Z_L - Z_0 = (-j0.43)(Z_L + Z_0)$$

$$Z_L(1 + j0.43) = 75(1 - j0.43)$$

$$Z_L = 51.6 - j54.4 \Omega$$

La carga buscada tiene una resistencia de  $51.6 \Omega$  y una reactancia capacitiva de  $54.4 \Omega$ . La gráfica de la onda estacionaria de voltaje sería como se muestra en la gráfica izquierda de la figura.

Como verificación del resultado anterior para  $Z_L$ , se puede emplear la ec. (2-50), prolongando imaginariamente la gráfica de la onda estacionaria de voltaje hasta obtener otro máximo (gráfica derecha de la figura), en donde la impedancia sería real e igual a  $187.5 \Omega$  (resultado del inciso a).

En la carga ( $z = 0$ ) se vería una “impedancia de entrada” dada por:

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan \beta l}{Z_0 + j Z_L \tan \beta l} \quad \left( \begin{array}{l} \text{nótese que aquí} \\ Z_L = 187.5 \, \Omega \text{ y} \\ l = 0.125\lambda \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Impedancia buscada} &= Z_i = 75 \left( \frac{187.5 + j 75 \tan 45^\circ}{75 + j (187.5) \tan 45^\circ} \right) \\ \text{al final de la línea real} &= (75) \left( \frac{187.5 + j 75}{75 + j 187.5} \right) = 51.6 - 54.4 \, \Omega \end{aligned}$$

Este resultado coincide con el encontrado anteriormente.

Como regla, cuando la carga es capacitiva, la onda estacionaria de voltaje es ascendente en donde termina la línea, lo cual concuerda con la gráfica y los resultados obtenidos en el ejercicio anterior. En contraparte, si la carga es inductiva, al final de la línea se tendrá una onda de voltaje descendente.

## 2.10 Reflexiones en el generador

Hasta ahora, sólo se ha puesto atención en los efectos que la carga conectada al final de una línea tiene sobre esta misma. Por ejemplo, se ha visto cómo calcular la impedancia que se ve en cualquier punto de la línea, dada por la *ec. (2-50)*, y se han analizado las formas de las ondas estacionarias de voltaje y corriente que se producen, así como las características del coeficiente de reflexión ( $\rho_v$ ) y de la relación de onda estacionaria (*ROE* o *VSWR*). Sin embargo, los efectos del generador que alimenta a la línea no han sido considerados, salvo en el caso del Ejercicio 2-5, correspondiente a una línea acoplada con su carga ( $Z_L = Z_0$ ).

El generador es la fuente original de las ondas de voltaje y corriente que viajan a lo largo de la línea hacia la carga. Dicho generador tiene una cierta impedancia interna,  $Z_g$ , que se combina en serie con la impedancia de entrada

de la línea cuando ambos se conectan (Fig. 2-27). Esta impedancia de entrada  $Z_i$  será igual a  $Z_0$  si la línea está acoplada con la carga ( $Z_L = Z_0$ ); pero si no hay acoplamiento,  $Z_i$  será función de la combinación entre  $Z_0$  y  $Z_L$  dada por la ec. (2-50):

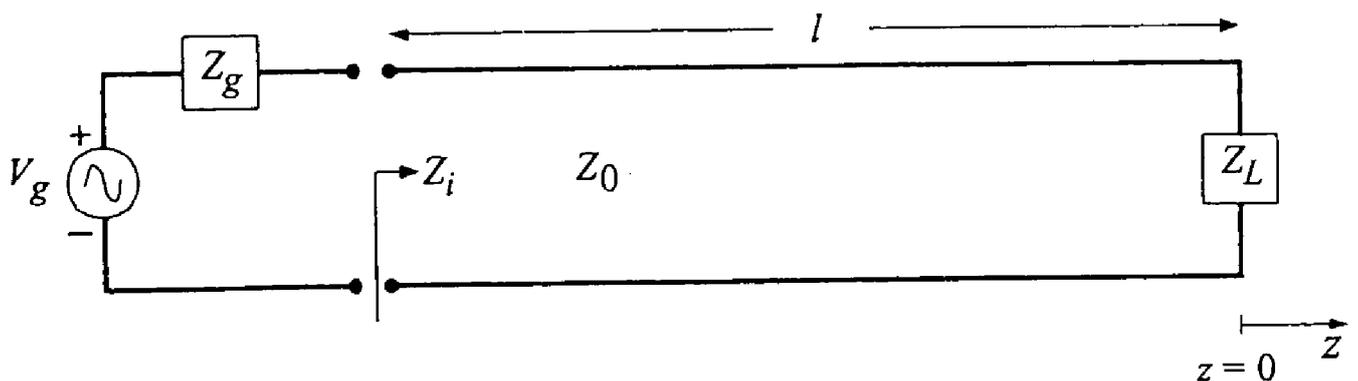
$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad = (2-50)$$

La impedancia de entrada también se puede calcular con la ec. (2-34), en función del coeficiente de reflexión de voltajes en la carga, que para una línea sin pérdidas toma la forma:

$$Z_i = Z_0 \frac{1 + \rho e^{-j2\beta l}}{1 - \rho e^{-j2\beta l}} \quad (2-62)$$

Se observa que el término  $\rho e^{-j2\beta l}$  es el coeficiente de reflexión trasladado al punto inicial de la línea, dado también por la ec. (2-61), para  $z = -l$ .

Supóngase ahora que una onda reflejada en la carga (debido a que  $Z_L \neq Z_0$ ) se dirige de regreso hacia el generador. Si  $Z_g$  (que se convierte en la nueva carga) es diferente de  $Z_0$ , habrá un coeficiente de reflexión en la entrada de la línea, dando origen a una segunda onda que se dirigirá hacia la carga  $Z_L$ , y así sucesivamente. Este proceso de rebote en ambos extremos de la línea podría durar indefinidamente, y la onda estacionaria final sería la superposición de todas las ondas que viajasen en ambas direcciones. Tal



**Fig. 2-27** Una línea de transmisión alimentada por un generador  $V_g$  con impedancia interna  $Z_g$ .

efecto se reduce en la práctica, debido a que la atenuación de la línea,  $\alpha$ , no vale precisamente cero; es decir, la amplitud de las ondas reflejadas o *ecos* disminuye de acuerdo con  $e^{-\alpha l}$  en cada sentido. Adicionalmente, es común que el valor de  $Z_g$  sea muy cercano o igual al de  $Z_0$  (generador **acoplado** con la línea); esta selección de  $Z_0$  hace que la onda reflejada en el generador sea despreciable o casi nula. Bajo esta condición, la onda estacionaria total sólo tendrá los dos términos indicados en la ec. (2-29).

En conclusión, la conexión ideal para que se le entregue máxima potencia a la línea y no haya reflexiones es que  $Z_g = Z_0 = Z_L$ . La potencia entregada a la línea,  $P_i$ , es la mitad de la potencia total original, y si  $\alpha \approx 0$ , la potencia entregada a la carga es prácticamente igual a  $P_i$ .

## 2.11 La matriz de transmisión

Supóngase que no hay reflexión en el generador y que las ondas totales de voltaje y corriente en una línea están dadas por las ecs. (2-29) y (2-30):

$$V(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{+\gamma z} \quad = (2-29)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} [Ae^{-\gamma z} - Be^{+\gamma z}] \quad = (2-30)$$

La línea puede ser considerada como una red de dos puertos (Fig. 2-28), y los voltajes y corrientes evaluados en ambos extremos serían:

$$V_L = V(0) = A + B$$

$$I_L = I(0) = \frac{1}{Z_0} (A - B)$$

$$V_i = V(-l) = Ae^{\gamma l} + Be^{-\gamma l}$$

$$I_i = I(-l) = \frac{1}{Z_0} (Ae^{\gamma l} - Be^{-\gamma l})$$

Estas cuatro ecuaciones se pueden manipular algebraicamente con el fin de obtener expresiones matemáticas para las variables de entrada en función

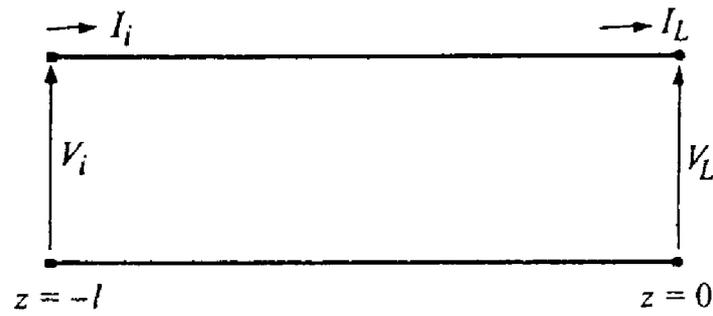


Fig. 2-28 La línea considerada como una red de dos puertos.

de las variables de salida, o viceversa. De las primeras dos ecuaciones se tiene que:

$$\begin{aligned}
 A = V_L - B \Rightarrow I_L = \frac{1}{Z_0}(V_L - B - B) &\Rightarrow B = \frac{1}{2}(V_L - I_L Z_0) \\
 &\Rightarrow A = \frac{1}{2}(V_L + I_L Z_0)
 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores encontrados de  $A$  y  $B$  en las dos ecuaciones restantes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V_i &= \left[ \frac{1}{2}V_L + \frac{1}{2}I_L Z_0 \right] e^{\gamma l} + \left[ \frac{1}{2}V_L - \frac{1}{2}I_L Z_0 \right] e^{-\gamma l} \\
 &= V_L \cosh \gamma l + I_L Z_0 \sinh \gamma l
 \end{aligned} \tag{2-63}$$

$$\begin{aligned}
 I_i &= \frac{1}{Z_0} \left[ \frac{1}{2}V_L + \frac{1}{2}I_L Z_0 \right] e^{\gamma l} - \frac{1}{Z_0} \left[ \frac{1}{2}V_L - \frac{1}{2}I_L Z_0 \right] e^{-\gamma l} \\
 &= \frac{1}{Z_0} V_L \sinh \gamma l + I_L \cosh \gamma l
 \end{aligned} \tag{2-64}$$

Las ecs. (2-63) y (2-64) pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_i \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_L \\ I_L \end{bmatrix} \quad (2-65)$$

Desde luego, la matriz de transmisión de la ecuación anterior se simplifica cuando  $\alpha = 0$ , resultando:

$$\begin{bmatrix} V_i \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l & jZ_0 \sin \beta l \\ \frac{j}{Z_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_L \\ I_L \end{bmatrix} \quad (2-66)$$

## 2.12 Voltajes y corrientes en función de las variables de entrada

También es posible, sin gran dificultad, obtener expresiones para el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea en función de las variables de entrada, es decir, en función de  $V_i$  e  $I_i$ . Para esto, conviene tomar ahora  $z = 0$  en donde la línea comienza, como se muestra en la Fig. 2-29.

Nuevamente, partiendo de las *ecs.* (2-29) y (2-30), se tiene cuando  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} V_i &= V(0) = A + B \\ I_i &= I(0) = \frac{1}{Z_0}(A - B) \end{aligned}$$

y resolviendo para  $A$  y  $B$  de la misma manera en que se hizo anteriormente:

$$A = \frac{1}{2}(V_i + I_i Z_0) \quad B = \frac{1}{2}(V_i - I_i Z_0)$$

Sustituyendo ahora a  $A$  y  $B$  en la *ec.* (2-29):

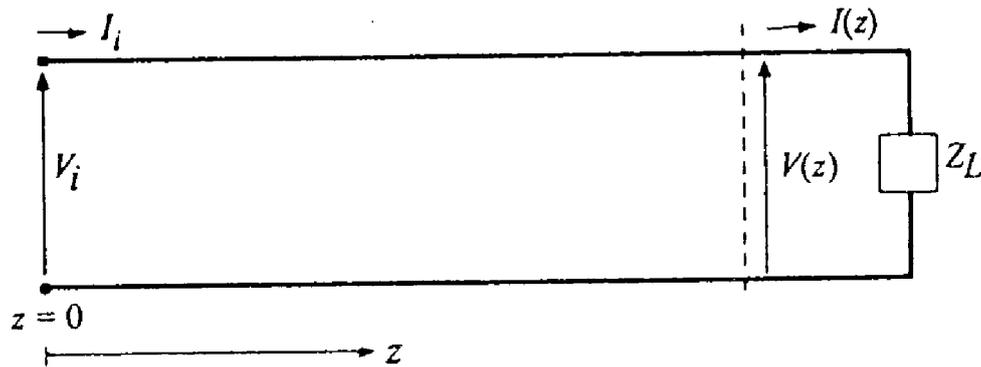


Fig. 2-29 Sistema de coordenadas para encontrar  $V(z)$  e  $I(z)$ .

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{2} [V_i + I_i Z_0] e^{-\gamma z} + \frac{1}{2} [V_i - I_i Z_0] e^{\gamma z} \\ &= \frac{1}{2} V_i [e^{-\gamma z} + e^{\gamma z}] + \frac{1}{2} I_i Z_0 [e^{-\gamma z} - e^{\gamma z}] \end{aligned} \quad (2-67)$$

o bien, usando funciones hiperbólicas:

$$V(z) = V_i \cosh \gamma z - I_i Z_0 \sinh \gamma z \quad (2-68)$$

Para la corriente, el procedimiento es el mismo. Al sustituir  $A$  y  $B$  en la ec. (2-30) resulta:

$$\begin{aligned} I(z) &= \left( \frac{1}{Z_0} \right) \frac{1}{2} [V_i + I_i Z_0] e^{-\gamma z} - \left( \frac{1}{Z_0} \right) \frac{1}{2} [V_i - I_i Z_0] e^{\gamma z} \\ &= \frac{1}{2} I_i [e^{-\gamma z} + e^{\gamma z}] + \frac{1}{2Z_0} V_i [e^{-\gamma z} - e^{\gamma z}] \end{aligned} \quad (2-69)$$

o bien:

$$I(z) = I_i \cosh \gamma z - \frac{1}{Z_0} V_i \sinh \gamma z \quad (2-70)$$

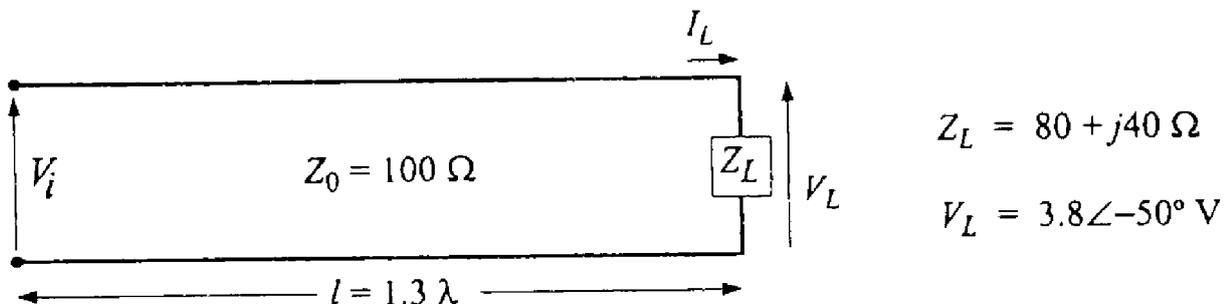
Si las pérdidas en la línea se consideran despreciables ( $\alpha = 0$ ), entonces  $\gamma = j\beta$  y las ecs. (2-68) y (2-70) se reducen a:

$$V(z) = V_i \cos \beta z - j I_i Z_0 \sin \beta z \quad (2-71)$$

$$I(z) = I_i \cos \beta z - \frac{j}{Z_0} V_i \sin \beta z \quad (2-72)$$

**Ejercicio 2-16** Una línea sin pérdidas con  $Z_0 = 100 \Omega$  mide  $1.3 \lambda$  a cierta frecuencia de trabajo. Al final se conecta una carga de  $80 + j40 \Omega$ . Si se sabe que el voltaje en la carga es de  $3.8 \angle -50^\circ \text{ V}$ , ¿cuánto vale el voltaje al principio de la línea?

*Solución*



De la ec. (2-66) se tiene:

$$V_i = [\cos \beta l] V_L + j [Z_0 \sin \beta l] I_L$$

en donde  $\beta l = (2\pi/\lambda)(1.3\lambda) = 2.6\pi$

Como en la carga debe cumplirse que  $V_L = I_L Z_L$ , entonces:

$$I_L = \frac{1}{Z_L} V_L$$

y

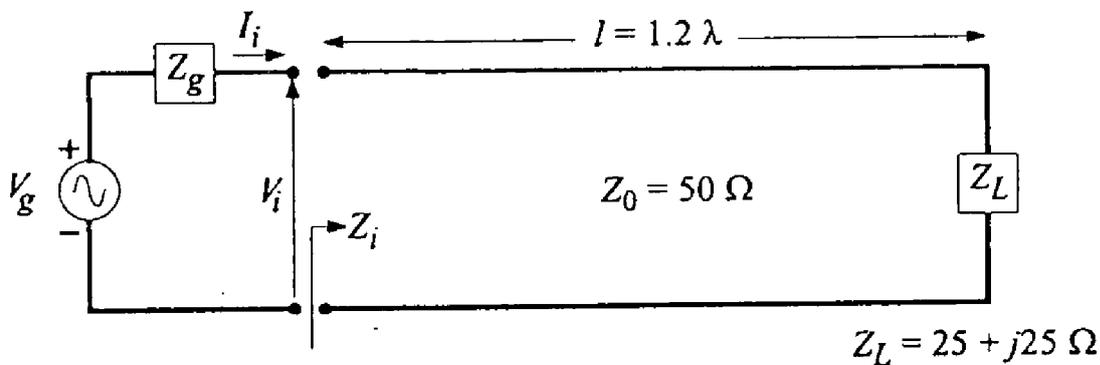
$$\begin{aligned} V_i &= V_L [\cos 108^\circ + (j100 \sin 108^\circ) / (80 + j40)] \\ &= (3.8 \angle -50^\circ) \left( -0.309017 + \frac{j95.105651}{80 + j40} \right) \end{aligned}$$

$$= (3.8 \angle -50^\circ) (-0.309017 + 0.475528 + j0.951056)$$

$$= (3.8 \angle -50^\circ) (0.9655 \angle 80.07^\circ) = 3.669 \angle 30.07^\circ \text{ V}$$

**Ejercicio 2-17** Una línea sin pérdidas con  $Z_0 = 50 \Omega$  mide  $1.2 \lambda$  a cierta frecuencia de trabajo. La línea es alimentada por un generador con  $V_g = 15 \angle 0^\circ \text{ V}$ , cuya resistencia interna es igual a  $50 \Omega$ . Al final de la línea hay una carga de  $25 + j25 \Omega$ . Encuentre: a) el voltaje en la entrada de la línea, b) el voltaje en la carga, c) la relación de onda estacionaria, d) la potencia promedio entregada a la entrada de la línea, y e) la potencia promedio entregada a la carga.

*Solución*



$$\beta l = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) (1.2\lambda) = 2.4\pi$$

a) La corriente de entrada es igual a:

$$I_i = \frac{V_g}{Z_g + Z_i}$$

A su vez,  $Z_i$  se obtiene de la ec. (2.50):

$$Z_i = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = (50) \left[ \frac{25 + j25 + j50(\tan 72^\circ)}{50 + j(25 + j25)(\tan 72^\circ)} \right]$$

$$= 50 \left[ \frac{25 + j178.8841}{-26.9421 + j76.9421} \right] = 98.482 - j50.7305 \quad \Omega$$

Por lo tanto, el voltaje de entrada a la línea,  $V_i$ , es:

$$V_i = V_g - Z_g I_i = V_g \left[ 1 - \frac{Z_g}{Z_g + Z_i} \right]$$

$$= V_g \left[ 1 - \frac{50}{148.482 - j50.7305} \right] = V_g [1 - 0.30154 - j0.103025]$$

$$= (15 \angle 0^\circ)(0.706 \angle -8.4^\circ) = 10.59 \angle -8.4^\circ \quad \text{V}$$

b) En la carga, el voltaje se puede obtener de la ec. (2-71), con  $z = l$ :

$$V_L = V_i \cos \beta l - j I_i Z_0 \sin \beta l = V_i \cos 72^\circ - j \left[ \frac{V_g Z_0}{Z_g + Z_i} \right] \sin 72^\circ$$

$$= (3.27249 \angle -8.4^\circ) - j(15 \angle 0^\circ)(0.30154 + j0.103025)(0.951056)$$

$$= 3.23732 - j0.478055 + 1.469738 - j4.30172$$

$$= 4.707058 - j4.779775 = 6.7 \angle -45.44^\circ \quad \text{V}$$

c) De las ecs. (2-33) y (2-56):

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{25 + j25 - 50}{25 + j25 + 50} = 0.447 \angle 116.6^\circ$$

$$ROE = \frac{1 + 0.447}{1 - 0.447} = 2.62$$

d) La potencia promedio entregada a la entrada de la línea es igual a:

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_i I_i^*)$$

$$V_i = 10.59 \angle -8.4^\circ = 10.476 - j1.547 \text{ V}$$

$$I_i = \frac{15}{148.482 - j50.7305} = 0.09046 + j0.030907 \text{ A}$$

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(10.476 - j1.547)(0.09046 - j0.030907)]$$

$$P_i = 0.45 \text{ W}$$

e) Finalmente, la potencia promedio entregada a la carga es:

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L I_L^*)$$

$$V_L = 6.7 \angle -45.44^\circ \text{ V}$$

$$I_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{6.7 \angle -45.44^\circ}{35.36 \angle 45^\circ} = 0.1895 \angle -90.44^\circ \text{ A}$$

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[1.26965 \angle 45^\circ] = 0.45 \text{ W}$$

La potencia inicial es igual a la potencia entregada a la carga. Este resultado es correcto y se obtiene debido al principio de conservación de energía, ya que se consideró que no hay pérdidas en la línea. Sin embargo, la línea no está acoplada con la carga y, por lo tanto, esa potencia no es la máxima posible.

Para obtener la máxima potencia posible, se necesitaría que  $Z_L = 50 \Omega$ . Bajo esta condición,  $Z_i$  sería también igual a  $50 \Omega$  y  $V_i = 7.5 \angle 0^\circ$  V e  $I_i = 0.15 \angle 0^\circ$  A. Por lo tanto, la potencia máxima de entrada sería 0.5625 W, y para una línea sin pérdidas esta potencia sería la misma entregada en la carga.

En la práctica, desde luego, las líneas sí tienen pérdidas. De lo contrario, por ejemplo, no habría necesidad de utilizar repetidores en líneas muy largas. La atenuación se puede incorporar en la solución de un problema con bastante facilidad, simplemente utilizando las ecuaciones generales con  $\gamma = \alpha + j\beta$ .

## 2.13 La carta de Smith

Todos los ejercicios que se han presentado en las últimas secciones para obtener impedancias de entrada, coeficientes de reflexión, etc., tienen algo en común: son matemáticamente tediosos y hay que hacer muchos cálculos con números complejos. Para el estudiante moderno, que cuenta con calculadoras programables de increíble versatilidad, lo anterior realmente no es mayor problema. Pero hace 50 años, realizar dichos cálculos requería de muchísima paciencia. Por tal razón, en esa época se buscaron métodos alternativos gráficos, de los cuales el que cobró mayor popularidad (y aún la tiene) fue el de la carta de Smith\*. Este método utiliza el plano complejo del coeficiente de reflexión, sobre el cual se ubican resistencias y reactancias *normalizadas*. A continuación se explicará cómo pueden deducirse las curvas que integran una carta de Smith típica.

Recuérdese que la impedancia vista a lo largo de una línea sin pérdidas en dirección hacia la carga es, de las *ecs.* (2-29) y (2-30):

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_i(z) + V_r(z)}{I_i(z) - I_r(z)} = Z_0 \frac{V_i(z) + V_r(z)}{V_i(z) - V_r(z)}$$

---

\* P.H. Smith publicó su método gráfico en 1939, en la revista *Electronics*, y posteriormente lo perfeccionó, publicando en 1944 en la misma revista "An improved transmission-line calculator".

Si esta impedancia se divide entre la impedancia característica de la línea, se dice que está *normalizada*:

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{V_i(z) + V_r(z)}{V_i(z) - V_r(z)} \\ &= \frac{1 + V_r(z)/V_i(z)}{1 - V_r(z)/V_i(z)} = \frac{1 + \rho_v(z)}{1 - \rho_v(z)}\end{aligned}\quad (2-73)$$

en donde  $\rho_v(z)$  está dada por la ec. (2-61):

$$\rho_v(z) = \rho_L e^{j2\beta z} \quad (2-61)$$

La impedancia normalizada  $\hat{z}$  es función de  $z$  y en general es una cantidad compleja. De allí que se puede emplear la siguiente notación rectangular:

$$\hat{z}(z) = r + jx \quad (2-74)$$

en donde  $r$  es una resistencia normalizada y  $x$  es una reactancia normalizada. Obviamente, ambas son también funciones de la coordenada  $z$ .

Asimismo, el coeficiente de reflexión de voltajes se puede representar como:

$$\rho_v(z) = u + jv \quad (2-75)$$

Ahora, sólo falta sustituir la ec. (2-75) en la ec. (2-73) e igualar con la ec. (2-74):

$$\frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} = r + jx$$

Con un poco de álgebra, es fácil demostrar que la ecuación compleja anterior representa a dos familias de círculos que pueden graficarse en el plano complejo  $u - jv$ . Veamos su deducción:

$$r + jx = \frac{(1 + u + jv)(1 - u + jv)}{(1 - u - jv)(1 - u + jv)} = \frac{[(1 + jv) + u][(1 + jv) - u]}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$r + jx = \frac{(1 + 2jv - v^2) - u^2}{(1 - u)^2 + v^2} = \frac{(1 - u^2 - v^2) + j2v}{(1 - u)^2 + v^2}$$

Si se igualan las partes reales e imaginarias de ambos miembros, se tiene:

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (2-76)$$

$$x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (2-77)$$

El lector que quiera practicar sus matemáticas un poco más, podrá demostrar sin mucho esfuerzo que las dos ecuaciones anteriores se pueden reescribir como:

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1+r)^2} \quad (2-78)$$

$$y \quad (u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (2-79)$$

La ec. (2-78) representa a una familia de círculos de  $r$  constante sobre el plano complejo  $u - jv$ . El centro de cada círculo está en  $[r / (1+r), 0]$  y su radio es  $[1 / (1+r)]$ .

Por su parte, la ec. (2-79) representa a otra familia de círculos en el mismo plano, pero éstos son de  $x$  constante; cada círculo tiene su centro en  $[1, 1/x]$  y su radio es  $[1 / |x|]$ .

En la Fig. 2-30 se muestran, a manera de ejemplo, los círculos correspondientes a resistencias normalizadas de  $r = 0$ ,  $r = 0.4$ ,  $r = 1$  y  $r = 3$ . El centro y el radio de cada uno de estos círculos se calculan de acuerdo con la Tabla 2-3.

Se observa que todos los círculos de resistencia normalizada tienen su centro sobre el eje  $u$ , y que conforme  $r$  aumenta, los círculos se hacen más pequeños y se desplazan hacia la derecha. El círculo mayor, correspondiente

a  $r = 0$ , contiene a todos los demás círculos de  $r$  constante; asimismo, el círculo mayor tiene radio unitario, y los radios de los demás círculos son menores que la unidad. Por último, todos los círculos pasan por el punto  $u = 1, v = 0$ .

Tabla 2-3

Valor de $r$	centro del círculo		radio del círculo
	$u$	$v$	
0	0	0	1
0.4	0.2857	0	0.714
1	0.5	0	0.5
3	0.75	0	0.25

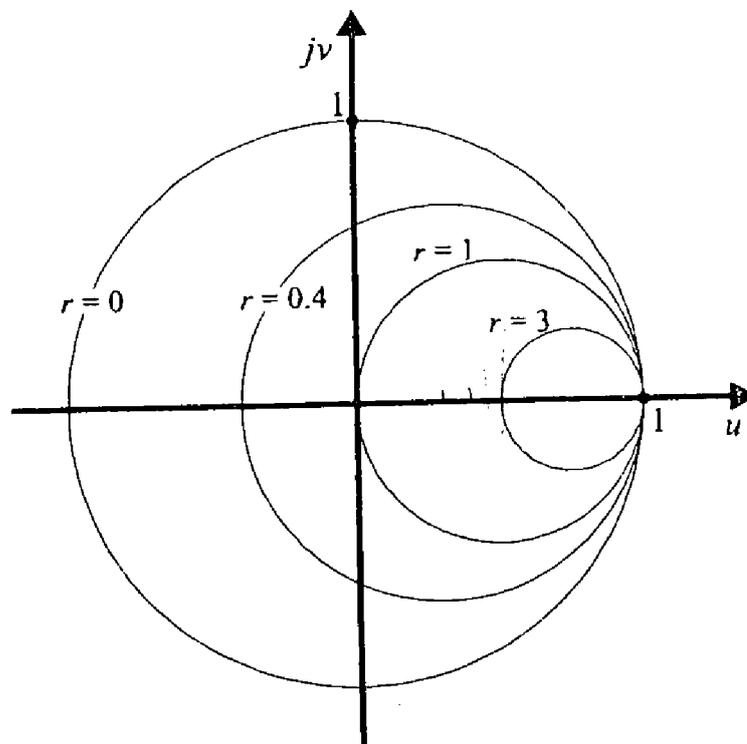


Fig. 2-30 Círculos de resistencia normalizada  $r$  sobre el plano complejo  $u - jv$  del coeficiente de reflexión.

Por lo que se refiere a los círculos de reactancia normalizada  $x$ , también conviene hacer una pequeña tabla para ejemplificar la obtención de sus

centros y radios respectivos. En este caso, la reactancia puede ser positiva (inductiva) o negativa (capacitiva). Véase la Tabla 2-4.

Tabla 2-4

Valor de $x$	centro del círculo		radio del círculo
	$u$	$v$	
0	1	$\infty$	$\infty$
0.3	1	3.33	3.33
1	1	1	1
2	1	0.5	0.5
-0.3	1	-3.33	3.33
-1	1	-1	1
-2	1	-0.5	0.5

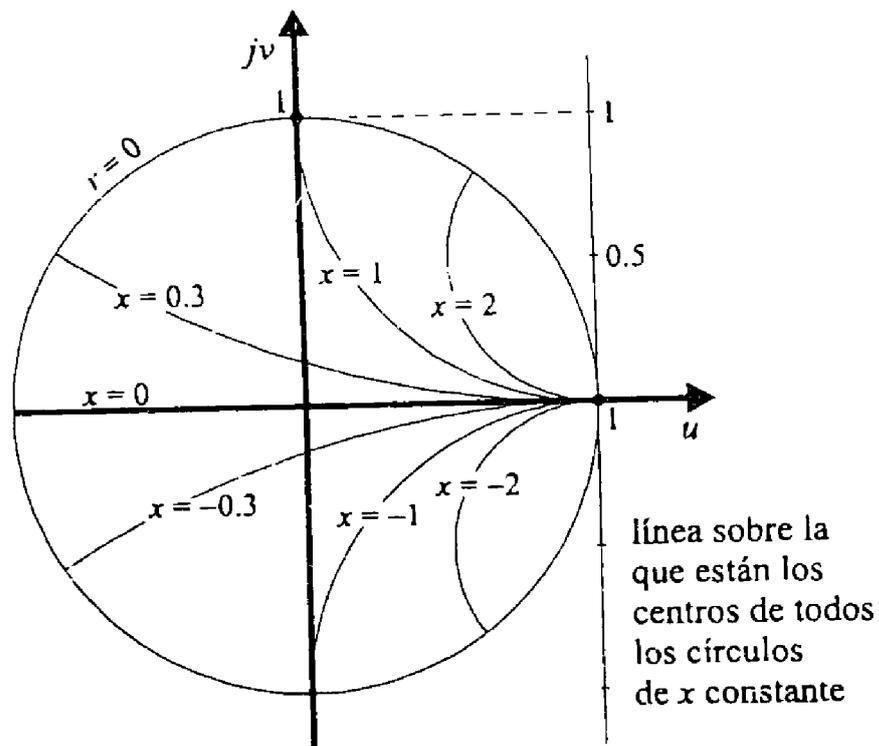


Fig. 2-31 Círculos de reactancia normalizada  $x$  sobre el plano complejo  $u - jv$  del coeficiente de reflexión.

Los círculos obtenidos para  $x$  se muestran en la Fig. 2-31. Como referencia, también se incluye al círculo unitario de  $r = 0$ , y nótese que sólo se muestran precisamente las secciones de los círculos de  $x$  constante que quedan dentro de dicho círculo con  $r = 0$ . Esto se debe a que la magnitud máxima que puede tener el coeficiente de reflexión es 1, y todo lo que se dibujase fuera del círculo unitario no tendría ningún sentido práctico. Recuérdese, de la ec. (2-75), que el coeficiente de reflexión para cualquier  $z$  se puede ubicar perfectamente en el plano complejo  $u - jv$ .

Si la reactancia normalizada  $x$  es positiva, su círculo queda arriba del eje  $u$ ; si es negativa, queda abajo. Como el radio de cada círculo es igual al valor absoluto de la ordenada de su centro, todos los círculos pasan también por el punto  $u = 1, v = 0$ . Cuando la reactancia vale cero, su círculo tiene radio infinito y un arco infinitesimal del mismo se confunde con la línea recta horizontal, que marca el límite entre las reactancias normalizadas inductivas y capacitivas.

Para poder utilizar este método gráfico en la solución de problemas y obtener resultados con la mayor precisión posible, es necesario dibujar muchos círculos de  $r$  y  $x$  constantes. Mientras más círculos haya, mejor, pues el error visual humano por interpolación será menor. Sin embargo, también hay un límite, ya que demasiados círculos harían a la carta muy pesada, y también se dificultaría la lectura de los valores. No hay que perder de vista que el método en sí es exacto, y que con cuidado y paciencia se puede interpolar visualmente para leer resultados bastante precisos. También hay que resaltar una bondad adicional del mismo método, en el sentido de que el ingeniero diseñador tiene frente a sí, al trabajar sobre la carta, una muestra visual simultánea de las muchas soluciones que puede haber para un gran número de líneas y el rango de respuestas que se pueden obtener al variar los parámetros de trabajo.

La carta de Smith se consigue comercialmente en negocios que venden papelería para ingenieros. Con fines didácticos, nosotros emplearemos aquí nuestro propio "diseño" de la carta, que se muestra en la Fig. 2-32.

Cada impedancia normalizada se puede representar como un punto, sin importar si dicha impedancia es la de entrada de la línea, la de la carga, o la vista en cualquier lugar intermedio. Así por ejemplo, supóngase que en algún problema la impedancia normalizada de la carga vale  $\hat{z}_L = 2 + j1.2$ ; su representación en la carta de Smith sería el punto de cruce entre los

círculos  $r = 2$  y  $x = 1.2$  (véase el punto A en la Fig. 2-32). Si en otro problema, la impedancia normalizada **de entrada** fuese  $\hat{z}_i = 0.2 - j0.5$ , su representación sería el punto B en la misma figura, donde se cruzan los círculos  $r = 0.2$  y  $x = -0.5$ .

En la misma Fig. 2-32 aparecen dos escalas circulares exteriores. Una está dividida en grados y la otra en fracciones de  $\lambda$ .

La escala en grados sirve para leer rápidamente el ángulo del coeficiente de reflexión. Su magnitud se obtiene por una simple "regla de tres", tomando en cuenta que el radio del círculo para  $r = 0$  es unitario. Así por ejemplo, el punto C representa un coeficiente de reflexión de  $0.5 \angle 134^\circ$ , y el punto D es un coeficiente de reflexión igual a  $1 \angle -50^\circ$ .

La otra escala, que está en fracciones de  $\lambda$ , sirve para trasladar un punto a lo largo de la línea. Si el desplazamiento se desea en dirección hacia el generador, la distancia eléctrica equivalente se lee en esa escala de la carta, avanzando en el sentido de las manecillas del reloj. En cambio, si el movimiento es hacia la carga, el desplazamiento eléctrico se mide en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Nótese que una vuelta completa en la carta, en cualquiera de las dos direcciones, equivale a avanzar media longitud de onda, y después todo se vuelve a repetir, tal como se hubiese esperado de acuerdo con la teoría de ondas estacionarias que se ha desarrollado en el texto.

Por ejemplo, supóngase que del punto B, donde está la impedancia normalizada de entrada de una cierta línea, uno quiere saber cuánto valdría la impedancia normalizada que se vería al avanzar  $0.12 \lambda$  hacia la carga. Recuérdese que, al tratarse de la misma línea, la magnitud de su coeficiente de reflexión es constante en cualquier lugar de la línea. En este caso, la magnitud estaría dada por la distancia proporcional entre el origen de la carta y el punto B, considerando que del origen al círculo  $r = 0$  la distancia es unitaria. Al desplazarse uno hacia la carga, la fase del coeficiente de reflexión iría cambiando, pero su magnitud sería la misma; es decir, el desplazamiento equivale a movernos sobre un círculo cuyo radio es precisamente la distancia entre el origen y el punto B. El resto es muy simple, pues basta leer en la escala exterior un avance igual a  $0.12 \lambda$  en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. La impedancia normalizada buscada quedaría representada por el punto E.

Con el fin de que el lector medite sobre la interpretación de la carta de Smith, en la Fig. 2-33 se proporciona una réplica de nuestro diseño, en caso

de que desee fotocopiarla y amplificarla para su uso personal y realizar por su cuenta los ejercicios que se verán a continuación.

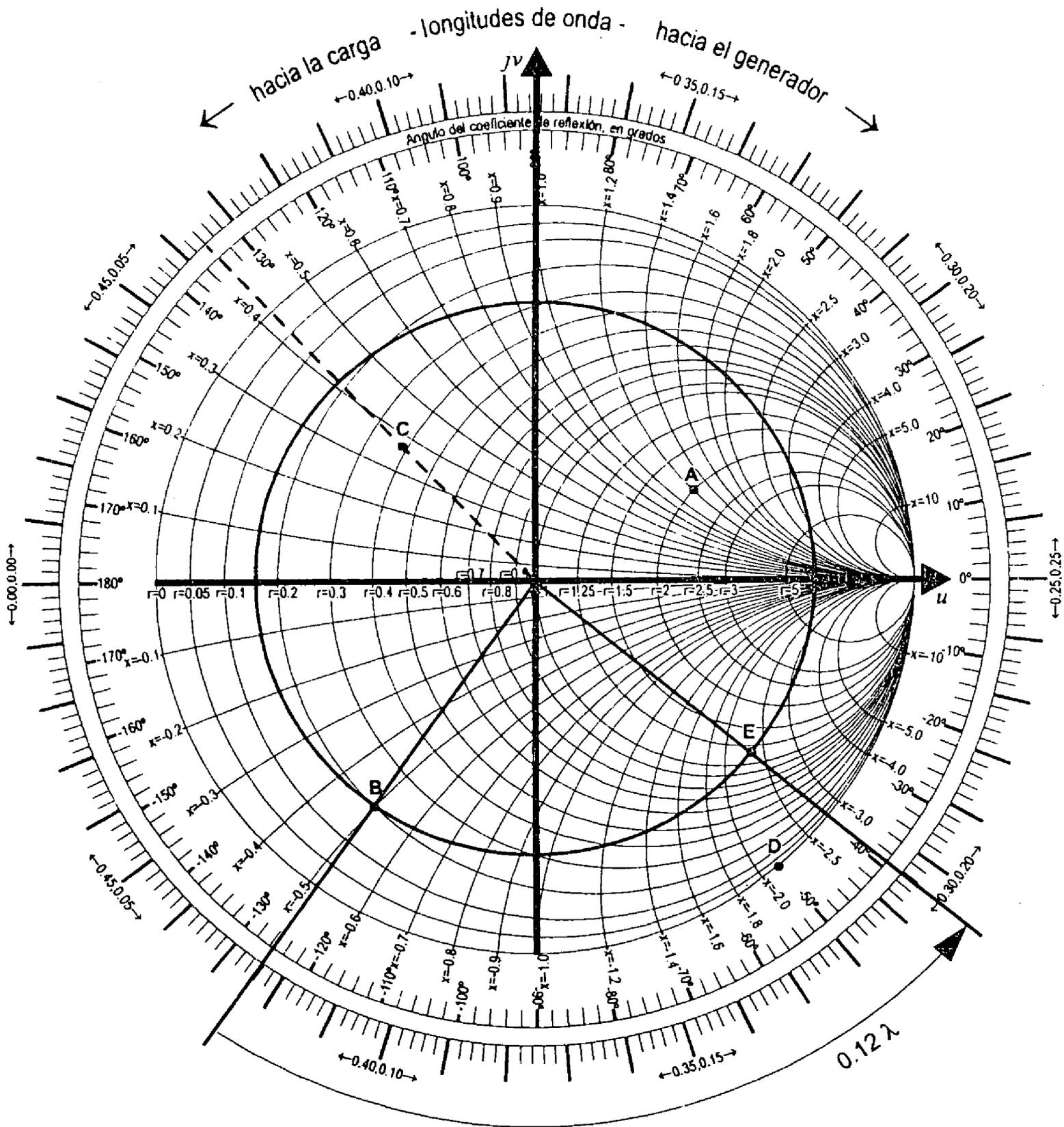


Fig. 2-32 La carta de Smith.

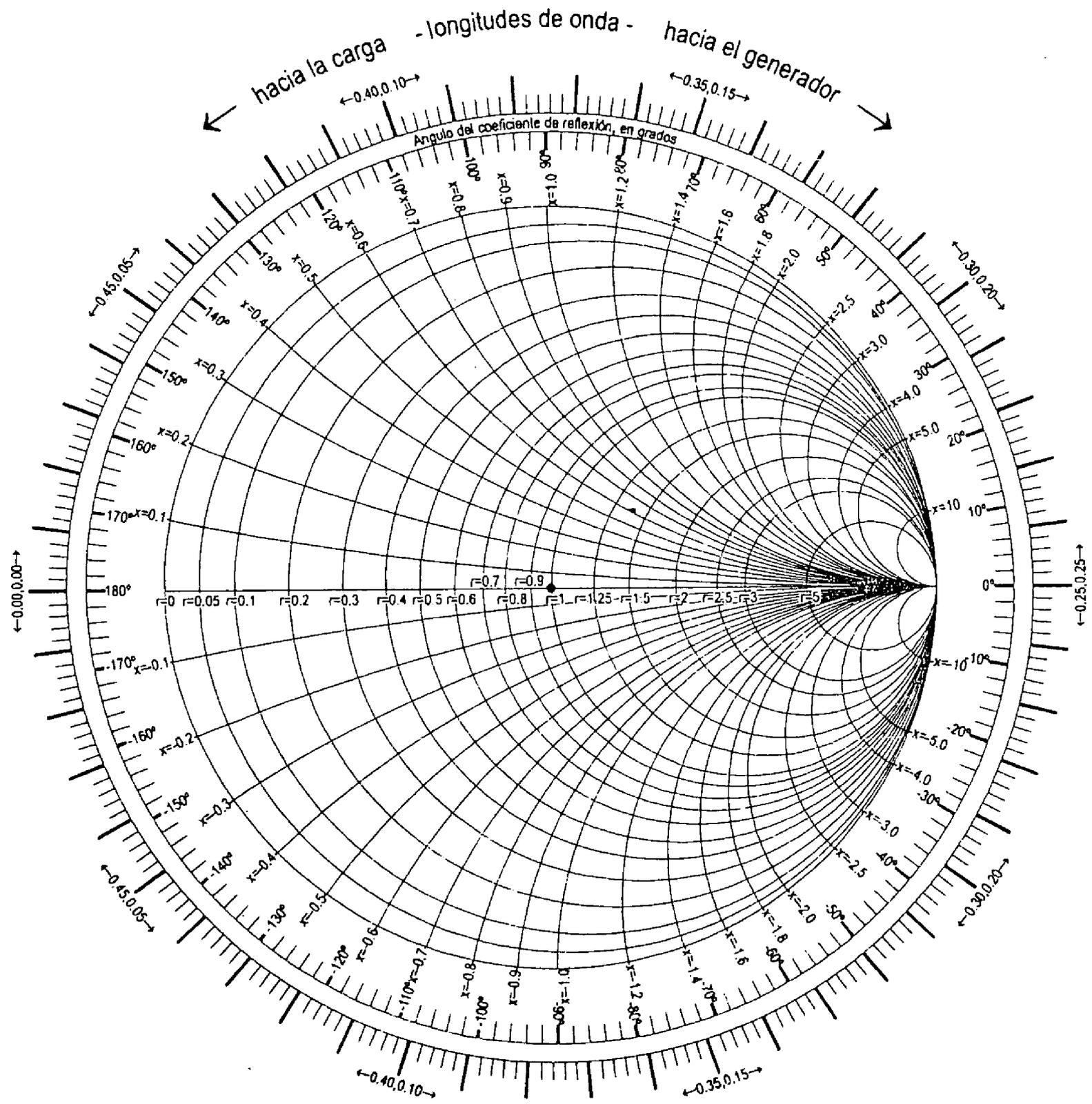
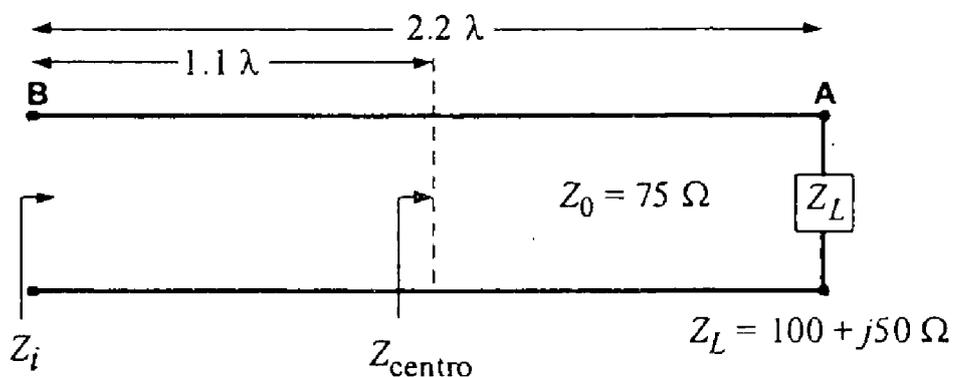


Fig. 2-33 La carta de Smith.

**Ejercicio 2-18** Una línea sin pérdidas con impedancia característica  $Z_0 = 75 \Omega$  mide  $2.2$  longitudes de onda a cierta frecuencia de trabajo. Al final está conectada una carga  $Z_L = 100 + j50 \Omega$ . Use la carta de Smith para encontrar: a) la impedancia de entrada de la línea, b) el coeficiente de reflexión de voltajes (magnitud y fase) en la carga, c) la impedancia vista en el centro de la línea, y d) el coeficiente de reflexión de voltajes (magnitud y fase) en el mismo centro de la línea.

*Solución*



Para utilizar la carta de Smith, el primer paso obligado es normalizar las impedancias:

$$\hat{z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{100 + j50}{75} = 1.333 + j0.666$$

La carga, entonces, queda localizada en la carta por el punto A.

a) Para transferir el punto A a la entrada de la línea, hay que trazar el círculo del coeficiente de reflexión, cuya magnitud es constante. Después, hay que avanzar sobre ese círculo, una distancia equivalente a  $2.2 \lambda$ , hacia el generador (en el sentido de las manecillas del reloj); cada vuelta completa equivale a  $0.5 \lambda$ , por lo que hay que dar cuatro vueltas más  $0.2 \lambda$ , medidas desde el punto A. De esta forma, se llega a la entrada de la línea (punto B), en donde la impedancia normalizada vale:

$$\hat{z}_i = 0.785 - j0.52$$

Para encontrar su valor verdadero, se *desnormaliza* multiplicando por  $Z_0$ :

$$Z_i = Z_0 \hat{z}_i = 75(0.785 - j0.52) \doteq 58.9 - j39 \ \Omega$$

b) El coeficiente de reflexión de voltajes en la carga se lee directamente en el punto A, que representa precisamente a la carga. Para estimar su magnitud, tómesese una regla o escuadra con escala en milímetros, y hágase la operación siguiente (regla de tres):

$$\frac{1.0}{\overline{OC}} = \frac{|\rho_L|}{\overline{OA}} \quad \Rightarrow \quad |\rho_L| \doteq 0.31$$

El ángulo del coeficiente se lee sobre la línea  $\overline{OC}$  en la escala circular correspondiente, de donde:

$$\rho_L = 0.31 \angle 48^\circ$$

Como verificación, y por simple curiosidad, revisemos este resultado con la *ec. (2-33)*:

$$\begin{aligned} \rho_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 + j50 - 75}{100 + j50 + 75} \\ &= 0.207 + j0.226 = 0.307 \angle 47.49^\circ \end{aligned}$$

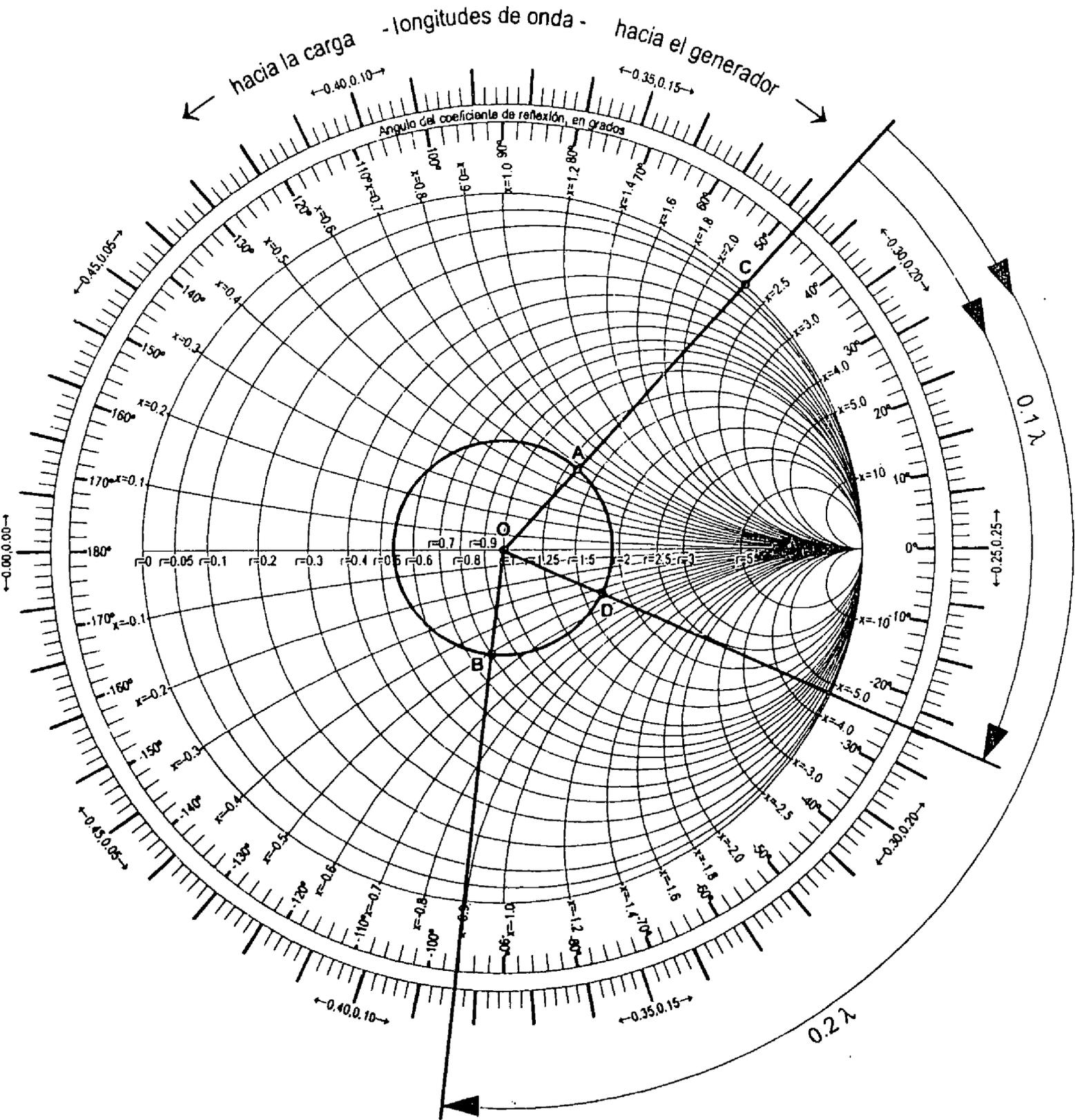
Evidentemente, los dos resultados concuerdan, dentro de un pequeñísimo margen de error.

c) Para leer en la carta la impedancia vista en el centro de la línea, se puede partir desde B y avanzar  $1.1 \lambda$  hacia la carga (sentido contrario al de las manecillas del reloj), o bien se puede iniciar en la carga (punto A) y desplazarse  $1.1 \lambda$  hacia el generador (sentido de las manecillas del reloj). El resultado obtenido sería el mismo.

Tomemos a la carga (punto A) como punto de partida. Al avanzar  $1.1 \lambda$  (dos vueltas más  $0.1 \lambda$ ), se lee sobre el círculo de  $|\rho_v|$  constante la impedancia buscada (punto D):

$$\hat{z}_{\text{centro}} \doteq 1.68 - j0.45$$

$$y \quad Z_{\text{centro}} = (75)(1.68 - j0.45) = 126 - j33.7 \ \Omega$$



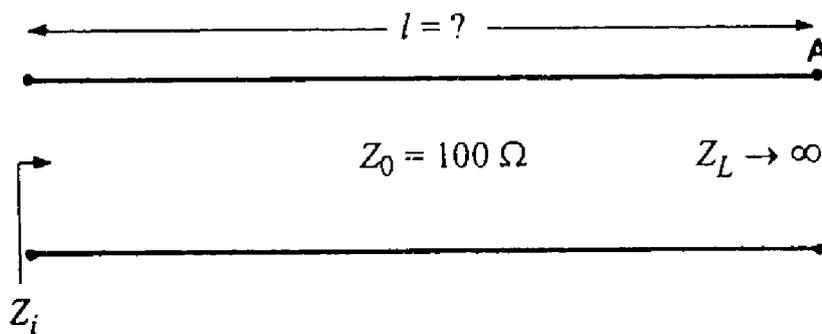
Carta de Smith del Ejercicio 2-18

d) Por último, el coeficiente de reflexión de voltajes en el centro de la línea, se lee directamente en el punto D. Por facilidad de lectura en la escala de los grados, la línea  $\overline{OD}$  se prolonga hasta que corte dicha escala:

$$\rho_v \Big|_{\substack{\text{centro de} \\ \text{la línea}}} = 0.31 \angle -24^\circ$$

**Ejercicio 2-19** Empleando la carta de Smith, encuentre la longitud mínima en metros que debe tener una línea terminada en circuito abierto para que a la entrada presente una impedancia de  $j30 \Omega$ , si  $Z_0 = 100 \Omega$ . Considere que la  $\epsilon_r$  del dieléctrico en la línea vale 2.5 y que la frecuencia de trabajo es de 300 MHz.

*Solución*



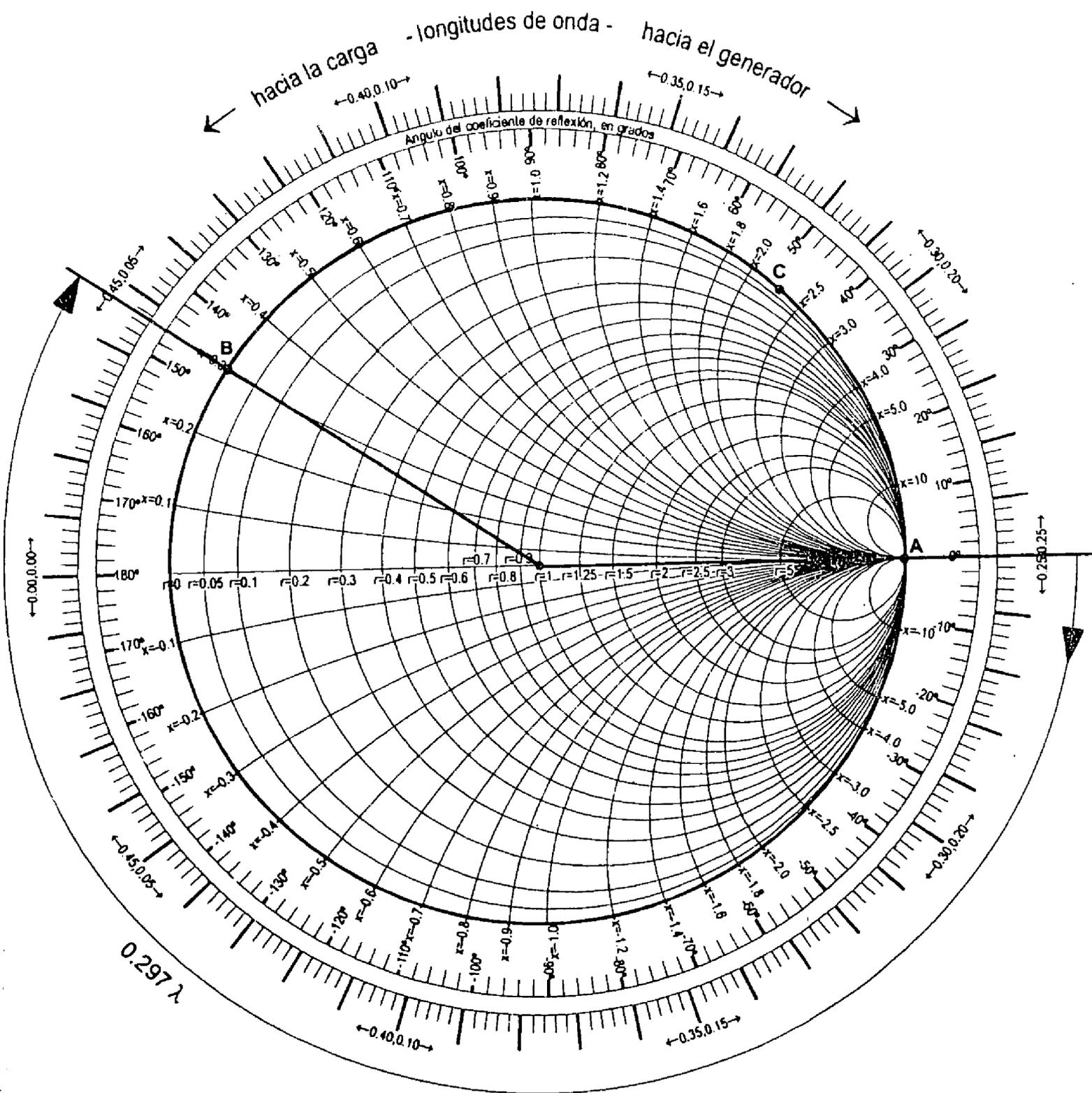
Como  $r$  y  $x$  de la carga tienden a infinito, el punto A que identifica a la carga (circuito abierto) está en el extremo derecho de la carta. La magnitud del coeficiente de reflexión vale 1, de modo que el círculo del coeficiente de reflexión coincide con el círculo de  $r = 0$ . Al girar en el sentido de las manecillas del reloj (desplazamiento desde la carga hacia el generador), lo necesario hasta encontrar  $(j30) / 100 = j0.3$ , se determina que  $l = 0.297 \lambda$ .

En la línea,  $\lambda$  es igual a:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{2.5}} = 0.6325 \text{ m}$$

Por lo tanto, la longitud pedida es:

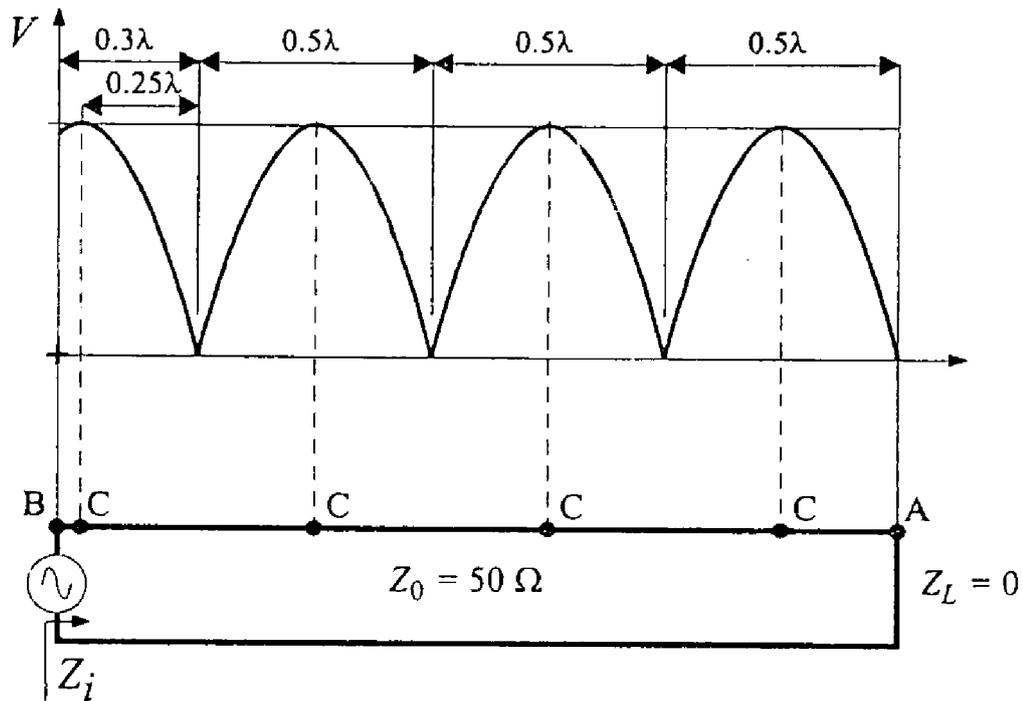
$$l = (0.297)(0.6325) \doteq 18.8 \text{ cm}$$



Carta de Smith del Ejercicio 2-19

**Ejercicio 2-20** Una línea sin pérdidas con  $Z_0 = 50 \Omega$  termina en corto circuito. La línea mide  $1.8 \lambda$  a cierta frecuencia de trabajo. Use la carta de Smith y encuentre: a) la impedancia de entrada, b) la posición del primer máximo de voltaje más cercano al generador, y c) el  $VSWR$  de la línea.

*Solución*



a) La carga es un circuito cerrado ( $r = 0, x = 0$ ) y, por lo tanto, su posición en la carta de Smith es la indicada por el punto A. La magnitud del coeficiente de reflexión es 1, y el círculo de  $|\rho_v|$  constante coincide con el círculo  $r = 0$ . Para llegar a la entrada de la línea, hay que desplazarse  $1.8 \lambda$  desde el punto A hacia el generador. Finalmente, la impedancia normalizada de entrada corresponde al punto B:

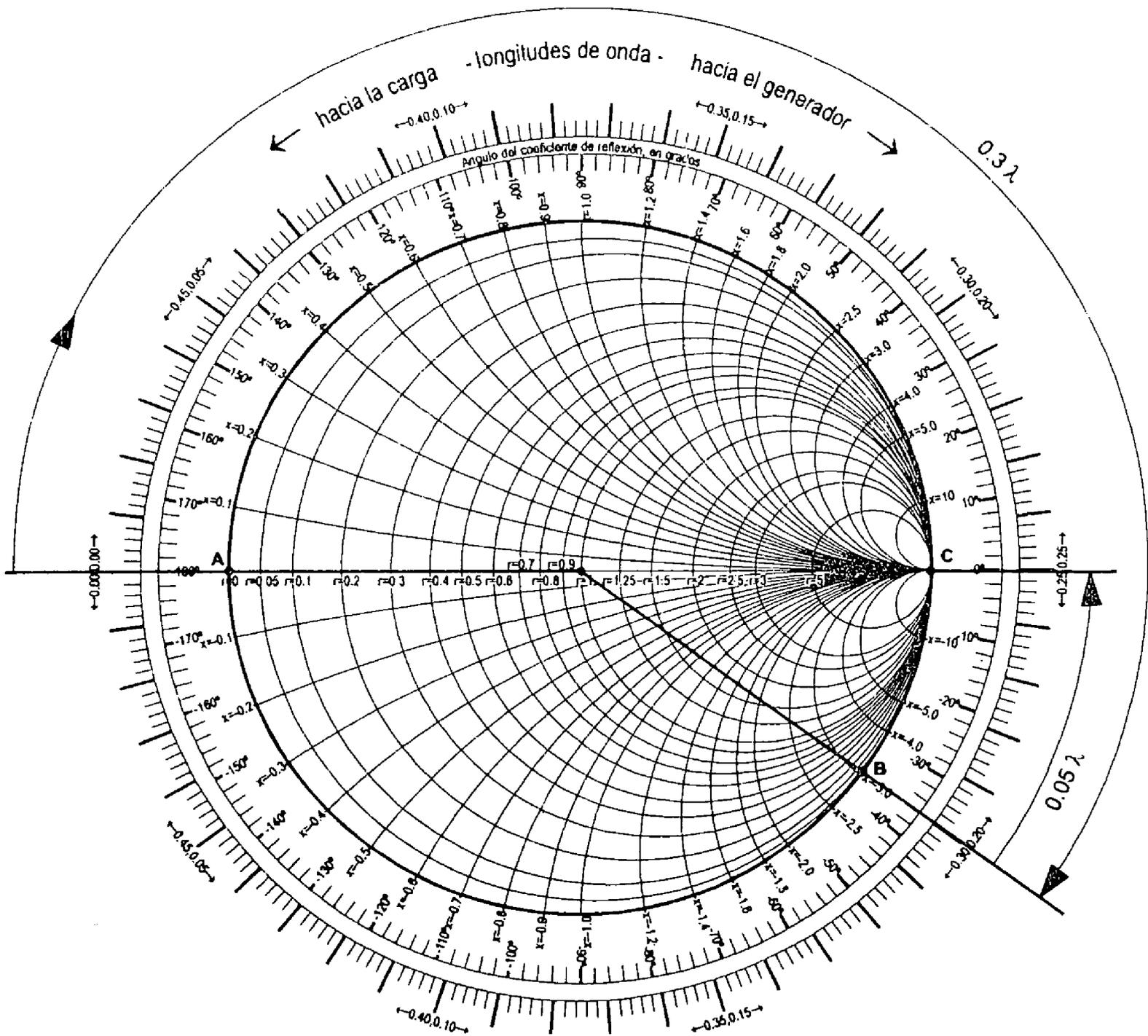
$$\hat{z}_i \doteq -j3.1$$

y 
$$Z_i = 50(-j3.1) = -j155 \Omega$$

b) De la figura, podría decirse rápidamente que el primer máximo de voltaje más cercano al generador está a una distancia de  $0.05 \lambda$ , medida desde el principio de la línea hacia la carga. Para determinar la misma respuesta con la carta de Smith, debe recordarse primero, de acuerdo con las ecs. (2-57) y (2-58), que la impedancia vista en puntos de voltajes máximos y mínimos siempre es resistiva pura e igual, respectivamente, a  $(Z_0)(VSWR)$  y  $Z_0/VSWR$ .

El máximo de voltaje buscado estará, por lo tanto, sobre el eje real del plano complejo  $u - jv$ , o sea, sobre la línea horizontal central de la carta. La pregunta que sigue es: ¿dónde?, ¿en el extremo izquierdo o en el extremo derecho? La ec. (2-57) indica que la impedancia normalizada en un punto de voltaje máximo es:

$$\hat{z} \Big|_{V_{\max}} = \frac{(Z_0)(VSWR)}{Z_0} = VSWR = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} > 1$$



Carta de Smith del Ejercicio 2-20

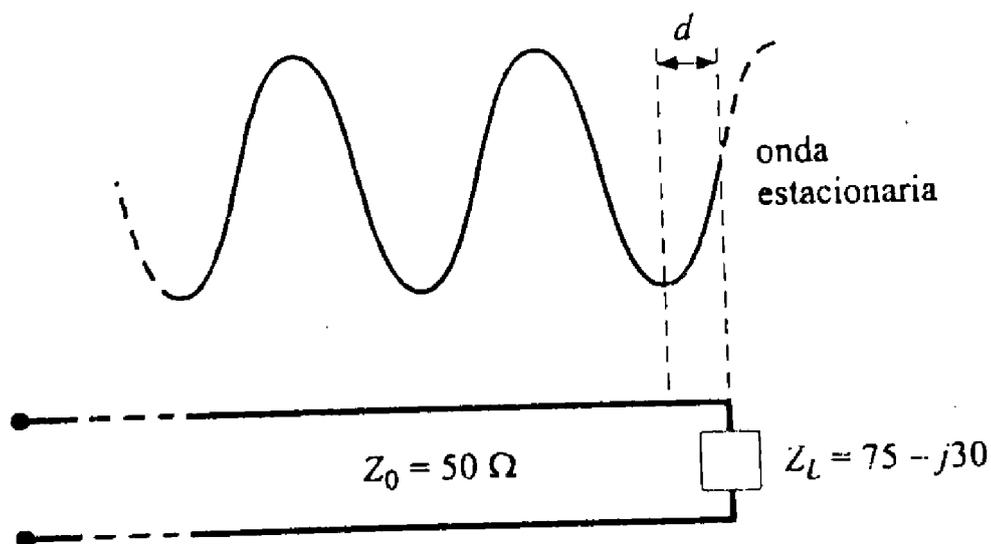
Se concluye que, si la impedancia normalizada debe ser real y mayor que 1, la única posibilidad para este ejercicio es que se localice en el punto C, donde  $r \rightarrow \infty$ . La distancia entre la entrada de la línea (punto B) y su primer máximo de voltaje más cercano es entonces  $0.05 \lambda$ , que se determina girando en sentido contrario a las manecillas del reloj (hacia la carga).

c) De la ec. (2-57), es claro que el  $VSWR = \hat{z}|_{V_{m\acute{a}x}}$ . En la carta de Smith, por lo tanto, el  $VSWR$  se lee en el círculo correspondiente a  $r$  para esa impedancia, sobre el eje real. Para este ejercicio, se concluye entonces que el  $VSWR$  se lee en el punto C y vale  $\infty$ , como era de esperarse de acuerdo con la teoría (véase la Tabla del Ejercicio 2-13).

**Ejercicio 2-21** Un cable coaxial relleno de polietileno ( $\epsilon_r = 2.26$ ) tiene una impedancia característica de  $50 \Omega$  y una longitud de 25 m. El cable se utiliza para alimentar a una carga compleja de  $75 - j30 \Omega$ , a una frecuencia de trabajo de 600 MHz. Usando dos métodos diferentes (analíticamente y con la carta de Smith), calcule: a) el coeficiente de reflexión de voltajes en la carga (magnitud y fase); b) la distancia, en metros, que hay entre la carga y el primer mínimo de voltaje de la onda estacionaria; c) el valor del  $VSWR$ .

### Solución

a) El coeficiente de reflexión de voltajes,  $\rho_v$ , puede encontrarse en el punto donde está la carga por medio de la ec. (2-33):



$$\begin{aligned}\rho_v &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{75 - j30 - 50}{75 - j30 + 50} = \frac{25 - j30}{125 - j30} \\ &= \frac{39.0512 \angle -50.1944^\circ}{128.5496 \angle -13.4957^\circ} = 0.304 \angle -36.7^\circ\end{aligned}$$

Para encontrar el mismo valor anterior en la carta de Smith, primero se normaliza la carga (punto A):

$$\hat{z}_L = \frac{75 - j30}{50} = 1.5 - j0.6$$

A continuación se trazan el círculo del coeficiente de reflexión y una línea recta que pase por el centro de la carta y el punto A (la carga). La línea recta se prolonga hasta que cruza la escala exterior donde se lee el ángulo del coeficiente de reflexión, que resulta ser idéntico al calculado analíticamente. Para comprobar la magnitud del mismo coeficiente, se efectúa una sencilla regla de tres:

$$\frac{\text{radio de la carta (círculo } r = 0)}{1} = \frac{\text{radio del círculo C}}{|\rho_v|}$$

Efectuando las mediciones correspondientes con una regla se obtiene que:

$$|\rho_v| = \frac{1.4 \text{ cm}}{4.6 \text{ cm}} = 0.304$$

lo cual concuerda nuevamente con el resultado analítico.

b) La posición del primer mínimo de voltaje se obtiene a partir de la ec. (2-54) con la relación:

$$2\beta z + \theta = -2\beta d + \theta = -\pi$$

en donde  $\theta$  es el ángulo del coeficiente de reflexión en radianes y  $d$  es la distancia entre la carga y el primer mínimo de la onda estacionaria. Por lo tanto:

$$d = \frac{\theta + \pi}{2\beta} = \frac{\theta + \pi}{2(2\pi/\lambda)} = \lambda \left( \frac{\theta}{4\pi} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \left( \frac{-0.6405}{4\pi} + 0.25 \right) \lambda = 0.199 \lambda$$

Como la distancia  $d$  se pide en metros, es necesario calcular  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{(600 \times 10^6) \sqrt{2.26}} = 0.33 \text{ m}$$

De allí que la distancia  $d$ , en metros, sea:

$$d = (0.199)(0.33) = 0.066 \text{ m}$$

Empleando la carta de Smith, recuérdese que en los puntos donde  $|V(z)|$  es mínima, se cumple la relación dada por la ec. (2-58):

$$Z = \frac{Z_0}{VSWR}$$

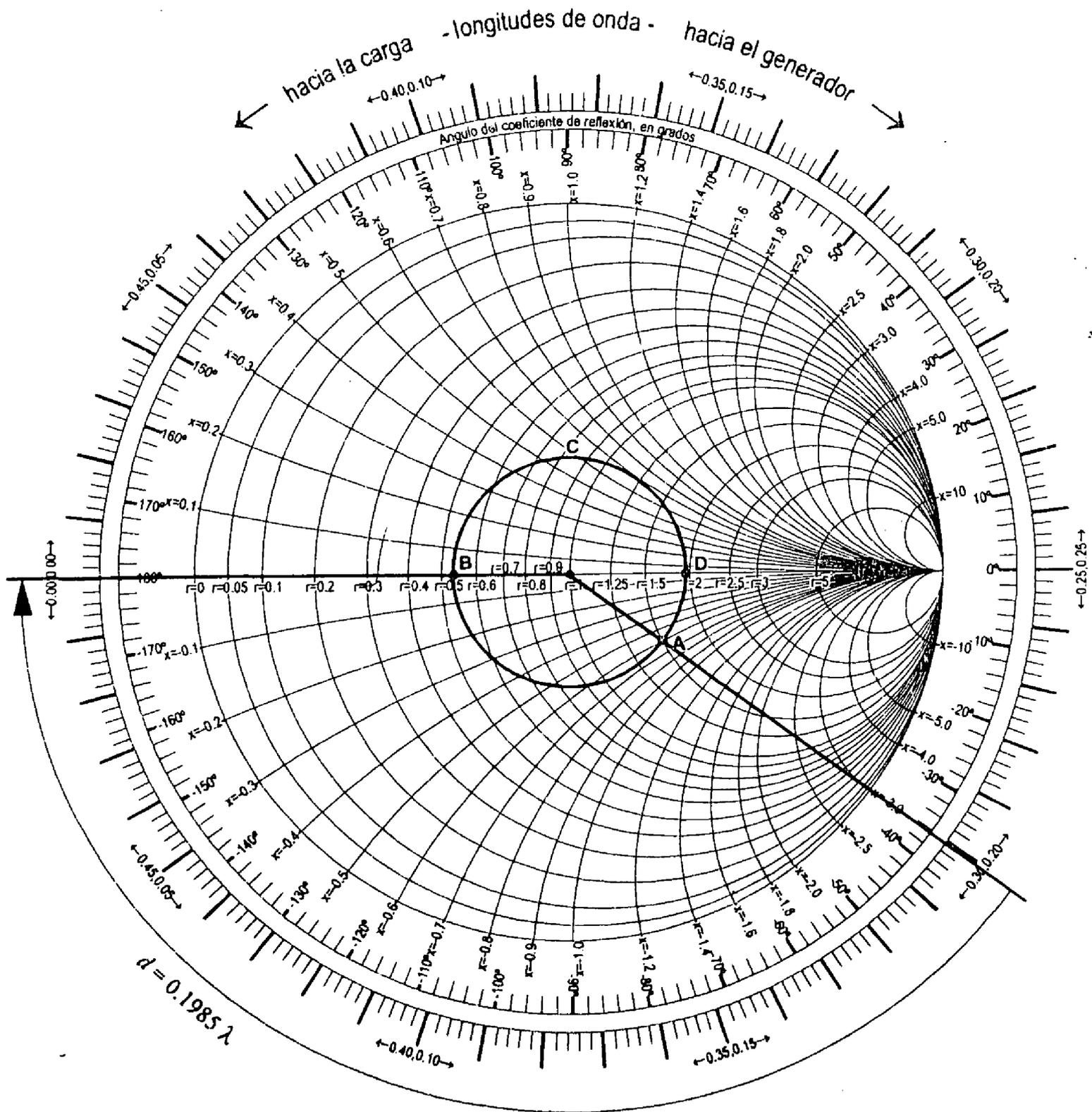
y normalizando,

$$\hat{z} = \frac{1}{VSWR} < 1$$

O sea que en el punto de voltaje mínimo, la impedancia normalizada de la línea es puramente resistiva y menor que 1. De allí que el punto correspondiente a dicho mínimo se encuentra sobre el círculo C al cruzar el eje horizontal (reactancia cero) y del lado izquierdo (donde la resistencia normalizada es menor que 1). Este punto se muestra representado por B en la carta. Su posición (yendo de la carga hacia el generador) se lee en la escala exterior de la carta y es igual a  $0.1985 \lambda$ , lo cual, considerando pequeños márgenes de error humano, coincide con el valor obtenido analíticamente.

c) De la ec. (2-56) se tiene que la relación de voltajes de la onda estacionaria,  $V_{SWR}$ , es igual a:

$$V_{SWR} = \frac{1 + |\rho_v|}{1 - |\rho_v|} = \frac{1 + 0.304}{1 - 0.304} = \frac{1.304}{0.696} = 1.87$$



Carta de Smith del Ejercicio 2-21

En la carta de Smith, dicho  $VSWR$  se lee directamente en el punto de cruce del círculo  $C$  con el eje horizontal, donde el voltaje es máximo. Esto es fácilmente comprobable a partir de la ec. (2-57), que nos indica que la impedancia de la línea en un punto donde el voltaje es máximo también es puramente resistiva e igual a:

$$Z = (VSWR)Z_0$$

y normalizando:

$$\hat{z} \Big|_{V_{\max}} = VSWR > 1$$

Este punto se indica en la carta como  $D$  y se observa que, evidentemente, concuerda con el resultado analítico.

## 2.14 Pérdidas en una línea y eficiencia de transmisión de potencia

En las últimas secciones de este capítulo se ha considerado que la atenuación  $\alpha$  en la línea es despreciable, ya que a altas frecuencias  $\omega L \gg R$  y  $\omega C \gg G$ , lo cual permite aproximar a  $Z_0$  y  $\gamma$ , como se indicó en la sección 2.9, por:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad = (2-49)$$

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad = (2-48)$$

También ya se dijo anteriormente que esta consideración es válida en muchos casos prácticos, pues la mayoría de las líneas de dos conductores son eléctricamente cortas y las pérdidas acumuladas hasta llegar a la carga son muy pequeñas. Sin embargo, hay situaciones (larga distancia) en las que es necesario tomar en consideración el efecto del coeficiente de atenuación  $\alpha$ , ya que éste influye sobre parámetros como el coeficiente de reflexión, la impedancia de entrada, y la potencia que finalmente es entregada a la carga. En realidad, el análisis matemático no es tan complicado como pudiese parecer a primera vista. A continuación se verá cuál es el procedimiento a seguir.

Partiendo de la *ec. (2-15)* y conservando la consideración de que  $R \ll \omega L$  y  $G \ll \omega C$ , se pueden hacer el siguiente desarrollo algebraico y la aproximación que se indica, empleando la expansión binomial:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} && = (2-15) \\ \gamma &= \left[ \sqrt{j\omega L} \sqrt{1 + \frac{R}{j\omega L}} \right] \left[ \sqrt{j\omega C} \sqrt{1 + \frac{G}{j\omega C}} \right] \\ &= j\omega \sqrt{LC} \sqrt{1 + \frac{R}{j\omega L}} \sqrt{1 + \frac{G}{j\omega C}} \\ &\approx j\omega \sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{R}{j2\omega L} \right] \left[ 1 + \frac{G}{j2\omega C} \right] \\ &\approx j\omega \sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{R}{j2\omega L} + \frac{G}{j2\omega C} \right] = \alpha + j\beta \end{aligned}$$

de donde, considerando que  $Z_0$  sigue dada por la *ec. (2-49)*:

$$\alpha = \frac{R\sqrt{LC}}{2L} + \frac{G\sqrt{LC}}{2C} = \frac{1}{2} \left[ \frac{R}{Z_0} + GZ_0 \right] \quad (2-80)$$

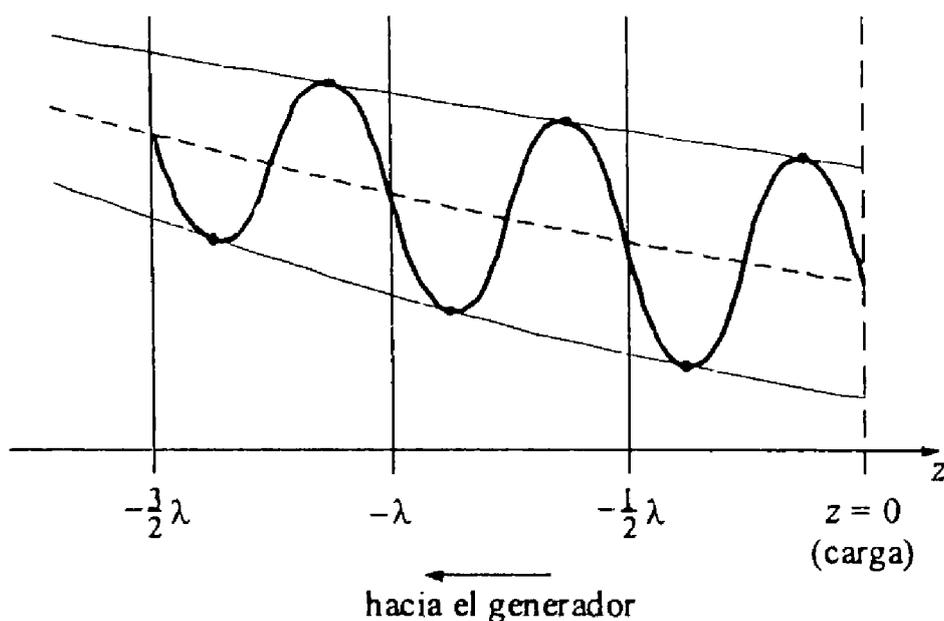
y  $\beta$  es igual a:

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (2-81)$$

Nótese que  $\beta$  dada por la *ec. (2-81)* es la misma que la de la *ec. (2-48)*, mientras que  $\alpha$  ahora es diferente de cero y está dada por la *ec. (2-80)*. Ahora bien, en la mayoría de los casos, las pérdidas en el dieléctrico de una línea pueden ser despreciables en comparación con las pérdidas en los conductores, hasta cierta frecuencia, en cuyo caso se puede ignorar al segundo término de la *ec. (2-80)* y aproximar aún más a  $\alpha$  por:

$$\alpha = \frac{R}{2Z_0} \quad \text{Nepers/m} \quad (2-82)$$

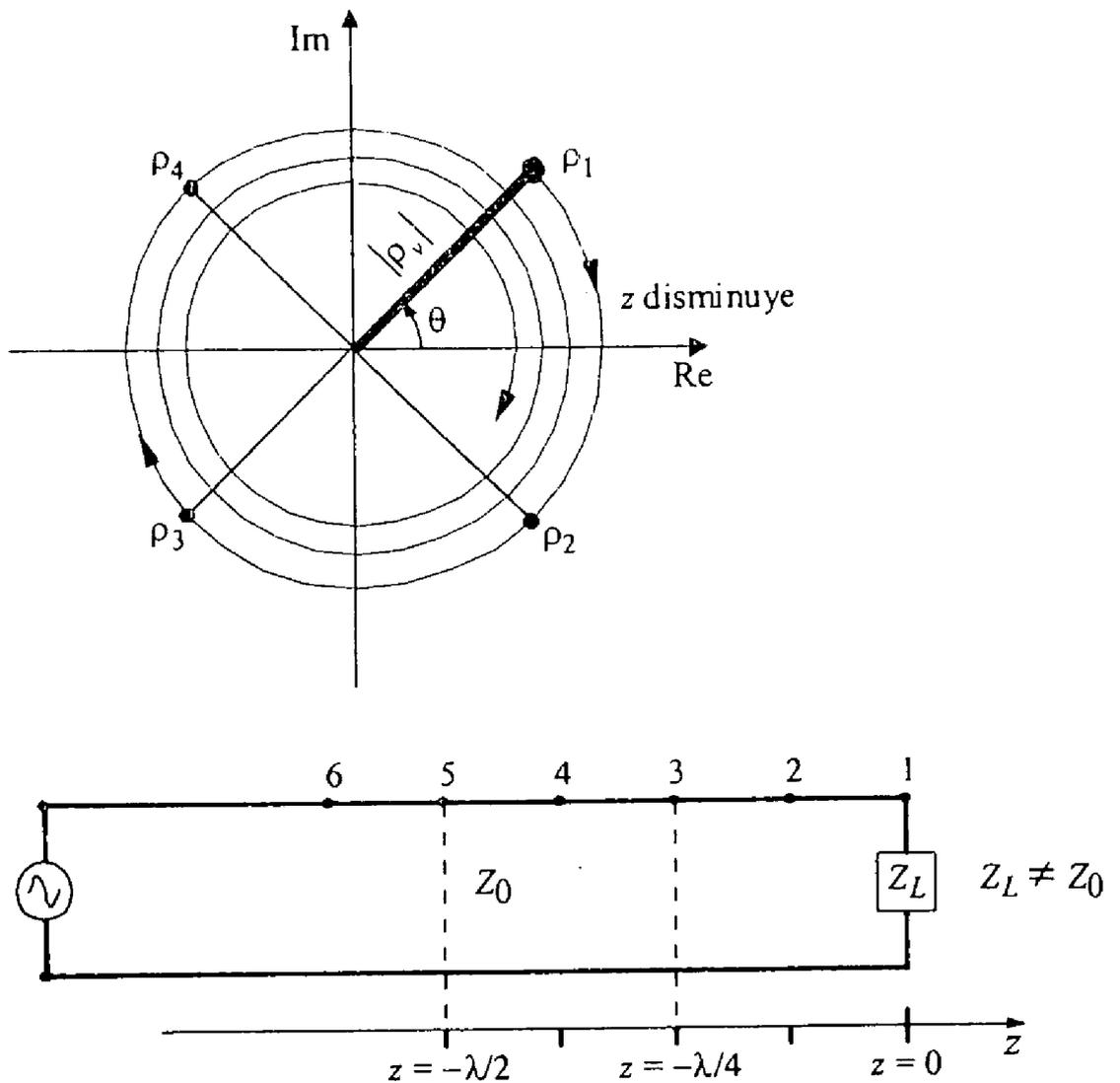
En este nuevo escenario de estudio, es obvio que una onda de voltaje que parta del generador y avance a lo largo de la línea hacia la carga se irá atenuando o amortiguando, tal como se indicó en la Fig. 2-14. Si la línea está desacoplada, la onda de voltaje que se refleje también se irá atenuando conforme avance hacia el generador. La onda estacionaria resultante será la superposición de ambas ondas amortiguadas (Fig. 2-34). Por supuesto, el grado de amortiguamiento dependerá del tipo de línea, es decir, de la atenuación que ésta produzca por unidad de longitud. Si la línea es lo suficientemente larga y su atenuación acumulada es alta, entonces la onda reflejada (cuya magnitud al partir de la carga hacia el generador es pequeña, debido a la atenuación sufrida ya por la onda incidente) tiene niveles despreciables para cuando llega al generador. La Fig. 2-34 pone de manifiesto que la onda estacionaria va disminuyendo conforme uno se aleja de la carga y se dirige hacia el generador. Cerca de éste, la onda estacionaria estaría formada casi exclusivamente por la onda incidente.



**Fig. 2-34** Patrón típico de una onda estacionaria con pérdidas, tomando en consideración el coeficiente de atenuación  $\alpha \neq 0$ .

¿Qué efecto puede tener el hecho de que  $\alpha \neq 0$  sobre el coeficiente de reflexión de voltajes? Si se recuerda, dicho coeficiente es la relación entre el voltaje reflejado y el voltaje incidente en cualquier punto de la línea; es decir, a partir de la ec. (2-60):

$$\rho_v(z) = \frac{Be^{\gamma z}}{Ae^{-\gamma z}} = \left(\frac{B}{A}\right)e^{2\gamma z} \quad (z \leq 0) \quad = (2-60)$$



**Fig. 2-35** Línea desacoplada con pérdidas ( $\alpha \neq 0$ ) y lugar geométrico del coeficiente de reflexión asociado con la onda estacionaria de voltaje. El desplazarse hacia el generador equivale a girar en el sentido de las manecillas del reloj en el plano complejo.

En la carga, donde  $z = 0$ :

$$\rho_L = \rho_v(0) = \frac{B}{A} = |\rho_L| e^{j\theta} \quad = (2-53)$$

Pero para otro valor de  $z$ , como  $\gamma = \alpha + j\beta$ :

$$\rho_v(z) = \frac{B}{A} e^{2z(\alpha + j\beta)} = \frac{B}{A} e^{2\alpha z} e^{j2\beta z} = \underbrace{|\rho_L| e^{2\alpha z}}_{\text{magnitud}} e^{j(2\beta z + \theta)} \quad (2-83)$$

Se concluye que el coeficiente de reflexión sigue valiendo lo mismo en la carga que cuando  $\alpha = 0$ , y está dado por la *ec.* (2-33). Sin embargo, para otros puntos con  $z \neq 0$ , la magnitud de dicho coeficiente va disminuyendo conforme nos alejamos de la carga hacia el generador; su fase sigue variando de la misma manera que para una línea sin pérdidas, pues el coeficiente  $\beta$  está dado por fórmulas idénticas (*ec.* 2-81). De todo esto, también se deduce que su lugar geométrico en el plano complejo ya no es un círculo como el de la Fig. (2-26), sino una espiral como la mostrada en la Fig. 2-35.

La impedancia de entrada se calcula a partir de la *ec.* (2-34), pues ésta se dedujo para el caso general en que  $\gamma = \alpha + j\beta$ ; también se puede usar la *ec.* (2-35). Para cualquier otro punto de la línea, recuérdese que  $l$  en ambas ecuaciones simplemente se puede sustituir por la distancia que haya entre la carga y dicho punto.

Por lo que se refiere a los casos especiales vistos en la sección 2.8, para líneas terminadas en corto circuito y en circuito abierto, la impedancia de entrada tiene una componente resistiva debido al efecto de considerar la atenuación  $\alpha$  en la *ec.* (2-35). Pero si la línea es corta, esta componente es muy pequeña y, por lo tanto, se puede suponer que su impedancia de entrada es puramente reactiva, con muy pequeño margen de error.

El valor del *ROE* o *VSWR* también cambia en diferentes puntos a lo largo de la línea. Mientras el punto considerado esté más lejos de la carga, el voltaje incidente se irá haciendo más grande y el reflejado se hará más pequeño (al atenuarse en dirección hacia el generador); por lo tanto, el *ROE* también decrecerá. Su valor está dado por la *ec.* (2-56) con la magnitud  $|\rho_v|$  calculada por la *ec.* (2-83), que toma en cuenta la atenuación de la línea. Es decir:

$$VSWR = \frac{1 + |\rho_v|}{1 - |\rho_v|} = \frac{1 + |\rho_L| e^{2\alpha z}}{1 - |\rho_L| e^{2\alpha z}} \quad (z \leq 0) \quad (2-84)$$

Finalmente, lo que más importa es qué porcentaje de la potencia inicial es entregada a la carga. Mientras mayor sea este porcentaje, la línea será más eficiente. Por lo tanto, la eficiencia  $\eta$  de una línea se define como:

$$\eta = \frac{\text{potencia promedio entregada a la carga}}{\text{potencia promedio de entrada al principio de la línea}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_L I_L^*]}{\frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_{entr.} I_{entr.}^*]} = \frac{\operatorname{Re} [V_L I_L^*]}{\operatorname{Re} [V_{entr.} I_{entr.}^*]} \quad (2-85)$$

Si las pérdidas de la línea son pocas y la carga está más o menos acoplada a la línea ( $Z_L \approx Z_0$ ), la eficiencia será alta. Pero, en el caso extremo opuesto, si la línea tiene altas pérdidas y la impedancia de la carga es muy diferente a la impedancia característica, dicha eficiencia será muy baja.

Cuando una línea está desacoplada, su eficiencia puede mejorarse por medio de técnicas de “acoplamiento de impedancias”, añadiendo pequeños segmentos de línea en serie o en paralelo, conectados en el lugar apropiado. Estas técnicas se verán en la sección 2-16.

Como la potencia entregada a la carga depende del coeficiente de reflexión (ó del  $VSWR$ ) en dicho punto, conviene deducir una expresión que los relacione. El procedimiento es sencillo y primero se hará para una línea sin pérdidas. En la carga:

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V_L I_L^*]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \left( \underbrace{Ae^{-j\beta z}}_{V_i} + \underbrace{Be^{j\beta z}}_{V_r} \right) \left( \frac{1}{Z_0} \right) (A^* e^{j\beta z} - B^* e^{-j\beta z}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} \left[ AA^* - BB^* - AB^* e^{-j2\beta z} + A^* B e^{j2\beta z} \right] \\
&= \frac{1}{2Z_0} \operatorname{Re} \left[ |A|^2 - |B|^2 - \underbrace{\left( A^* B e^{j2\beta z} \right)^* + \left( A^* B e^{j2\beta z} \right)}_{\text{parte real igual a cero}} \right] \\
&= \frac{1}{2Z_0} \left[ |A|^2 - |B|^2 \right] = \frac{1}{2Z_0} \left[ |V_i|^2 - |V_r|^2 \right] \quad (2-86)
\end{aligned}$$

Como se está suponiendo que la línea no tiene pérdidas, la magnitud del voltaje de entrada sería igual a la magnitud del voltaje incidente en la carga. Por lo tanto,

$$P_{\text{entrada}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ V_{\text{entr.}} I_{\text{entr.}}^* \right] = \frac{1}{2Z_0} |V_i|^2 \quad (2-87)$$

Sustituyendo (2-86) y (2-87) en la ec. (2-85):

$$\eta = \frac{|V_i|^2 - |V_r|^2}{|V_i|^2} = 1 - \left\{ \frac{|V_r|}{|V_i|} \right\}^2 = 1 - |\rho_L|^2 \quad (2-88)$$

Y si la ec. (2-59) se sustituye a su vez en la ec. (2-88), se puede obtener otra expresión para la eficiencia de la línea en función del ROE o VSWR:

$$\begin{aligned}
\eta &= 1 - \left( \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} \right)^2 \\
&= \frac{VSWR^2 + 2VSWR + 1 - VSWR^2 + 2VSWR - 1}{VSWR^2 + 2VSWR + 1} \\
&= \frac{4(VSWR)}{(VSWR + 1)^2} \quad (2-89)
\end{aligned}$$

Para una línea con pérdidas de longitud  $l$ , el voltaje y la corriente incidentes en la carga pueden calcularse a partir de las variables respectivas de entrada, tomando en cuenta una atenuación acumulativa de  $\alpha l$  y su defasamiento respectivo, por ejemplo, utilizando la ec. (2-65):

$$\begin{bmatrix} V_L \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{\text{entrada}} \\ I_{\text{entrada}} \end{bmatrix} \quad = (2-65)$$

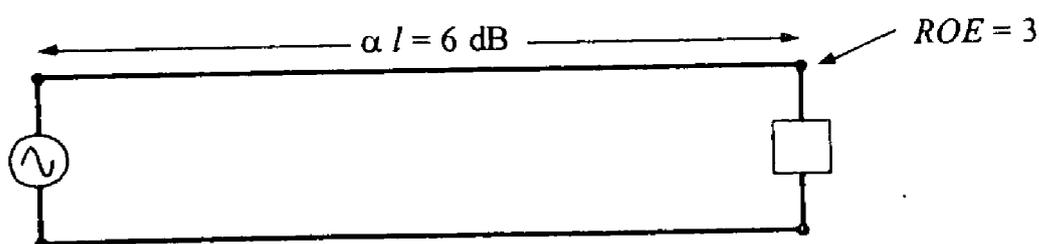
Conocidas estas cuatro variables (dos en cada extremo de la línea), la aplicación de la ec. (2-85) es inmediata.

Ya para concluir esta sección e iniciar el desarrollo de algunos ejercicios, debemos recordar que en ingeniería muchas cantidades que representan pérdidas se expresan en decibeles. En el caso de la potencia que se refleja en la carga de una línea desacoplada hacia el generador, se le da el nombre de *pérdidas de retorno*\*. La ec. (2-88) muestra que  $|\rho_L|^2$  es la fracción de la potencia incidente que no es entregada a la carga, es decir, que se refleja. Por lo tanto, las pérdidas de retorno se calculan como:

$$RL = -10 \log |\rho_L|^2 = -20 \log |\rho_L| \quad [\text{dB}] \quad (2-90)$$

**Ejercicio 2-22** Una línea de cierta longitud acumula una atenuación de 6 dB desde el generador hasta la carga. Muy cerca de este último punto el ROE vale 3. ¿Cuánto vale el ROE al principio de la línea?

*Solución*



\* En inglés, *return loss* o *RL*.

Se puede utilizar la ec. (2-84), sustituyendo en lugar de  $|\rho_L|$  a la ec. (2-59):

$$\begin{aligned}
 ROE \Big|_{\text{cerca del generador}} &= \frac{1 + |\rho_L| e^{-2\alpha l}}{1 - |\rho_L| e^{-2\alpha l}} = \frac{1 + \left( \frac{ROE - 1}{ROE + 1} \right) e^{-2\alpha l}}{1 - \underbrace{\left( \frac{ROE - 1}{ROE + 1} \right) e^{-2\alpha l}}_{\text{Se usa el ROE cerca de la carga}}} \\
 &= \frac{e^{\alpha l} \left[ (ROE + 1) + (ROE - 1) e^{-2\alpha l} \right]}{e^{\alpha l} \left[ (ROE + 1) - (ROE - 1) e^{-2\alpha l} \right]} \\
 &= \frac{(ROE + 1) e^{\alpha l} + (ROE - 1) e^{-\alpha l}}{(ROE + 1) e^{\alpha l} - (ROE - 1) e^{-\alpha l}}
 \end{aligned}$$

Se nos dice que  $\alpha l = 6$  dB. Por lo tanto, empleando la ec. (2-20):

$$\alpha l = (8.686)(\alpha l \text{ en nepers}) = 6 \text{ dB} \Rightarrow \alpha l = 0.691 \text{ Np}$$

Para este caso, las funciones exponenciales valen:

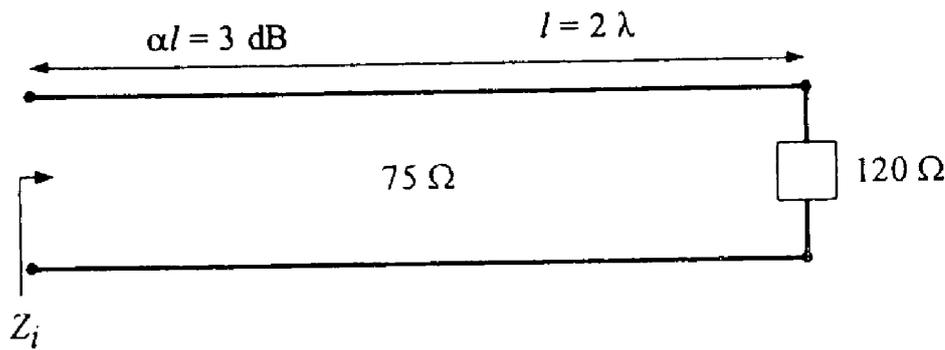
$$e^{\alpha l} = e^{0.691} = 2 \quad \text{y} \quad e^{-\alpha l} = e^{-0.691} = 0.5$$

Finalmente, sustituyendo los datos en la fórmula general:

$$ROE \Big|_{\text{cerca del generador}} = \frac{(4)(2) + (2)(0.5)}{(4)(2) - (2)(0.5)} = \frac{8 + 1}{8 - 1} = 1.28$$

**Ejercicio 2-23** Una línea tiene pérdidas totales de 3 dB entre el generador y la carga. La línea mide  $2\lambda$  y su impedancia característica es de  $75 \Omega$ . Si al final se conecta una carga de  $120 \Omega$ , ¿cuánto valen las pérdidas de retorno en la carga y la impedancia de entrada de la línea?

Solución



De la ec. (2-33):

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{120 - 75}{195} = 0.23 \angle 0^\circ$$

Las pérdidas de retorno están dadas por la ec. (2-90):

$$RL = -20 \log |\rho_L| = -20 \log 0.23 = 12.76 \text{ dB}$$

Por lo que se refiere a la impedancia de entrada de la línea, se puede utilizar la ec. (2-34):

$$Z_i = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma l}}$$

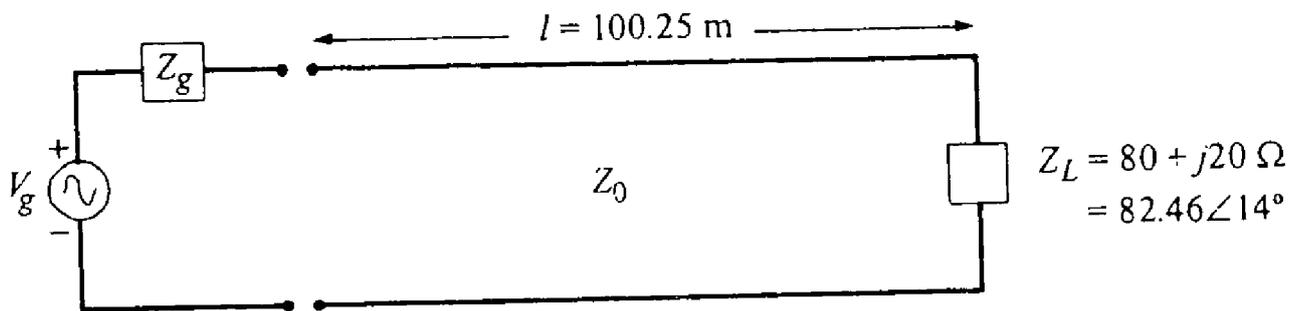
en donde  $\gamma l = \alpha l + j\beta l$ ,  $\alpha l = 3 \text{ dB} = 0.345 \text{ Np}$  y  $\beta l = (2\pi/\lambda)(2\lambda) = 4\pi$ .  
Sustituyendo:

$$\begin{aligned} Z_i &= 75 \left[ \frac{1 + (0.23)e^{-2(0.345 + j4\pi)}}{1 - (0.23)e^{-2(0.345 + j4\pi)}} \right] = 75 \left[ \frac{1 + (0.23)e^{-0.69} \angle 0^\circ}{1 - (0.23)e^{-0.69} \angle 0^\circ} \right] \\ &= 75 \left[ \frac{1 + 0.1153}{1 - 0.1153} \right] = 94.5 \Omega \end{aligned}$$

Nótese que si la línea se hubiese considerado sin pérdidas, la impedancia de entrada hubiese sido la misma que la de la carga, es decir,  $120 \Omega$ , ya que la longitud de la línea es un múltiplo entero de  $\lambda/2$ .

**Ejercicio 2-24** Una línea de 100.25 m de longitud tiene los siguientes parámetros:  $R = 0.344 \Omega/\text{m}$ ,  $L = 150 \text{ nH}/\text{m}$ ,  $G = 120 \text{ nS}/\text{m}$  y  $C = 60 \text{ pF}/\text{m}$ . El oscilador que alimenta a la línea tiene una impedancia interna de  $50 \Omega$  y un voltaje de salida en circuito abierto de  $2 \text{ V}$  a  $600 \text{ MHz}$ . La carga es igual a  $80 + j20 \Omega$ . Calcule: a) el voltaje total a la entrada y al final de la línea (en la carga), b) la eficiencia de la línea.

*Solución*



$$V_g = 2 \angle 0^\circ \text{ V} \quad Z_g = 50 \Omega$$

$$f = 600 \text{ MHz} \Rightarrow \lambda = 0.5 \text{ m} \Rightarrow l = 200 \lambda + \frac{\lambda}{2}$$

La impedancia característica se calcula con la ec. (2-49):

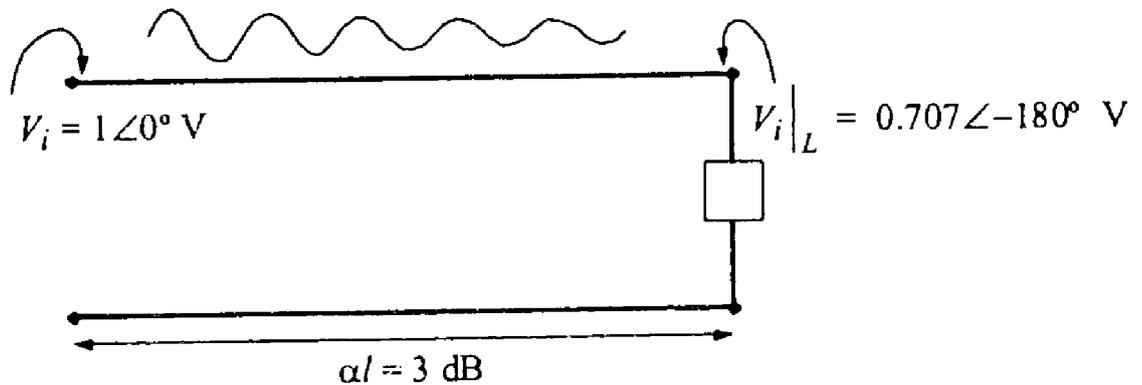
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1500 \times 10^{-10}}{60 \times 10^{-12}}} = 50 \Omega$$

Por lo tanto, la línea está acoplada al generador, y el voltaje inicial de entrada, ANTES de dirigirse hacia la carga es  $1 \angle 0^\circ \text{ V}$ .

La atenuación total en los 100.25 m que mide la línea se calcula con la ec. (2-80):

$$\begin{aligned} \alpha l &= \frac{l}{2} \left[ \frac{R}{Z_0} + GZ_0 \right] = \frac{100.25}{2} \left[ \frac{0.344}{50} + (120 \times 10^{-9})(50) \right] \\ &= 0.345 + 0.3 \times 10^{-3} = 0.3453 \text{ Np} = 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

En términos de voltajes, 3 dB de atenuación significa que el voltaje se atenúa a  $(1/\sqrt{2})$  veces su valor inicial. Por lo tanto, para esta línea se tiene la situación siguiente, ANTES de la reflexión en la carga:



Para saber qué porcentaje del voltaje incidente en la carga se refleja hacia el generador, es necesario calcular primero al coeficiente de reflexión de voltajes en la carga, con la ec. (2-33):

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{80 + j20 - 50}{80 + j20 + 50} = \frac{30 + j20}{130 + j20} = 0.274 \angle 25^\circ$$

Del voltaje que llega como incidente a la carga, se reflejará entonces una parte igual a:

$$V_r|_L = V_i|_L \times \rho_L = (0.707 \angle -180^\circ)(0.274 \angle 25^\circ) = 0.194 \angle -155^\circ \text{ V}$$

Este voltaje reflejado viajará de regreso hacia el generador y se atenuará 3 dB a su vez, además de desfasarse lo correspondiente a  $200 \lambda + \lambda/2$ , que es la longitud de la línea. Es decir:

$$\begin{aligned} V_r|_{\text{principio de la línea}} &= \left( V_r|_L \right) (0.707 \angle -180^\circ) = (0.194 \angle -155^\circ) (0.707 \angle -180^\circ) \\ &= 0.137 \angle 25^\circ \end{aligned}$$

Ahora sí podemos responder al inciso a) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{total a la entrada}} &= V_i + V_r \Big|_{\substack{\text{principio} \\ \text{de la línea}}} = 1 + 0.137 \angle 25^\circ \\
 &= 1.1242 + j0.0579 = 1.125 \angle 3^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\text{total en la carga}} &= V_i \Big|_L + V_r \Big|_L = 0.707 \angle -180^\circ + 0.194 \angle -155^\circ \\
 &= -0.707 - 0.176 - j0.08198 = 0.887 \angle -175^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

La potencia promedio entregada a la carga es:

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_L I_L^*] = \frac{1}{2} |I_L|^2 R_L = \frac{1}{2} \left| \frac{V_L}{Z_L} \right|^2 R_L$$

en donde  $R_L$  es la parte real de  $Z_L$ .

Sustituyendo valores:

$$P_L = \frac{1}{2} \left( \frac{0.887}{82.46} \right)^2 (80) = 4.63 \text{ mW}$$

Y la potencia promedio al principio de la línea es:

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_i I_i^*] = \frac{1}{2} \left| \frac{V_{i,\text{total}}}{Z_i} \right|^2 R_i$$

De la ec. (2-34):

$$\begin{aligned}
 Z_i &= Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma l}} = 50 \left[ \frac{1 + 0.274 \angle 25^\circ e^{-2(0.3453 + j\pi)}}{1 - 0.274 \angle 25^\circ e^{-2(0.3453 + j\pi)}} \right] \\
 &= 50 \left[ \frac{1 + (0.274)(0.5) \angle 25^\circ}{1 - (0.274)(0.5) \angle 25^\circ} \right] = 50 \left[ \frac{1.1242 + j0.05789}{0.8759 - j0.05789} \right] \\
 &= 63.67 + j7.5 \, \Omega = 64.12 \angle 6.7^\circ \, \Omega
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$P_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1.125}{64.12} \right)^2 (63.67) = 9.8 \, \text{mW}$$

y de la ec. (2-85), la eficiencia de la línea pedida en el inciso b) es:

$$\eta = \frac{4.63}{9.8} = 47\%$$

**Ejercicio 2-25** Para la línea del ejercicio anterior, vuelva a calcular su eficiencia suponiendo que la línea está acoplada a la carga, es decir, que  $Z_L = 50 \, \Omega$ . Efectúe sus cálculos para: a) línea con pérdidas y b) línea sin pérdidas. Después suponga que la línea sigue desacoplada, pero que las pérdidas son muy pocas, y c) evalúe su eficiencia con  $\alpha = 0$ .

*Solución*

En los casos a) y b) no hay voltaje reflejado porque  $\rho_L = 0$ .

Caso a).- Línea con pérdidas.

El voltaje incidente en la carga es:

$$V_i \Big|_L = 0.707 \angle -180^\circ = V_{\text{total en la carga}}$$

El voltaje total a la entrada de la línea es:

$$V_{\text{total a la entrada}} = 1$$

La impedancia de entrada es igual a  $Z_0$ . Por lo tanto:

$$P_{\text{carga}} = \frac{1}{2} \left| \frac{V_L}{Z_L} \right|^2 R_L = \frac{1}{2} \left( \frac{0.707}{50} \right)^2 (50) = 5 \text{ mW}$$

$$P_{\text{entrada}} = \frac{1}{2} \left| \frac{V_i}{Z_i} \right|^2 R_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{50} \right)^2 (50) = 10 \text{ mW}$$

$$\eta = \frac{5}{10} = 50\%$$

Se verifica que, al haber una atenuación de 3 dB, la potencia inicial se reduce a la mitad en la carga. Con relación a la línea desacoplada del ejercicio anterior, sólo hay una diferencia del 3% en eficiencia.

Caso b).- Línea sin pérdidas.

En este caso, al no haber atenuación, la potencia en la carga sería igual a la potencia de entrada, y la eficiencia sería del 100%, sin importar su longitud (caso ficticio).

Caso c).- Línea desacoplada con  $\alpha = 0$ .

En este caso se puede utilizar la ec. (2-88):

$$\eta = 1 - |\rho_L|^2 = 1 - \underbrace{(0.274)^2}_{\text{del ejercicio anterior}} = 1 - 0.075 = 92.5\%$$

El cuadro siguiente concentra, para fines comparativos, las eficiencias encontradas en este ejercicio y el anterior.

Eficiencia  $\eta$

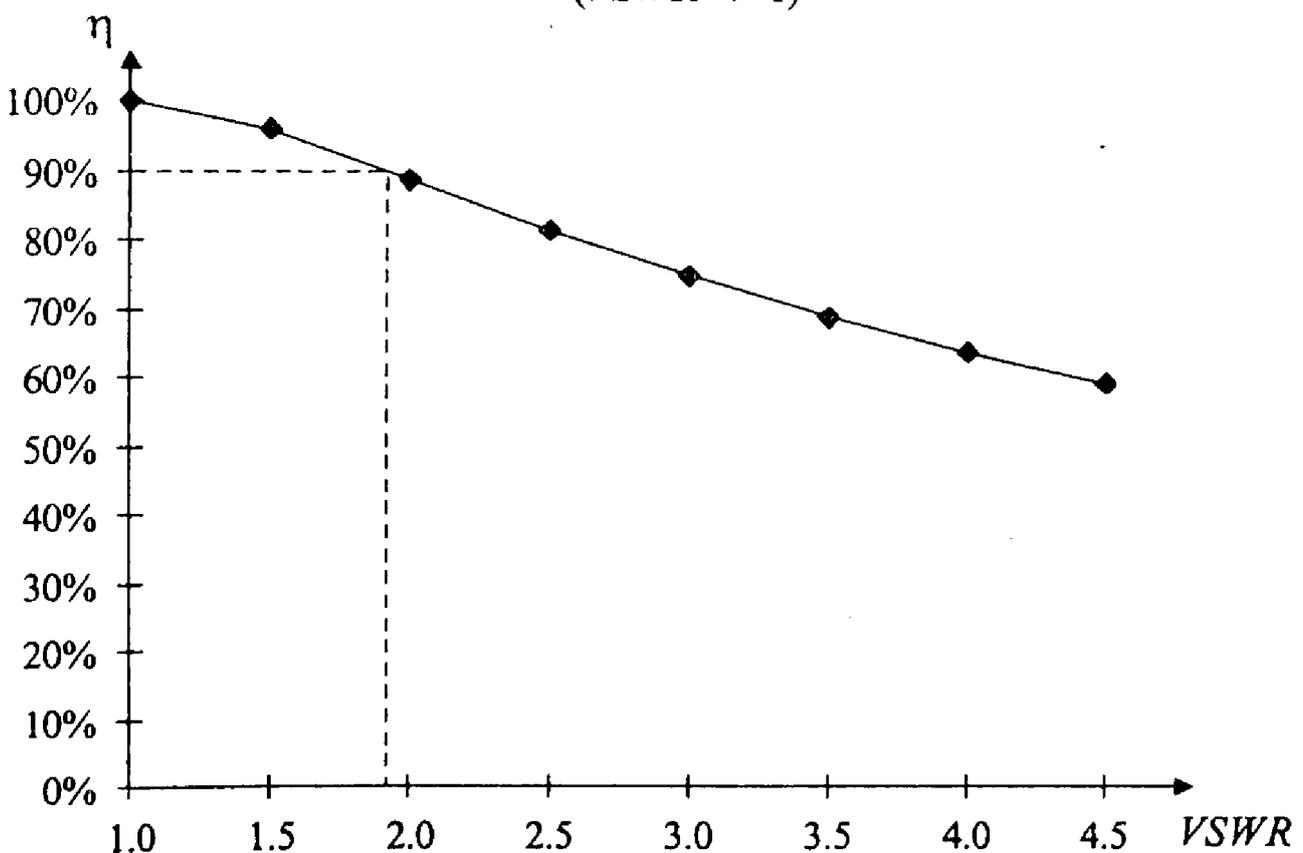
	con pérdidas ( $\alpha = 3$ dB)	sin pérdidas
Línea desacoplada $Z_L = 80 + j20 \Omega$ $Z_0 = 50 \Omega$	47 %	92.5 %
Línea acoplada $Z_L = Z_0 = 50 \Omega$	50 %	100 %

**Ejercicio 2-26** El *VSWR* de una línea sin pérdidas vale 2, bajo ciertas condiciones de trabajo. ¿Cuánto vale la eficiencia de la línea? Haga una gráfica de la eficiencia en función del *VSWR* y comente sobre ella.

*Solución*

La función que se pide graficar está dada por la ec. (2-89):

$$\eta = \frac{4 (VSWR)}{(VSWR + 1)^2}$$



Cuando  $VSWR = 2$ ,  $\eta = 8/9 = 88.88\%$ . La gráfica de la función es la mostrada en la página anterior.

Se observa que para obtener más del 90% de la potencia entregada a la carga, el  $VSWR$  puede valer desde 1.0 hasta 1.92. Es decir que no es necesario luchar demasiado para que el  $VSWR$  esté cerca de la unidad, pues aún un valor cercano a 2.0 dará valores satisfactorios, por lo que se refiere a máxima transferencia de potencia.

Desde luego, en el caso general práctico también habrá que considerar la longitud de la línea, cuando la atenuación total acumulada sea significativa, pues la eficiencia disminuirá al disminuir la potencia que realmente incide sobre la carga.

## 2.15 Uso de la carta de Smith para líneas con pérdidas

En la última sección quedó de manifiesto que cuando las pérdidas por atenuación de una línea son consideradas, la magnitud del coeficiente de reflexión de voltajes no es constante a lo largo de la línea (véanse la ec. (2-83) y la Fig. 2-35). Por lo tanto, si se desea utilizar el método de la carta de Smith para resolver algún problema determinado, hay que tomar esta diferencia de magnitud en consideración, con el fin de hacer los ajustes necesarios y obtener lecturas correctas. Partiendo nuevamente de la ec. (2-73), la impedancia normalizada, en general, es:

$$\hat{z} = \frac{1 + \rho_v(z)}{1 - \rho_v(z)} \quad = (2-73)$$

con

$$\rho_v(z) = \rho_L e^{j2\beta z} = |\rho_L| e^{j\theta} e^{j2\beta z} \quad = (2-61)$$

(para una línea sin pérdidas)

Si se añade el efecto de la atenuación  $2\alpha z$  al avanzar cierta distancia  $z$ , las ecuaciones anteriores se modifican y toman la forma siguiente:

$$\hat{z} = \frac{1 + |\rho_L| e^{j\theta} e^{j2\beta z} (e^{2\alpha z})}{1 - |\rho_L| e^{j\theta} e^{j2\beta z} (e^{2\alpha z})} \quad (z \leq 0)$$

$$= \frac{1 + \{|\rho_L| e^{2\alpha z}\} e^{j(\theta+2\beta z)}}{1 - \{|\rho_L| e^{2\alpha z}\} e^{j(\theta+2\beta z)}} \quad (2-91)$$

$$\rho_v(z) = |\rho_L| e^{2\alpha z} e^{j(\theta+2\beta z)} \quad (2-83)$$

Las ecs. (2-74) y (2-75) siguen siendo válidas:

$$\hat{z}(z) = r + jx \quad (2-74)$$

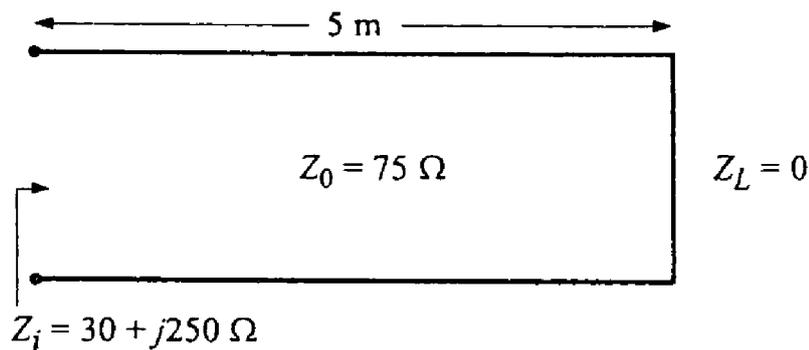
$$\rho_v(z) = u + jv \quad (2-75)$$

De allí que es posible trabajar sobre la misma carta de Smith diseñada para líneas sin pérdidas, haciendo los ajustes necesarios, aunque se requiere tener cierta práctica para no omitir ningún detalle. En realidad, este tema casi no es tratado en ningún libro de texto general para estudiantes de ingeniería, pero aquí lo mencionamos como una alternativa útil diferente a la solución analítica.

A continuación se presentarán dos ejemplos, indicando los pasos que deben seguirse para resolver gráficamente problemas sencillos de líneas con pérdidas.

**Ejercicio 2-27** La impedancia de entrada de una línea terminada en corto circuito es de  $30 + j250 \Omega$  (nótese que ya no es reactiva pura). La línea mide 5 metros y su impedancia característica es de  $75 \Omega$ . Calcule utilizando la carta de Smith: a) las constantes de atenuación y de fase ( $\alpha$  y  $\beta$ ), b) la impedancia de entrada que tendría la misma línea si estuviese terminada con una carga de  $Z_L = 112.5 - j15 \Omega$ .

## Solución



a) Cálculo de  $\alpha$  y  $\beta$ :

Normalizando primero las impedancias:

$$\hat{z}_L = 0$$

$$\hat{z}_i = \frac{30 + j250}{75} = 0.4 + j3.33$$

En la carta, la carga se ubica en el punto A. El punto B representa a la impedancia de entrada. Para encontrarlo, se tuvo que girar en la carta hacia el generador un total de  $0.204 \lambda$ . De allí que la longitud de la línea sea igual a:

$$l = 0.204 \lambda = 5 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 24.51 \text{ m}$$

y 
$$\beta = 2\pi/\lambda = 0.081\pi \text{ rad/m}$$

Para encontrar  $\alpha$  se utiliza una sencilla “regla de tres”. Nótese que si la línea no tuviese pérdidas, el punto B hubiese quedado en el mismo círculo que A, pues la resistencia de entrada valdría cero. Representemos este punto para el caso sin pérdidas como B', en donde la magnitud del coeficiente de reflexión sería igual a la unidad. De acuerdo con la ec. (2-83):

$$\frac{|\rho_L| e^{-2\alpha l}}{\overline{OB}} = \frac{\overbrace{|\rho_L|}^{=1}}{\overline{OB'}}$$

o bien:

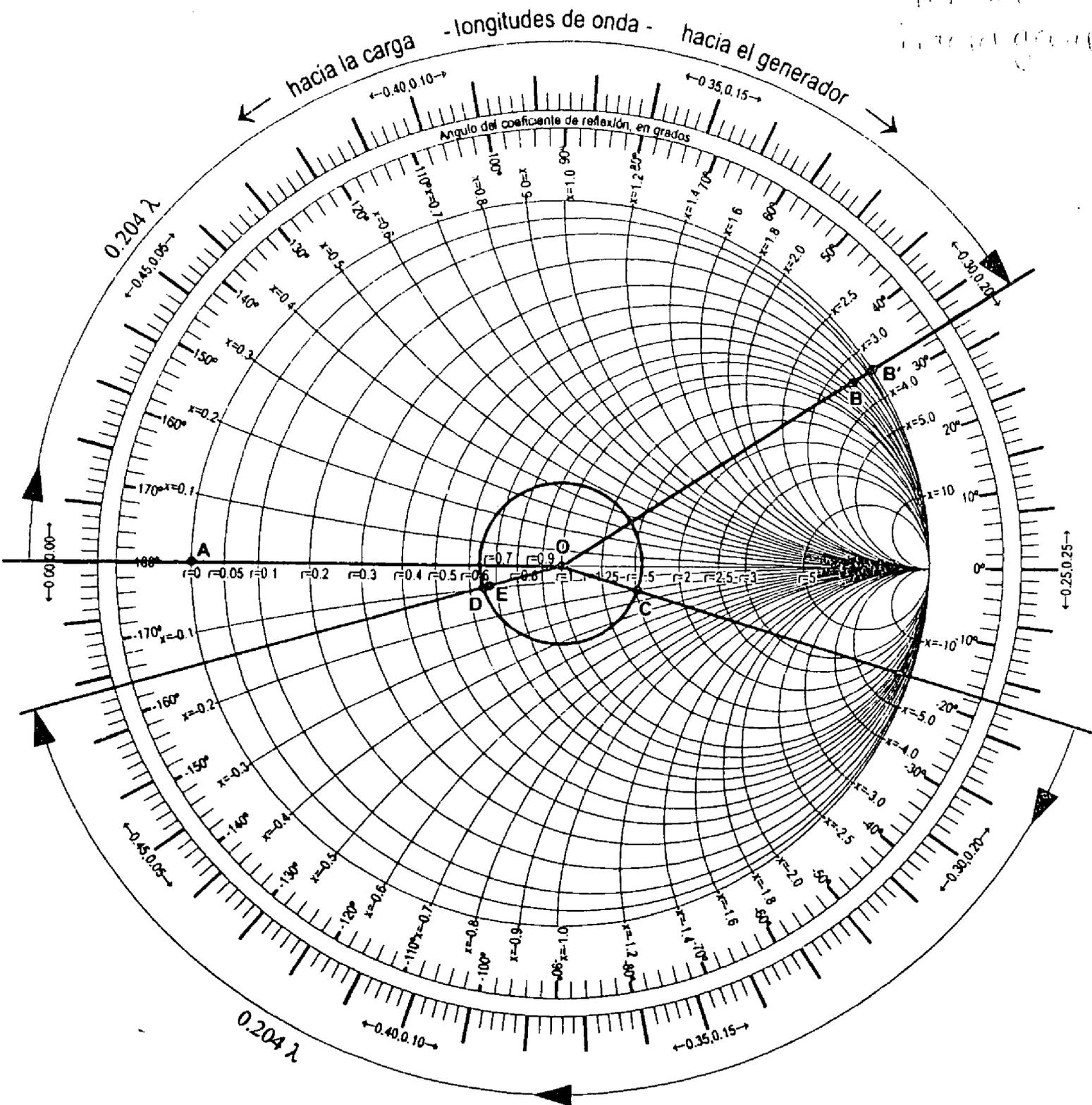
$$e^{-2\alpha l} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0.93$$

Como  $l = 5$  m, se obtiene que  $\alpha$  es igual a:

$$-2\alpha l = \ln 0.93 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\ln 0.93}{-10} = 0.00726 \text{ Np/m}$$

Por simple curiosidad, verifiquemos estos resultados empleando la ec. (2-34):

*Handwritten notes:*  
 Para  $\alpha = 0.00726$   
 $l = 5$  m  
 $2\alpha l = 0.0726$   
 $e^{-0.0726} = 0.93$



Carta de Smith del Ejercicio 2-27

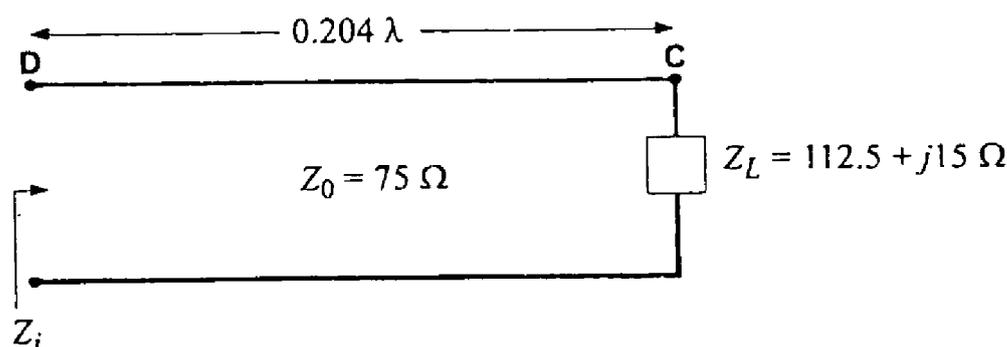
$$\begin{aligned}
 Z_i &= Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma l}} = 75 \left[ \frac{1 + \underbrace{(e^{j\pi}) e^{-2l(\alpha + j\beta)}}_{\rho_L = 1 \angle 180^\circ \text{ (cortocircuito)}}}{1 - \underbrace{(e^{j\pi}) e^{-2l(\alpha + j\beta)}}_{\rho_L = 1 \angle 180^\circ \text{ (cortocircuito)}}} \right] \\
 &= 75 \left[ \frac{1 + e^{j\pi} e^{-10(0.00726 + j0.081\pi)}}{1 - e^{j\pi} e^{-10(0.00726 + j0.081\pi)}} \right] \\
 &= 75 \left[ \frac{1 + (0.7692 + j0.5227)}{1 - (0.7692 + j0.5227)} \right] = 31 + j240 \ \Omega
 \end{aligned}$$

Comparando este resultado con el dato inicial de  $Z_i = 30 + j250 \ \Omega$ , se observa que hay un pequeño margen de error, debido a las aproximaciones visuales en el método gráfico. Sin embargo, el resultado se puede considerar aceptable y la verificación como un hecho.

b) Si el corto circuito se sustituye por  $Z_L = 112.5 - j15 \ \Omega$ :

$$\hat{z}_L = \frac{112.5 - j15}{75} = 1.5 - j0.2 \quad (\text{punto C en la carta})$$

A continuación podemos trazar el círculo  $|\rho_L|$  constante, suponiendo primero que la línea no tiene pérdidas, y avanzamos hacia el generador una distancia de  $0.204 \lambda$ , que es la longitud de la línea. De este modo, la impedancia de entrada sería el punto D.



Si consideramos ahora las pérdidas de la línea, su efecto será reducir la magnitud del coeficiente de reflexión, por lo que la verdadera impedancia

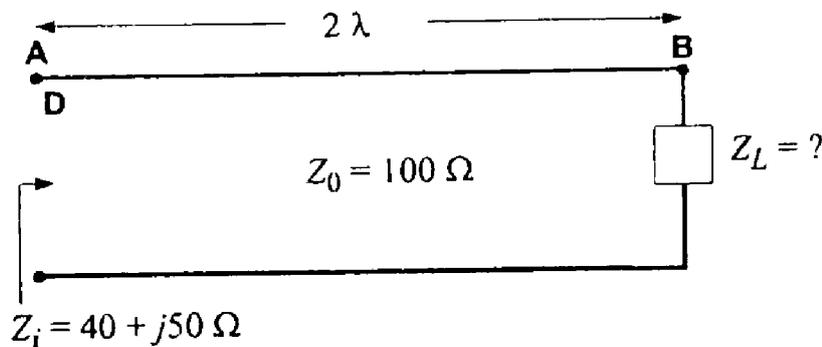
de entrada está en algún lugar sobre la recta  $\overline{OD}$ , digamos el punto E (aún por encontrarse). Nuevamente, se debe de cumplir la siguiente regla de tres, tomando en cuenta que la magnitud máxima de  $\rho$  sería ahora equivalente a  $\overline{OD}$ :

$$e^{-2\alpha l} = 0.93 = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}$$

Midiendo la distancia  $\overline{OD}$  con una regla y haciendo que se cumpla la relación anterior, se encuentra la posición que debe tener E, punto que se indica en la figura.

**Ejercicio 2-28** Una línea con pérdidas mide  $2\lambda$ . Su impedancia de entrada vale  $40 + j50 \Omega$  y su impedancia característica es de  $100 \Omega$ . ¿Cuánto vale la impedancia de la carga? Considere  $\alpha = 0.001$  Np/m y una frecuencia de trabajo de 300 MHz.

*Solución*



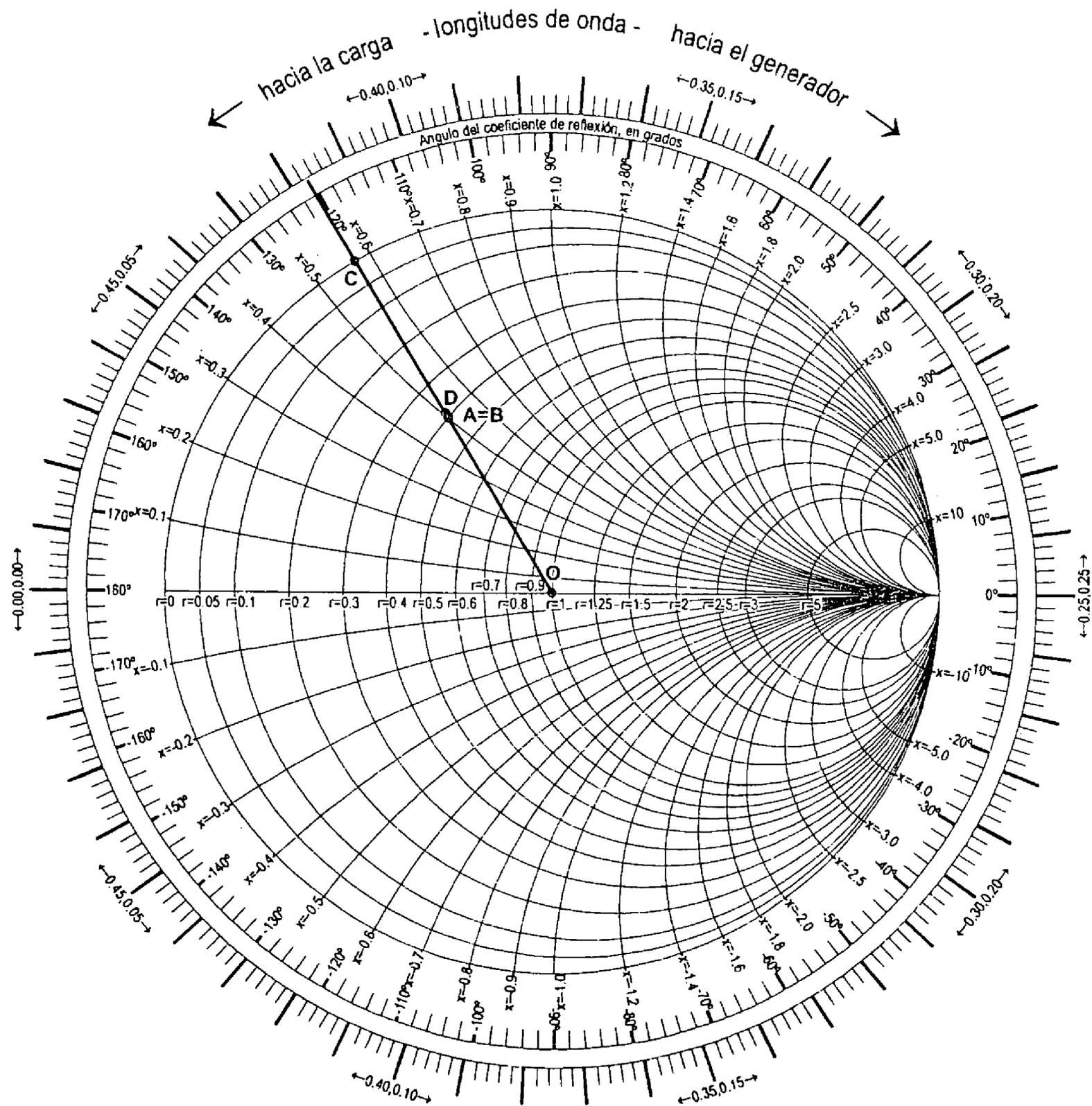
Si la línea no tuviese pérdidas,  $Z_L$  sería igual a  $Z_i$  (punto A en la carta).

$$\hat{z}_i = \frac{40 + j50}{100} = 0.4 - j0.5$$

Para la situación sin pérdidas, la magnitud de  $\rho$  sería constante e igual a  $\overline{OA}$  en proporción al radio unitario de la carta, o sea:

$$\frac{|\rho|}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OC}} \Rightarrow |\rho| = 0.52$$

Si consideramos las pérdidas, al partir desde la carga y desplazarnos hacia el generador, la magnitud de  $\rho$  debe ir decreciendo (véase la Fig. 2-35). En el sentido opuesto, al partir desde el generador hacia la carga, la magnitud de  $\rho$  debe crecer paulatinamente. De manera que, para este ejercicio, el punto correspondiente a  $Z_L$  debe estar en algún lugar sobre la recta  $\overline{AC}$ .



Carta de Smith del Ejercicio 2-28

Bauticemos este punto, aún desconocido, como D. Ahora debe cumplirse la siguiente relación:

$$\overline{OA} = e^{-2\alpha l} \overline{OD} = e^{-2(0.001)(2)} \overline{OD}$$

o sea:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = 0.996$$

Realmente, los dos puntos A y D se confunden en la carta, lo cual conlleva a un resultado casi idéntico para  $Z_i$ , tanto considerando pérdidas como ignorándolas. Con esto se demuestra que cuando una línea tiene muy poca atenuación, como la de este ejercicio, en donde  $\alpha l = 0.002 \text{ Np} = 0.017 \text{ dB}$ , es válido y suficiente analizarla como si no tuviese pérdidas. Verifiquemos esta conclusión analíticamente, con las ecs. (2-33) y (2-34), suponiendo  $Z_L = 40 + j50 \Omega$ :

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{40 - 100 + j50}{140 + j50} = -0.2669 + j0.4525$$

$$Z_i = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma l}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma l}} = 100 \left[ \frac{1 + (-0.2669 + j0.4525) e^{-0.004} e^{-j8\pi}}{1 - (-0.2669 + j0.4525) e^{-0.004} e^{-j8\pi}} \right]$$

$$= 100(0.4022 + j0.4992) = 40.22 + j49.92 \Omega$$

## 2.16 Acoplamiento de impedancias

Como se ha estudiado en las últimas secciones, en muchos casos prácticos a altas frecuencias, la atenuación de la línea y su corta longitud son tales que permiten analizarla como si no tuviese pérdidas. Bajo esta consideración, el factor que influye sobre la eficiencia de transmisión de potencia a la carga es el grado de desacoplamiento que haya entre ésta y la impedancia característica de la línea. El reto consiste en dejar la carga como está y

emplear algún truco (matemáticamente bien fundado) para que la línea esté acoplada en la cercanía a la carga, aun cuando  $Z_0 \neq Z_L$ . En esta sección veremos cómo hacerlo.

A través de la teoría y los diversos ejercicios que se han visto, es claro que una línea de transmisión actúa como un “transformador de impedancias”, pues entre el generador y la carga se pueden ver muchas impedancias diferentes, según el punto intermedio elegido. La ec. (2-35) establece esta relación compleja de transformación de impedancias, que escribiremos ahora en función de  $z$  como la ec. (2-92):

$$Z = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(-\gamma z)}{Z_0 + Z_L \tanh(-\gamma z)} \quad (z \leq 0) \quad (2-92)$$

Por su parte, la ec. (2-34) establece la misma relación, que en función de  $z$  queda de la siguiente forma:

$$Z = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{2\gamma z}}{1 - \rho_L e^{2\gamma z}} \quad (z \leq 0) \quad (2-93)$$

Como recordatorio, véase la Fig. 2-19, misma que, por conveniencia, se repite parcialmente aquí como la Fig. 2-36.

El acoplamiento de impedancias que se busca debe garantizar que el coeficiente de reflexión de voltajes sea cero y que, en consecuencia, el  $VSWR$  sea igual a la unidad cerca de la carga. Este acoplamiento se puede realizar

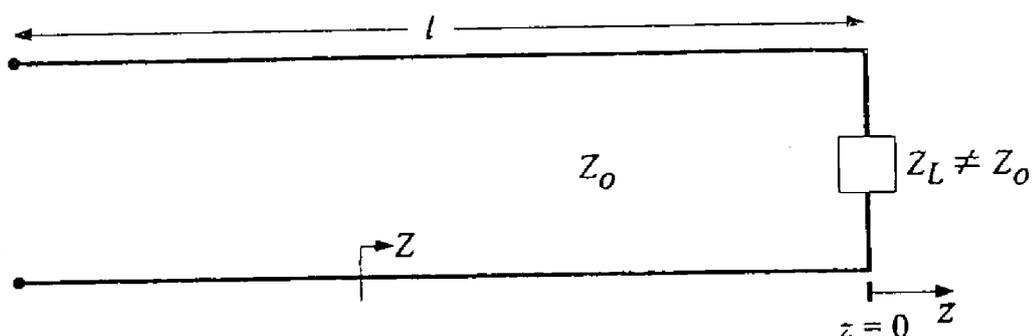
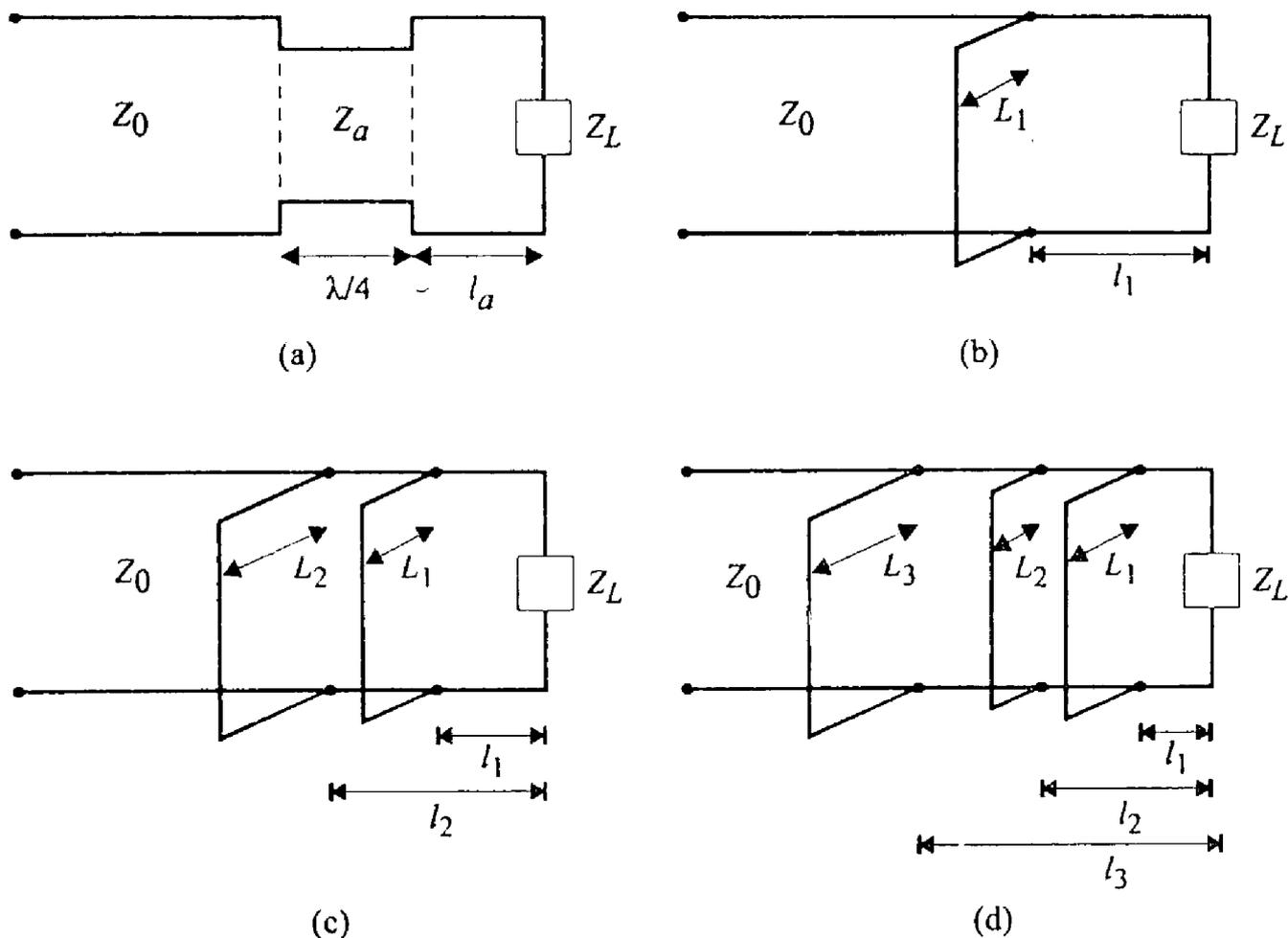


Fig. 2-36 Línea desacoplada de longitud  $l$ .

usando un “transformador de  $\lambda/4$ ” en serie con la línea (Fig. 2-37a), o bien, conectando en paralelo a la línea principal uno o más segmentos de línea cortocircuitados (Figs. 2-37 b, c y d).



**Fig. 2-37** Para acoplar una línea hay varias opciones: a) intercalando en serie un tramo de  $\lambda/4$  de impedancia característica  $Z_a$ , a una distancia  $l_a$  de la carga; b) conectando en paralelo un “stub” de longitud  $L_1$  a una distancia  $l_1$  de la carga; c) conectando dos “stubs” en paralelo; d) empleando tres “stubs”.

A los segmentos de línea cortocircuitados de las Figs. 2-37 b, c y d se les llama “stubs” comúnmente\*. Por su función, en castellano se les puede llamar “equilibradores de impedancias”; o bien, como se usan tramos pequeños de línea que pueden ser considerados como sin pérdidas, cuya impedancia de entrada es puramente reactiva, también se les puede designar como “equilibradores reactivos”. Algunos prefieren llamarlos “espolones”.

\* En inglés, *stub* significa fragmento o porción pequeña de algo (por ejemplo, el talón de una chequera, la colilla de un cigarro, o un “pedacito” de línea).

En general, cualquier dispositivo empleado para acoplar una línea o adaptar su impedancia, como también se dice, es simplemente llamado “acoplador” o “adaptador”. Con él no sólo se logra obtener óptima transferencia de potencia a la carga, sino que, al eliminarse las reflexiones (o casi, dentro de cierto ancho de banda de frecuencias), la transmisión de señales digitales también se beneficia y los ecos en sistemas analógicos se reducen o desaparecen. Otra razón por la que se busca el mejor acoplamiento posible es que, por ejemplo, en sistemas radiotransmisores de alta potencia existe el riesgo de rompimiento eléctrico del dieléctrico entre los conductores, o de sobrecalentamiento, si se emplean voltajes y corrientes demasiado elevados; un sistema acoplado requeriría niveles inferiores de transmisión para tener el mismo alcance o resultados, y sería más seguro. La preferencia de uno u otro tipo de acoplador sobre otros dependerá de ciertas condiciones, como se verá a continuación.

### 2.16.1 Acoplamiento con una sección de $\lambda/4$

Suponiendo que la línea tenga muy pocas pérdidas, y aproximando  $\alpha = 0$ , la ec. (2-92) se reduce a:

$$Z = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(-\beta z)}{Z_0 + jZ_L \tan(-\beta z)} \quad (z \leq 0) \quad (2-94)$$

ecuación similar a la ec. (2-50), en función de  $z$ . Si la longitud de la línea es  $\lambda/4$ , entonces  $-\beta z = -(2\pi/\lambda)(-\lambda/4) = \pi/2$ . La función tangente tiende a infinito cuando su argumento vale  $\pi/2 = 90^\circ$ . Por lo tanto, la impedancia de entrada de esta línea de longitud  $\lambda/4$  sería, de acuerdo con la ec. (2-94):

$$Z \Big|_{z=-\lambda/4} = Z_i = Z_0 \frac{\frac{Z_L}{\tan(-\beta z)} + jZ_0}{\frac{Z_0}{\tan(-\beta z)} + jZ_L} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (2-95)$$

Como  $Z_0$  es real, de la ec. (2-95) se observa que una línea que mida  $\lambda/4$  se comporta como un *inversor de impedancias*, pues a la entrada se ve el inverso

de  $Z_L$  multiplicado por un factor real, o bien, en la carga se tiene el inverso de la impedancia de entrada  $Z_i$ , también multiplicada por un factor real.

Así, por ejemplo, si la línea termina en corto circuito, en su entrada se obtiene el equivalente a un circuito abierto. Sin embargo, en la práctica, debido a las pérdidas de la línea (aunque sean muy pocas), no se logra obtener el circuito abierto perfecto, sino una gran impedancia resistiva a la entrada de la línea, dada por  $Z_i \doteq Z_0/\alpha l$ , donde  $\alpha l$  es la atenuación total acumulada en el tramo de  $\lambda/4$ . La demostración de este resultado se obtiene fácilmente:

$$\tanh \gamma l = \tanh(\alpha l + j\beta l) = \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j(\tanh \alpha l)(\tan \beta l)}$$

Si  $\alpha l$  es muy pequeño,  $\tanh \alpha l \rightarrow \alpha l$ , por lo que:

$$\tanh \gamma l = \frac{\alpha l + j \tan \beta l}{1 + j\alpha l \tan \beta l}$$

Y si  $l = \lambda/4$ , entonces  $\tan \beta l = \tan 90^\circ \rightarrow \infty$ , obteniéndose:

$$\tanh \gamma l = \frac{0 + j1}{0 + j\alpha l} = \frac{1}{\alpha l}$$

Sustituyendo este resultado y  $Z_L = 0$  en la ec. (2-92) se tiene:

$$Z_i = Z \Big|_{z=-\lambda/4} = Z_0 \frac{0 + Z_0 \left( \frac{1}{\alpha l} \right)}{Z_0 + 0} = \frac{Z_0}{\alpha l} \quad (2-96)$$

Y como  $\alpha l$  es muy pequeño y real,  $Z_i$  en la ec. (2-96) es resistiva y muy grande, en lugar del equivalente a un circuito abierto perfecto con impedancia infinita.

Pero veamos ahora cómo se puede aprovechar una línea de  $\lambda/4$  como adaptador o acoplador de impedancias. Este método es sencillo y se puede emplear especialmente cuando la carga es resistiva. Sin embargo, una vez instalado el adaptador, si la frecuencia cambia, su longitud ya no será

exactamente de  $\lambda/4$ . Por lo tanto, el método es sensible a los cambios de frecuencia, así como también lo son todos los demás métodos que se verán más adelante con "stubs" en paralelo.

Con referencia a las Figs. 2-37 a y 2-38, y en base a la ec. (2-95) se tiene que:

$$Z_i = \frac{Z_a^2}{Z_B} \tag{2-97}$$

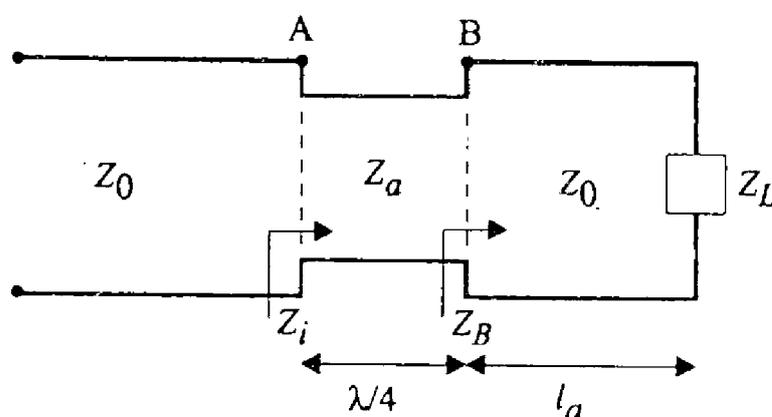


Fig. 2-38 La línea estará acoplada si en el punto A se ve una impedancia igual a  $Z_0$ .

en donde  $Z_a$  es la impedancia característica del cable adaptador y  $Z_B$  es la impedancia que este adaptador vería como su carga. Si  $Z_L$  es real, el acoplador se puede instalar inmediatamente antes de la carga, como se muestra en la Fig. 2-39, en cuyo caso  $Z_B$  sería igual a  $Z_L$ , y la ec. (2-97) se convertiría en:

$$Z_i = \frac{Z_a^2}{Z_L} \tag{2-98}$$

Como se desea que la línea "vea"  $Z_0$  en  $Z_i$ , para que esté acoplada, entonces se concluye que:

$$Z_0 = \frac{Z_a^2}{Z_L} \Rightarrow Z_a = \sqrt{Z_0 Z_L} \tag{2-99}$$

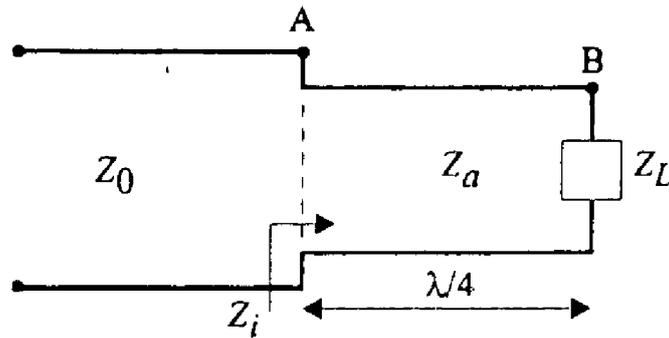


Fig. 2-39 Acoplamiento cuando la carga es resistiva.

La ec. (2-99) nos indica que el acoplador debe tener una impedancia característica igual a la media geométrica de la impedancia característica de la línea principal y la impedancia de la carga.

Si  $Z_L$  fuese compleja, la ec. (2-99) no podría ser satisfecha directamente porque, en general, como ya se vio con anterioridad, las impedancias características son reales a altas frecuencias. Por lo tanto, el acoplador tendría que colocarse en un lugar donde a su salida viese una impedancia real como carga. La Fig. 2-38 nos muestra que esto se logra colocando el extremo final del acoplador a una distancia  $l_a$  de la carga, obligando a que la ec. (2-94) dé un resultado real, evaluado en el punto B; es decir:

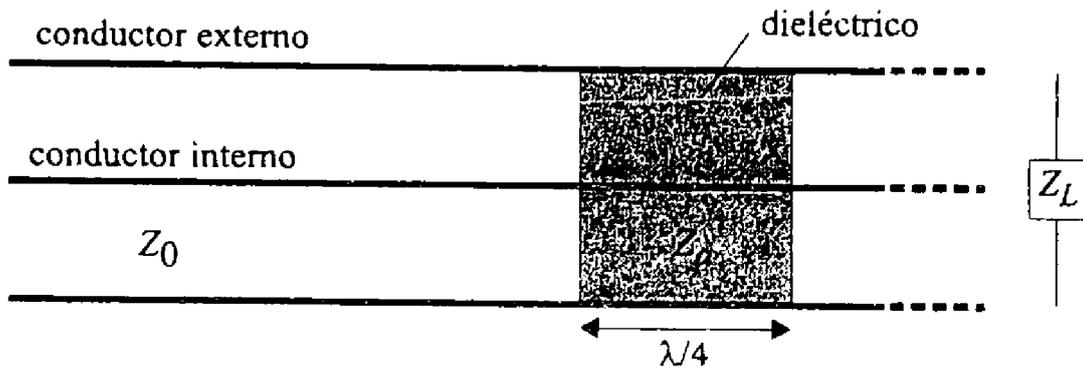
$$Z_B = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l_a)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l_a)} = \text{real} \quad (2-100)$$

Ahora bien, el tramo de  $\lambda/4$  es un inversor de impedancias, y de acuerdo con la ec. (2-95), si se desea que  $Z_i = Z_0$  en la Fig. 2-38, entonces:

$$Z_0 = \frac{Z_a^2}{Z_B} \Rightarrow Z_B = \frac{Z_a^2}{Z_0} \quad (2-101)$$

Recuérdese que la impedancia característica de una línea depende del dieléctrico entre sus dos conductores. De manera que, por ejemplo, si se tiene un cable coaxial, no es necesario usar un tramo de  $\lambda/4$  con diámetros

interiores diferentes a los de la línea principal. La inserción de un dieléctrico distinto podría ser la solución, dependiendo de la situación en la realidad. En la Fig. 2-40 se muestra esta opción, que emplea “tapones” dieléctricos cilíndricos entre los dos conductores del cable.

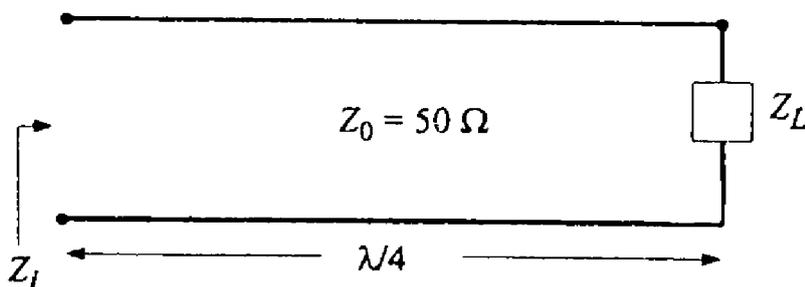


**Fig. 2-40** Para obtener un tramo de  $\lambda/4$  con impedancia característica  $Z_a$  se puede insertar un tapón o relleno dieléctrico cilíndrico en el interior del cable coaxial.

A continuación se realizarán algunos ejercicios y se mostrará cómo se puede emplear la carta de Smith para simplificar el trabajo.

**Ejercicio 2-29** Una línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica de  $50 \Omega$ , está terminada en una carga cuya impedancia vale  $Z_L$ . Si la línea mide  $\lambda/4$ , obtenga la impedancia de entrada para: a)  $Z_L = 80 \Omega$ , b)  $Z_L = 50 + j20 \Omega$ , y c)  $Z_L = -j20 \Omega$ .

*Solución*



La ec. (2-95) permite responder a las tres preguntas.

a)  $Z_L = 80 \Omega$ :

$$Z_i = \frac{2500}{80} = 31.25 \Omega$$

b)  $Z_L = 50 + j20 \Omega$ :

$$Z_i = \frac{2500}{50 + j20} = 43.1 - j17.24 \Omega$$

c)  $Z_L = -j20 \Omega$ :

$$Z_i = \frac{2500}{-j20} = j125 \Omega$$

Los resultados de los incisos b) y c) confirman que el inversor de impedancias de  $\lambda/4$  hace que una impedancia de carga inductiva se vea capacitiva en la entrada, y viceversa.

Veamos rápidamente la solución gráfica. El desplazarse desde la carga hasta el generador equivale a girar medio círculo en la carta, es decir,  $\lambda/4$ .

a)  $Z_L = 80 \Omega$ :

$$\hat{z}_L = \frac{80}{50} = 1.6 \quad (\text{punto A en la carta})$$

$$\hat{z}_i = 0.625 \quad (\text{punto B leído en la carta})$$

$$\Rightarrow Z_i = (0.625)(50) = 31.25 \Omega$$

b)  $Z_L = 50 + j20 \Omega$ :

$$\hat{z}_L = \frac{50 + j20}{50} = 1 + j0.4 \quad (\text{punto C en la carta})$$

$$\hat{z}_i = 0.86 - j0.35 \quad (\text{punto D leído en la carta})$$

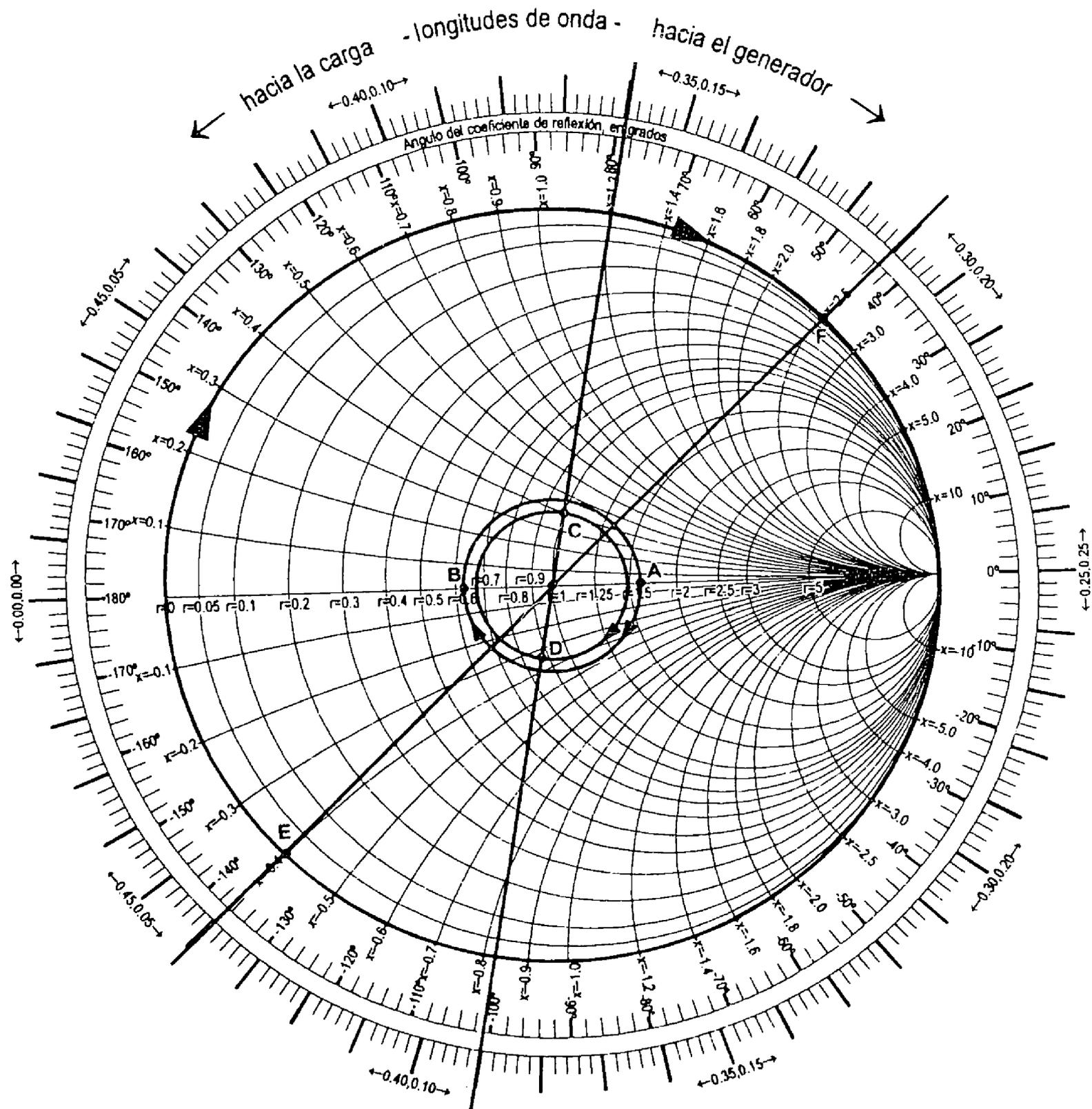
$$\Rightarrow Z_i = (0.86 - j0.35)(50) = 43 - j17.5 \Omega$$

c)  $Z_L = -j20 \Omega$ :

$$\hat{z}_L = \frac{-j20}{50} = -j0.4 \quad (\text{punto E en la carta})$$

$$\hat{z}_i = j2.5 \quad (\text{punto F leído en la carta})$$

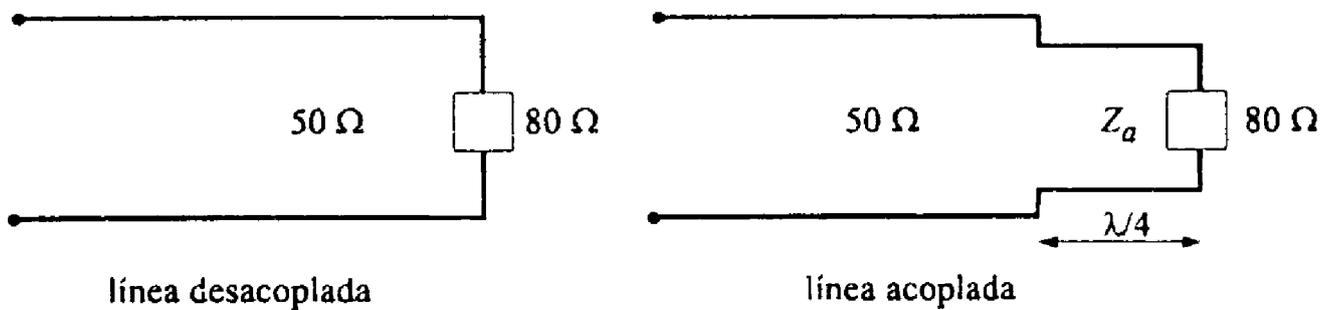
$$\Rightarrow Z_i = (j2.5)(50) = j125 \Omega$$



Carta de Smith del Ejercicio 2-29.

**Ejercicio 2-30** Una línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica de  $50 \Omega$ , termina en una carga de  $80 \Omega$ . ¿Cómo podría acoplarse la línea usando un adaptador de  $\lambda/4$ ?

*Solución*



Como la carga es real, el acoplador puede ir inmediatamente a un lado de ella. El valor de  $Z_a$  se calcula con la ec. (2-99):

$$Z_a = \sqrt{Z_0 Z_L} = \sqrt{(50)(80)} = 63.25 \Omega$$

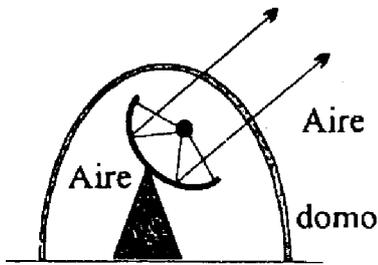
**Ejercicio 2-31** Un buque petrolero tiene sobre cubierta una antena parabólica para comunicarse por satélite con otros puntos de la Tierra. Debido a las condiciones ambientales, conviene protegerla con un domo de material dieléctrico que sea transparente al paso de las ondas electromagnéticas. Calcule el grosor del domo para que no haya reflexiones al transmitir a 1.64 GHz, suponiendo que su material tiene una  $\epsilon_r = 2.6$ .

*Solución*

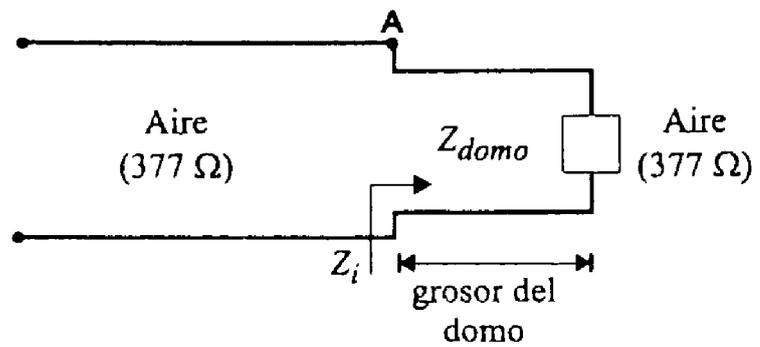
Aunque en realidad se está en el campo cercano de la antena, por simplicidad se puede considerar que la antena transmite una onda plana (véase la sección 4.2). Una onda plana es una onda TEM, por lo que se puede hacer una analogía con una línea de transmisión corta, cuya impedancia característica sea la del dieléctrico del domo y la carga tenga una impedancia igual a la del aire o el “espacio libre” ( $377 \Omega$ ).

A 1.64 GHz, la longitud de onda es:

$$\lambda_{\text{aire}} = \frac{c}{1.64 \times 10^9} = 18.29 \text{ cm}$$



Situación real



Analogía con una línea

$$\lambda_{\text{domo}} = \frac{\lambda_{\text{aire}}}{\sqrt{\epsilon_r}} = 11.34 \text{ cm}$$

Se requiere que  $Z_i = 377 \Omega$  para que no haya reflexiones. Como en este caso  $Z_L = Z_0$ , y de acuerdo con toda la teoría que se ha desarrollado hasta ahora, en el punto A se verá una impedancia  $Z_i = Z_L$  cada vez que se avance  $\lambda/2$  desde la carga hacia el principio de la línea equivalente. Esto se puede verificar por observación de la *ec* (2-94), haciendo  $z = -n(\lambda/2)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , para lo cual la función tangente se vuelve cero y  $Z_i = Z_L$ . De manera que hay muchas soluciones para el grosor del domo:  $\lambda/2$ ,  $\lambda$ ,  $3\lambda/2$ , etc. El grosor elegido dependería de la resistencia a los golpes o al viento y de la rigidez que se deseara tener. Las primeras opciones serían entonces:

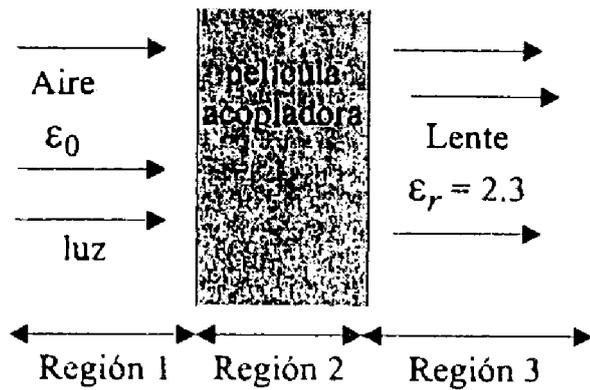
$$\text{grosor del domo} \left| \begin{array}{l} \text{opción 1} \end{array} \right. = \frac{\lambda_{\text{domo}}}{2} = 5.67 \text{ cm}$$

$$\text{grosor del domo} \left| \begin{array}{l} \text{opción 2} \end{array} \right. = \lambda_{\text{domo}} = 11.34 \text{ cm}$$

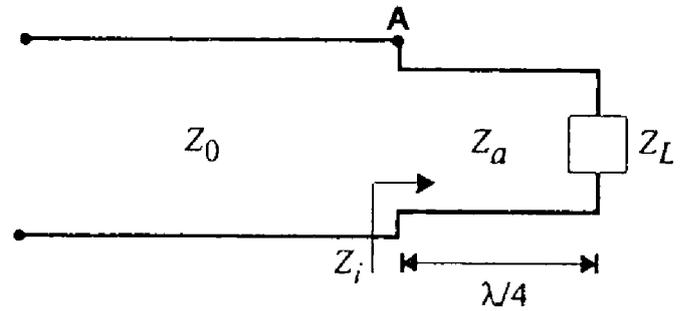
A frecuencias más altas, por ejemplo un radar que operase a 10 GHz en las regiones polares de la Tierra, el grosor del domo sería menor, pues la longitud de onda sería más corta.

**Ejercicio 2-32** Se tiene una cámara con una lente cuya  $\epsilon_r = 2.3$  y se desea captar la máxima cantidad de luz posible, evitando las reflexiones con una delgada película de otro material sobre la lente. Calcule el grosor necesario de este acabado o "barniz" pelicular que debe colocarse sobre la lente y la  $\epsilon_r$  del material.

## Solución



Situación real



Analogía con una línea

Nuevamente se puede hacer una analogía con una línea de transmisión, ya que:

$$Z_{\text{aire}} = 377 \, \Omega = Z_0$$

$$Z_{\text{lente}} = \frac{Z_{\text{aire}}}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{2.3}} = 248.6 \, \Omega = Z_L$$

Como ambas impedancias son reales, la solución del problema sería una capa de  $\lambda/4$  junto a  $Z_L$  (la lente). Estrictamente, el grosor de esta capa pelicular podría ser cualquier múltiplo impar de  $\lambda/4$ , pero quedémonos con la primera opción (grosor =  $\lambda/4$ ). De la ec. (2-99):

$$Z_a = \sqrt{(377)(248.6)} = 306.14 \, \Omega$$

por lo que  $\epsilon_r|_{\text{película}} = 1.5165$ .

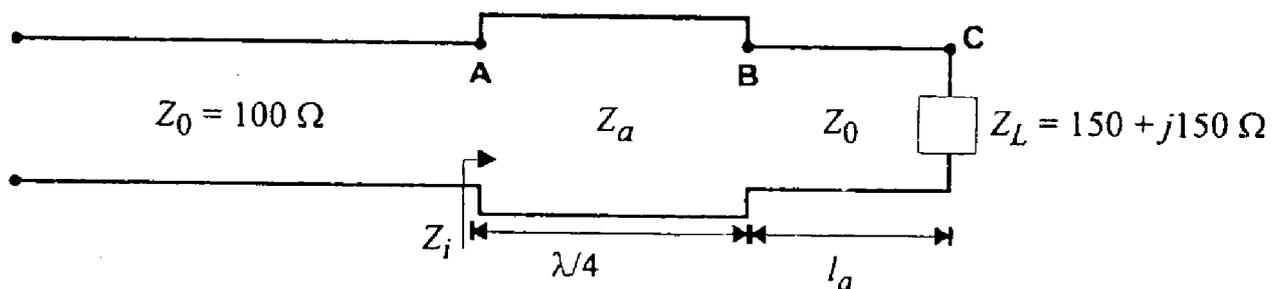
Si se considera una frecuencia dentro del espectro de la luz visible, digamos la correspondiente a una longitud de onda de 500 nm en el aire:

$$\lambda_{\text{película}} = \frac{500 \, \text{nm}}{\sqrt{\epsilon_r}} = 406 \, \text{nm}$$

y su grosor debe ser  $\lambda/4 = 0.101 \, \mu\text{m}$ .

**Ejercicio 2-33** Una línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica de  $100 \Omega$ , está terminada en una carga cuya impedancia vale  $150 + j150 \Omega$ . Se desea acoplarla por medio de un adaptador de  $\lambda/4$ , colocado a cierta distancia  $l_a$  de la carga. Calcule la impedancia característica del adaptador y la distancia  $l_a$  a la que debe colocarse con relación a la carga.

*Solución*



La distancia  $l_a$  podría encontrarse resolviendo la ec. (2-100). El resultado real sería  $Z_B$ , y con la ec. (2-101) se calcularía  $Z_a$ . Sin embargo, es más fácil resolver este problema usando la carta de Smith:

$$\hat{z}_L = \frac{150 + j150}{100} = 1.5 + j1.5 \quad (\text{punto C en la carta})$$

Al girar sobre el círculo de radio  $\overline{OC}$  una distancia equivalente de  $0.056 \lambda$  hacia el generador, se encuentra la primera impedancia real (punto B), igual a:

$$\hat{z}_B = 3.35 \quad \Rightarrow \quad Z_B = 335 \Omega$$

Finalmente, usando la ec. (2-101):

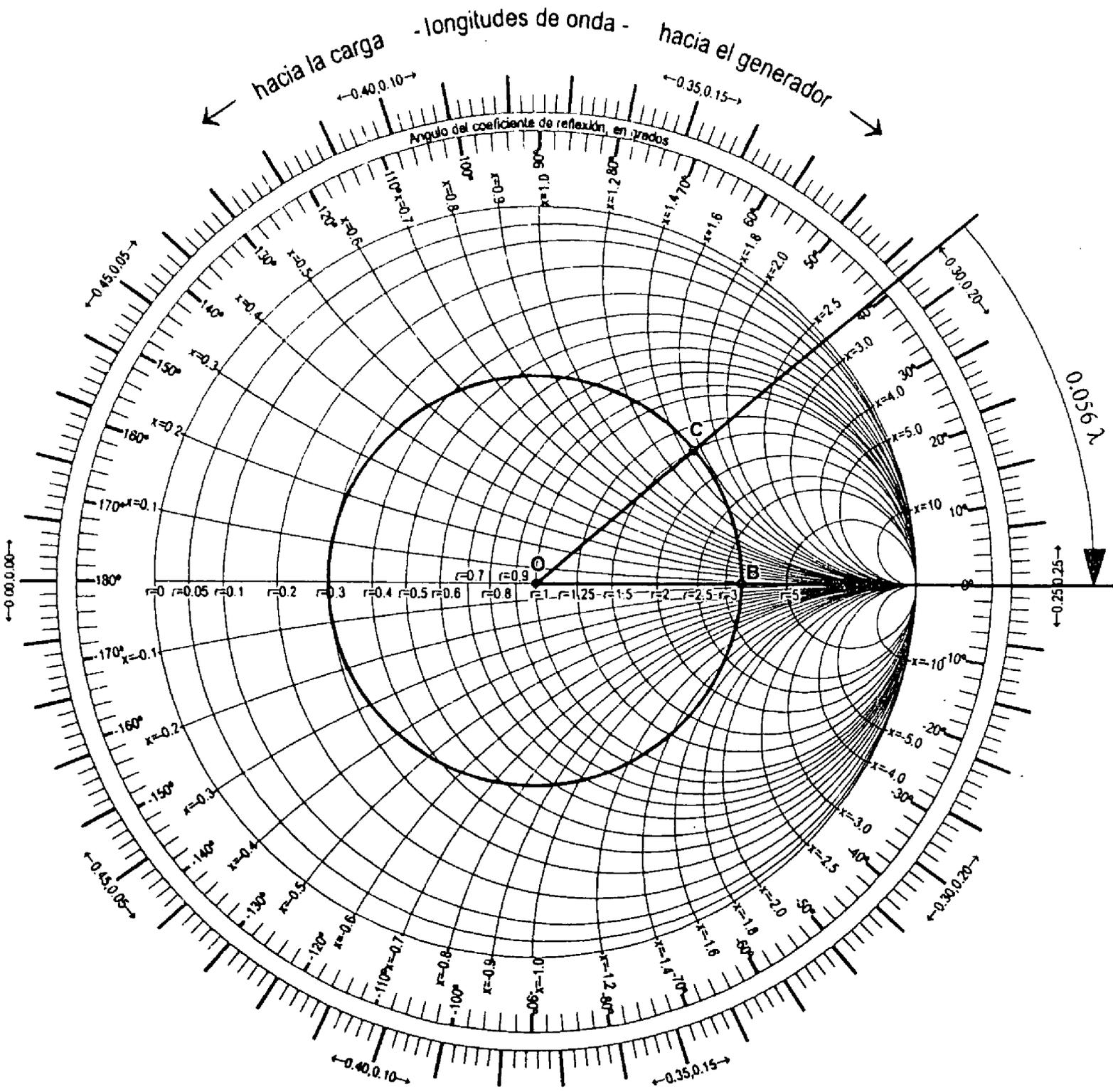
$$Z_a = \sqrt{Z_0 Z_B} = \sqrt{33500} = 183 \Omega$$

Una verificación rápida para checar a  $l_a = 0.056 \lambda$  se logra sustituyendo su valor en la ec. (2-100):

$$Z_B = 100 \left[ \frac{150 + j150 + j100 \tan 20.16^\circ}{100 + j(150 + j150) \tan 20.16^\circ} \right]$$

$$= 100 \left[ \frac{150 + j186.71}{44.93 + j55.07} \right] = 337 + j2.5 \Omega$$

Como se ve, el margen de error es muy pequeño, pues  $Z_B$  resulta casi totalmente real y similar al valor leído en la carta ( $Z_B = 335 \Omega$ ).



Carta de Smith del Ejercicio 2-33.

### 2.16.2 Uso de la carta de Smith en su forma de admitancias

En las Figs. 2-37 b, c y d se mostraron varias alternativas para acoplar una línea usando "stubs" o equilibradores reactivos. Como éstos se conectan en paralelo con la línea principal, resulta más fácil trabajar con admitancias en lugar de impedancias. En las secciones 2.16.3 y 2.16.4 se verá también que los problemas de acoplamiento se resuelven con más rapidez usando la carta de Smith que con el método analítico. Por estas razones, conviene detenernos un momento y estudiar cómo se puede emplear dicha carta en su forma de admitancias.

Sea la admitancia  $Y(z)$  el inverso de la impedancia  $Z(z)$  y  $Y_0$  la admitancia característica de la línea.  $Y(z)$  se puede normalizar dividiéndola entre  $Y_0$ :

$$\hat{y} = \frac{Y(z)}{Y_0} = \frac{1/Z(z)}{1/Z_0} = \frac{1}{\hat{z}} \quad (2-102)$$

donde  $\hat{z}$  está dada por la ec. (2-73). Sustituyendo ésta en la ec. (2-102):

$$\hat{y} = \frac{1 - \rho_v(z)}{1 + \rho_v(z)} \quad (2-103)$$

El coeficiente  $\rho_v$  se definió en términos de los voltajes incidente y reflejado. De igual forma, se puede definir un coeficiente de reflexión de corrientes  $\rho_i(z)$ :

$$\rho_i(z) = \frac{I_r(z)}{I_i(z)} = -\frac{V_r(z)}{V_i(z)} = -\rho_v(z) \quad (2-104)$$

Al sustituir la ec. (2-104) en la ec. (2-103) se observa algo muy interesante:

$$\hat{y} = \frac{1 + \rho_i(z)}{1 - \rho_i(z)} = g + jb \quad (2-105)$$

Es decir, que las expresiones normalizadas de  $\hat{z}$  y de  $\hat{y}$  son idénticas, con sus respectivos coeficientes de reflexión. Como  $\rho_i(z)$  se puede expresar nuevamente como una cantidad compleja igual a  $u + jv$ , resulta que los mismos círculos encontrados para la carta de Smith en su forma de

impedancias también se pueden usar en su forma de admitancias, siempre y cuando se haga la interpretación correcta, en base a la regla siguiente: En el plano complejo  $u-jv$  se representa ahora la variación del coeficiente de reflexión de corrientes, cuya magnitud máxima es la unidad, e igual al radio del círculo para el cual  $g = 0$ ; en los círculos de  $r$  se lee ahora el valor de  $g$ , y en los círculos de  $x$  se lee  $b$ . Compárese la Fig. 2-33 con la Fig. 2-41. En realidad, es más común usar la carta en su forma de impedancias, aun cuando

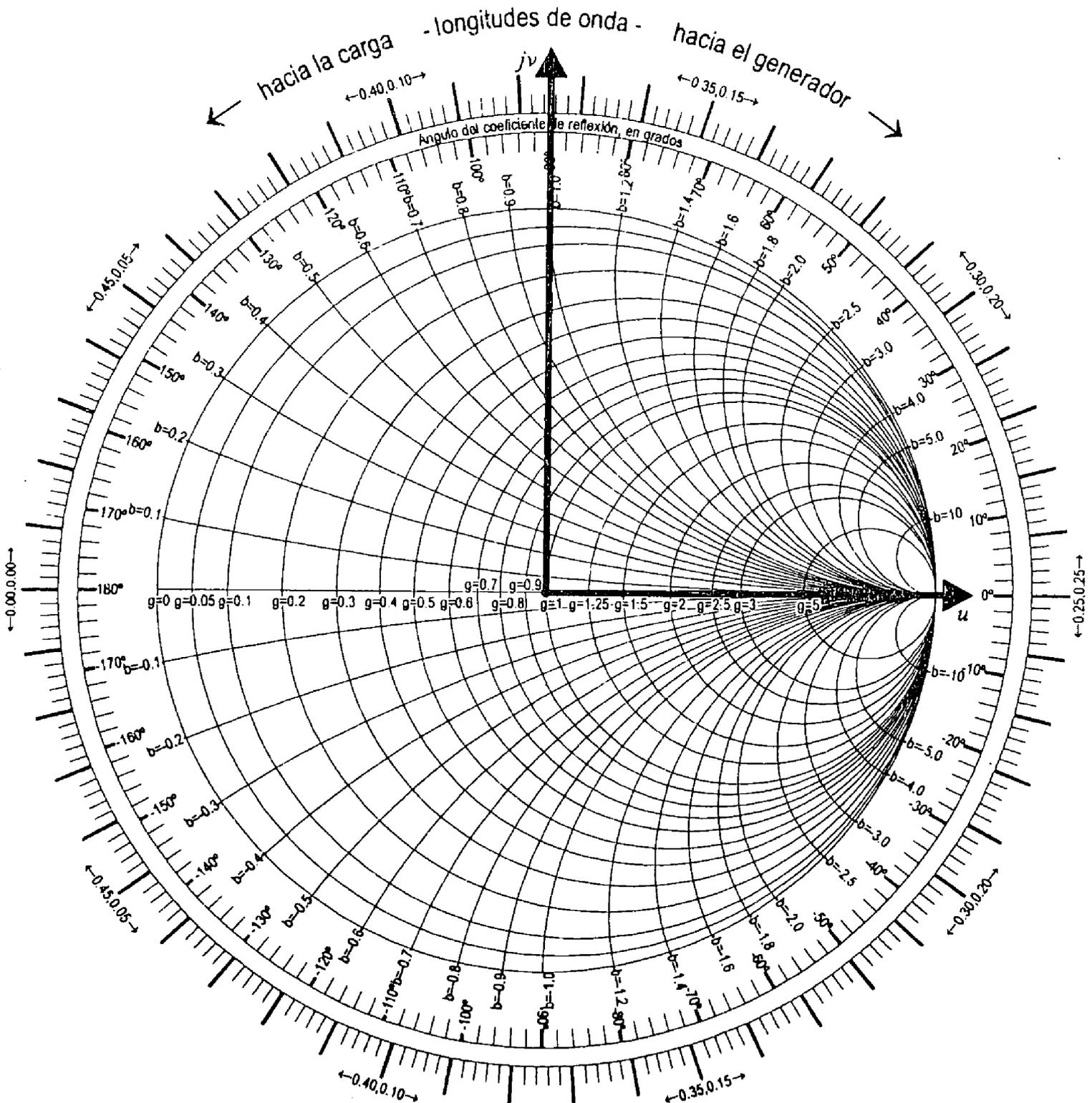
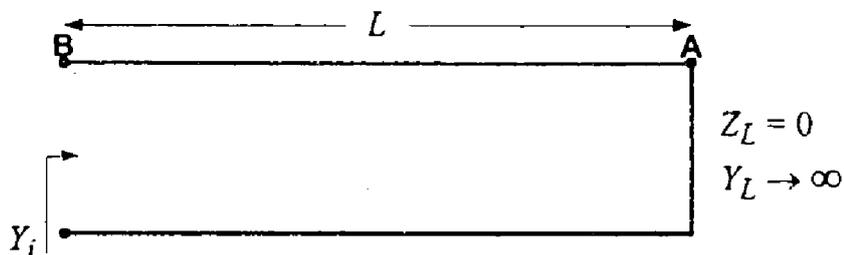


Fig. 2-41 La carta de Smith en su forma de admitancias.  $\rho_i = u + jv$ ,  $\hat{y} = g + jb$ .

se sepa que se esté trabajando con admitancias; con un poco de orden y concentración se puede evitar cualquier error de interpretación. Hagamos algunos ejercicios antes de atacar el problema de los “stubs” en paralelo.

**Ejercicio 2-34** Se necesita conocer la longitud de un equilibrador reactivo terminado en corto circuito que presente a la entrada una admitancia normalizada de  $-j4$ . Considere que el cable que se va a utilizar no tiene pérdidas. Después repita el ejercicio para que la admitancia normalizada valga  $j1$ .

*Solución*



Caso 1)  $\hat{y}_i = -j4$

La carga es un corto circuito, que corresponde a una admitancia normalizada infinita. Por lo tanto, trabajando con admitancias, la carga corresponde al punto A en la carta ( $g = \infty$ ). Para conocer la admitancia normalizada de entrada de este tramo de línea hay que girar nuevamente en el sentido de las manecillas del reloj. Se nos dice que  $\hat{y}_i$  debe valer  $-j4$ ; por lo tanto, hay que girar hasta encontrar el círculo correspondiente a  $b = -4$  (punto B). El desplazamiento total fue de  $0.039 \lambda$ , de allí que el “stub” tiene esa longitud ( $L = 0.039 \lambda$ ).

El resultado se puede verificar trabajando con impedancias. Ahora el corto circuito estaría en el lado opuesto de la carta (punto C). La impedancia de entrada normalizada sería:

$$\hat{z}_i = \frac{1}{\hat{y}_i} = \frac{1}{-j4} = j0.25 \quad (\text{punto D})$$

Esta impedancia normalizada se encuentra girando en el sentido de las manecillas del reloj una distancia equivalente a  $0.039 \lambda$ , con lo cual queda verificado el resultado obtenido anteriormente.

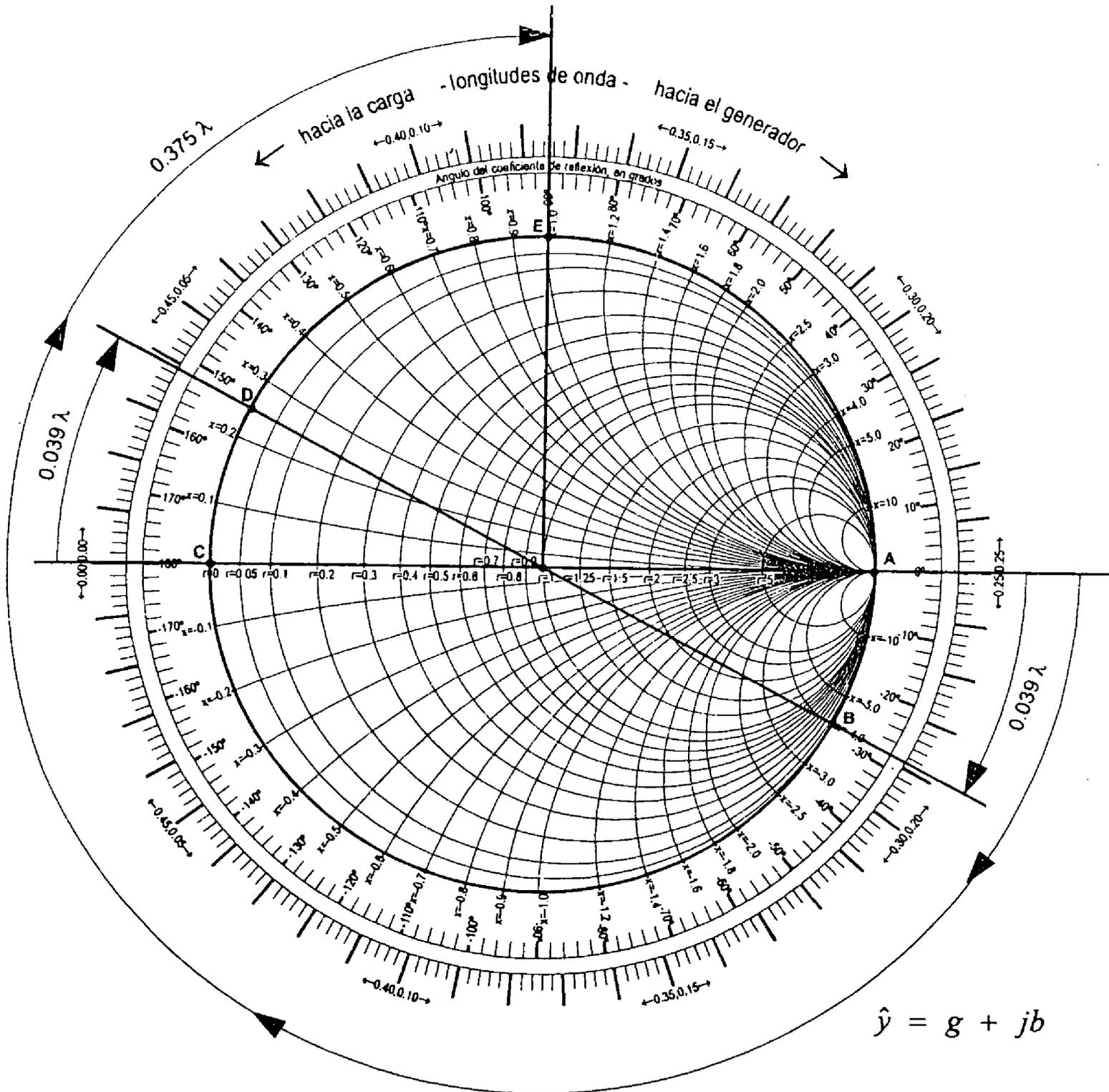
Es útil notar que si se conoce la posición del punto correspondiente a

cierta impedancia normalizada, entonces el punto que representa a su inverso, es decir, la admitancia normalizada, se encuentra diametralmente opuesto en la carta, pasando por el centro de la misma.

Caso 2)  $\hat{y}_i = j1$

*Hacer el ejercicio*

Nuevamente, la carga es el punto A (admitancia infinita). Girando en el sentido de las manecillas del reloj hasta encontrar el círculo de  $b = 1$  (punto E), se determina que la longitud de este "stub" tendría que ser  $L = 0.375 \lambda$ .

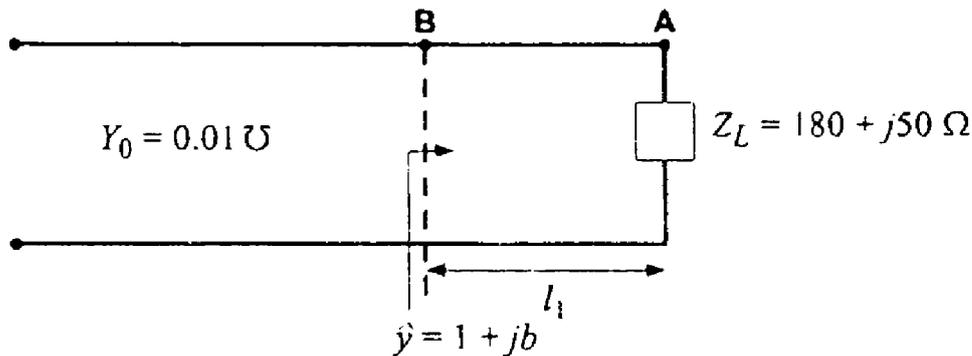


$$\hat{y} = g + jb$$

Carta de Smith del Ejercicio 2-34.

**Ejercicio 2-35** Una línea de transmisión sin pérdidas termina en una carga con impedancia de  $180 + j50 \Omega$ . Si la admitancia característica de la línea es de  $0.01 \text{ S}$ , ¿a qué distancia de la carga se tiene una admitancia normalizada  $\hat{y} = 1 + jb$ ?

*Solución*



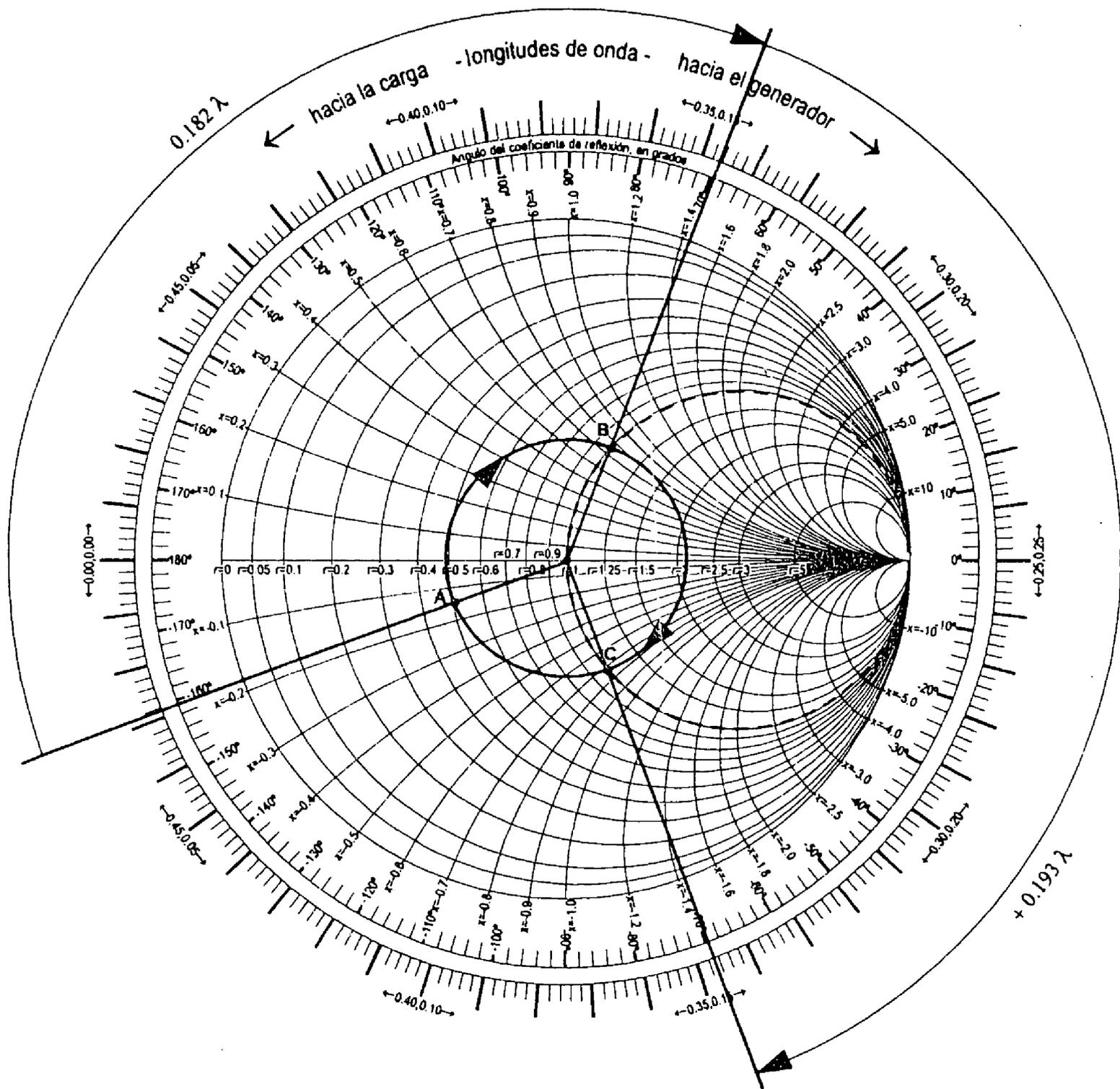
La carga tiene una admitancia normalizada de

$$\hat{y}_L = \frac{1}{\hat{z}_L} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} = \frac{1}{Y_0 Z_L} = \frac{1}{(0.01)(180 + j50)} = 0.51 - j0.14 \quad (\text{punto A})$$

Girando en el sentido de las manecillas del reloj (hacia el generador), hasta encontrar el círculo de  $g = 1$ , se determina que  $l_1 = 0.182 \lambda$ , con  $b = j0.75$ . Si uno continuase girando, se encontraría otra vez al círculo de  $g = 1$  cuando  $b = -j0.75$ ; ésta sería otra solución posible (punto C), con  $l_1 = 0.182 \lambda + 0.193 \lambda = 0.375 \lambda$ . En realidad, habría más soluciones posibles, que se encontrarían conforme girásemos más y más en la carta y se volviese a cruzar el círculo de  $g = 1$ , hasta que propiamente se acabase la línea. La susceptancia  $b$  iría cambiando de signo alternadamente.

### 2.16.3 Acoplamiento con un equilibrador reactivo (“stub”)

Los dos ejercicios anteriores nos van a servir para comprender rápidamente este tipo de acoplamiento con un equilibrador reactivo. Se puede decir que el problema ya está resuelto en gran medida, pues sólo falta juntar los resultados de ambos ejercicios. Con referencia a la Fig. 2-42 (véase también la Fig. 2-37 b), se desean eliminar las reflexiones a la izquierda de la unión



Carta de Smith del Ejercicio 2-35.

AA'. Para que esto se logre, se necesita que la línea principal vea en dicha unión una admitancia igual a su admitancia característica. El equilibrador reactivo debe compensar o equilibrar la susceptancia de la carga transferida al punto A con su propia susceptancia de entrada. Nótese que para el "stub", su entrada o inicio corresponde a la unión AA'. Este tramo de línea se

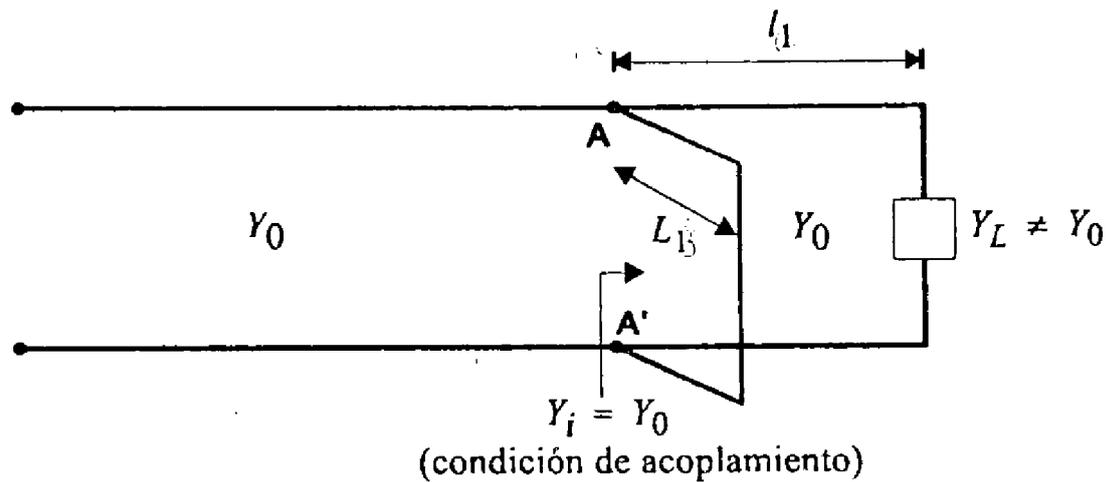


Fig. 2-42 Acoplamiento de una línea con un equilibrador reactivo o "stub".

considera sin pérdidas, al igual que la línea principal, y su admitancia característica también vale  $Y_0$ .

De acuerdo con toda la teoría vista hasta ahora, la impedancia (o la admitancia) de la carga se puede "transferir" a otros puntos de la línea, en donde se ven impedancias (o admitancias) diferentes, según la distancia  $l_1$  que se elija. Conforme uno avanza desde la carga hacia el generador, habrá una  $l_1$  para la cual  $Y = Y_0 + jS$ . Si en ese lugar (AA') se une un "stub" en paralelo, cuya admitancia de entrada valga  $Y_S = -jS$ , la admitancia de entrada total será:

$$Y_i = Y + Y_S = Y_0 + jS - jS = Y_0$$

y la línea estará acoplada.

Desde luego, el mismo problema se puede simplificar si se utilizan admitancias normalizadas y la carta de Smith, en cuyo caso se requiere que:

$$\hat{y} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Y_0 + jS}{Y_0} = 1 + jb \quad (2-106)$$

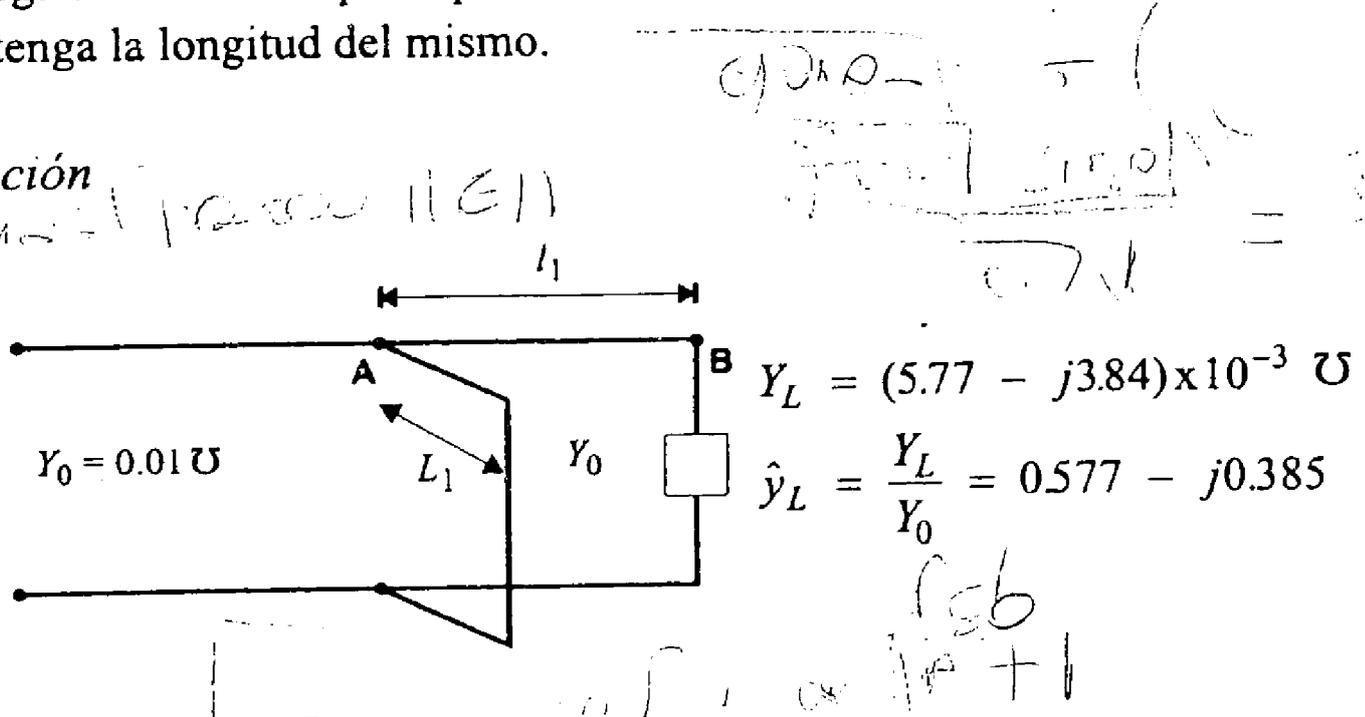
$$\hat{y}_s = \frac{-jS}{Y_0} = -jb \quad (2-107)$$

$$\hat{y}_i = \hat{y} + \hat{y}_s = 1 + jb - jb = 1 \quad (2-108)$$

El problema entonces consiste en determinar dos variables: a) la distancia  $l_1$  a la que se debe colocar el equilibrador, y b) la longitud  $L_1$  del mismo. Hagamos un ejercicio.

**Ejercicio 2-36** Una línea de transmisión sin pérdidas tiene una impedancia característica de  $100 \Omega$  y está terminada con una carga compleja de  $120 + j80 \Omega$ . Se desean evitar las reflexiones hacia el generador, acoplando la línea con un equilibrador reactivo. Encuentre la posición más cercana a la carga sobre la línea principal donde debe unirse el equilibrador o "stub", y obtenga la longitud del mismo.

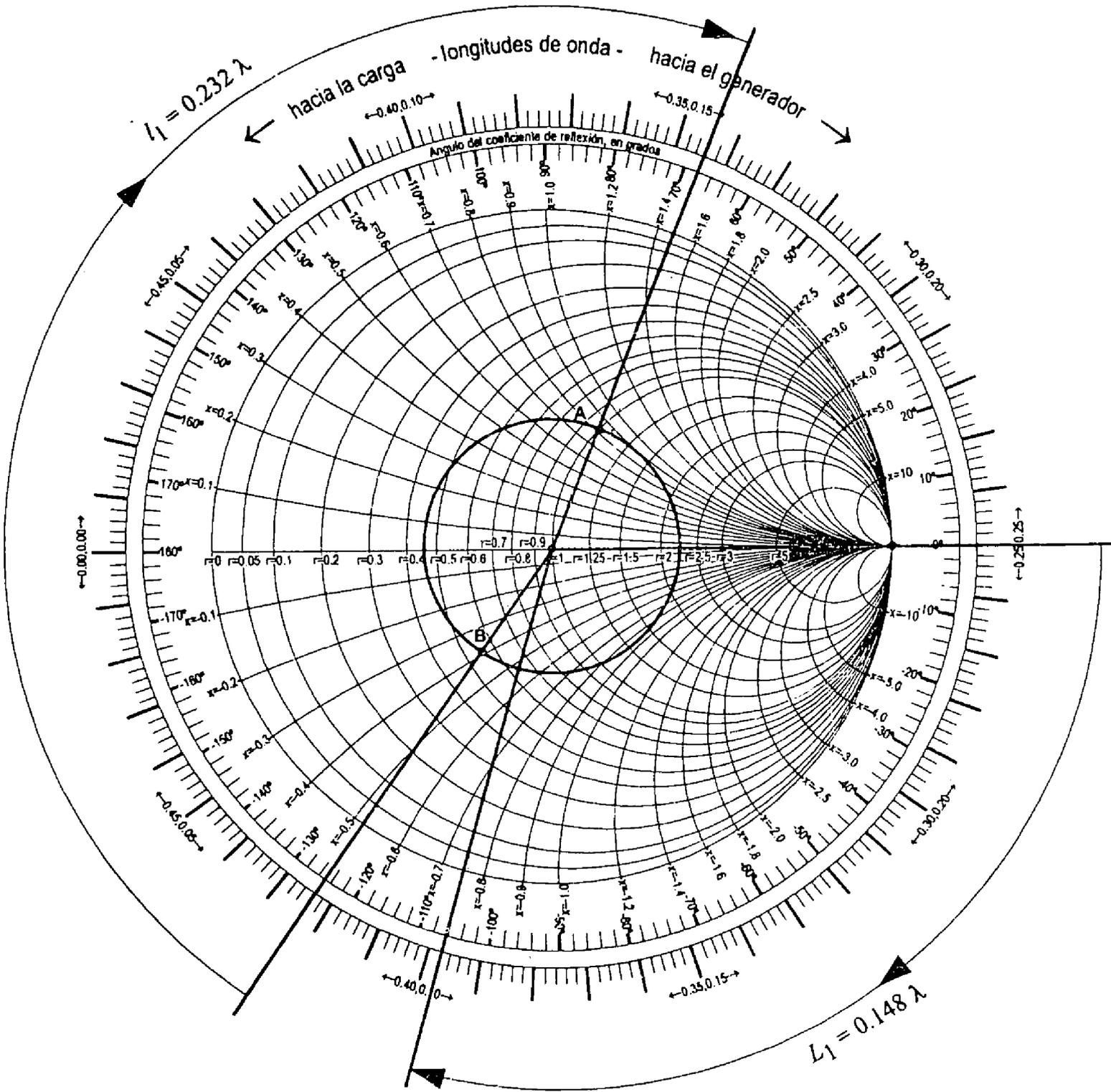
Solución



Si en la carta se identifica a  $\hat{y}_L$  como el punto B, hay que avanzar hacia el generador una distancia  $l_1 = 0.232 \lambda$ , posición en donde la parte real de  $\hat{y}$  es igual a la unidad (punto A). O sea que en A, la línea principal presenta una admittance de:

$$\hat{y} = 1 + j0.75$$

Comparando este resultado con la ec. (2-106), se tiene que  $b = 0.75$ . La ec. (2-107) indica que, por lo tanto, el "stub" debe tener una admittance normalizada de entrada igual a  $-j0.75$ . Entonces, la longitud  $L_1$  del stub debe ser tal que cumpla con dicho requisito a su entrada. Siguiendo un procedimiento similar al del Ejercicio 2-34, sobre la misma carta se demuestra que  $L_1 = 0.148 \lambda$ .

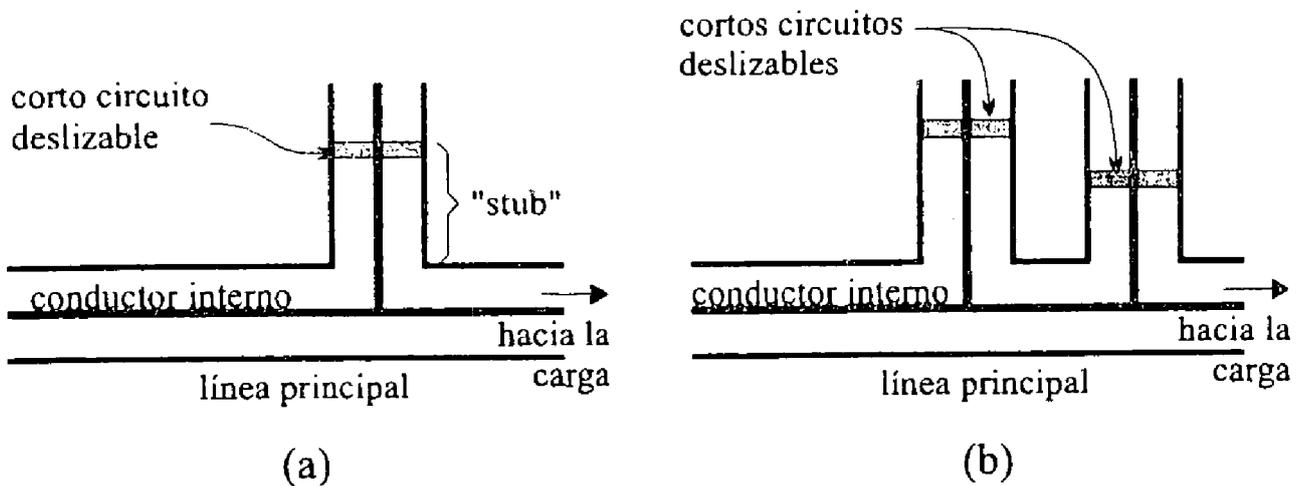


Carta de Smith del Ejercicio 2-36.

**2.16.4 Acoplamiento con dos equilibradores reactivos (dos “stubs”)**

El método visto en la sección anterior brinda el acoplamiento buscado a una determinada frecuencia y para cierta impedancia de la carga. La técnica es interesante, porque **cualquier** carga finita diferente de cero se puede acoplar a la línea con un “stub”. Sin embargo, si la frecuencia o la carga

cambian sustancialmente después de hecho el acoplamiento, habrá que modificar la longitud del "stub", y también su posición a lo largo de la línea. Lo primero no es mayor problema, pues existen dispositivos deslizables que permiten acercar o alejar al corto circuito, según la reactancia de entrada que se desee (Fig. 2-43 a). En cambio, intentar modificar la posición del "stub" sí puede resultar muy inconveniente, en particular en un cable coaxial. La solución a esta dificultad es emplear dos equilibradores reactivos, en lugar de uno solo. De esta manera, las posiciones de los dos "stubs" se conservan fijas, y sus reactancias de entrada respectivas se pueden variar deslizando el corto circuito (Fig. 2-43 b), lográndose así la sintoni-



**Fig. 2-43** a) Acoplamiento de impedancias con un equilibrador reactivo o "stub".  
b) Acoplamiento con dos "stubs".

zación\* o el acoplamiento óptimo en un rango más amplio de frecuencias. Sin duda, esta alternativa de acoplamiento es mejor que la que utiliza un solo "stub", pero tiene el defecto de que no hay solución posible para todo tipo de carga, sino solamente para un cierto rango de valores de  $Z_L$ . Cuando este problema se presenta, la solución inmediata es emplear tres "stubs" (Fig. 2-37 d); con ellos, cualquier carga puede acoplarse a la línea.

El criterio y el procedimiento gráfico a seguir para adaptar o acoplar una línea con su carga empleando dos equilibradores reactivos de posición fija se describen a continuación.

\* Debido a su función, los "stubs" también son denominados "sintonizadores de corto circuito móvil".

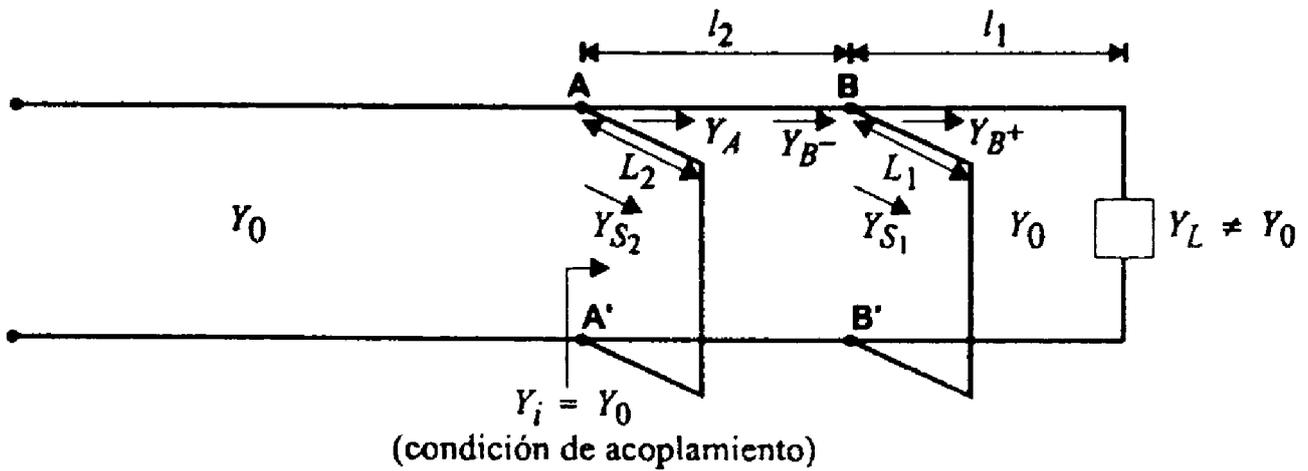


Fig. 2-44 Acoplamiento de una línea con dos equilibradores reactivos o “stubs”.

Con referencia a la Fig. 2-44 (véase también la Fig. 2-37 c), la condición de acoplamiento en las terminales AA' es la misma que en el caso del acoplamiento con un “stub” (véase la Fig. 2-42, como comparación). Es decir, a la derecha de AA', la línea debe ver una admitancia de entrada  $Y_0$ , igual a su admitancia característica. La distancia  $l_2$  entre las dos ramas cortocircuitadas debe fijarse, y por lo general se hace igual a  $\lambda/8$ , aunque también pueden emplearse otros valores. Después se fija  $l_1$ , y el problema entonces se reduce a encontrar las longitudes  $L_1$  y  $L_2$ . Si la situación lo permite,  $l_1$  puede inclusive ser igual a cero, es decir, que el “stub”  $L_1$  se puede conectar junto a la carga.

Trabajando con admitancias normalizadas, en AA' debe tenerse que:

$$\hat{y}_i = 1$$

Para que lo anterior se cumpla, se requiere que:

$$\hat{y}_i = \hat{y}_A + \hat{y}_{S_2} = (1 + jb_A) + \underbrace{jb_{S_2}}_{\text{admitancia normalizada del "stub" 2}} = 1 \quad (2-109)$$

o sea:

$$b_{S_2} = -b_A \quad (2-110)$$

En la carta de Smith, la admitancia  $\hat{y}_A = 1 + jb_A$  debe estar en "algún lugar" sobre el círculo correspondiente a  $g = 1$ . Por lo tanto, esta admitancia, transferida al punto B donde está conectado el "stub" 1, es decir, desplazada una distancia  $l_2$  hacia la carga, debe estar en "algún lugar" sobre otro círculo que equivale al círculo  $g = 1$  movido un ángulo igual al equivalente a moverse  $l_2$  hacia la carga (en el sentido contrario a las manecillas del reloj). Es decir, todas las admitancias posibles sobre el círculo  $g = 1$  se transfieren al punto B y quedan ahora en el círculo B (Fig. 2-45). En esta figura, se ha supuesto que  $l_2 = \lambda/8$ , y se muestran, a manera de ejemplo, tres posibles ubicaciones de  $\hat{y}_A$  y su transferencia correspondiente al círculo B. Esta transferencia se efectúa trazando círculos con centro en la carta.

Ahora bien, supóngase que la admitancia normalizada  $\hat{y}_L$  de la carga queda ubicada como se muestra en la misma Fig. 2-45. Esta admitancia puede ser transferida al punto B de la Fig. 2-44 desplazándola  $l_1$  hacia el generador, en el sentido de las manecillas del reloj. En la carta, quedaría sobre su círculo  $|\rho| = \text{constante}$  (círculo 1), en el punto indicado por  $\hat{y}_{B^+}$ .

En B están conectados en paralelo el "stub" 1 y la línea. De modo que la admitancia total vista desde la izquierda de B sería:

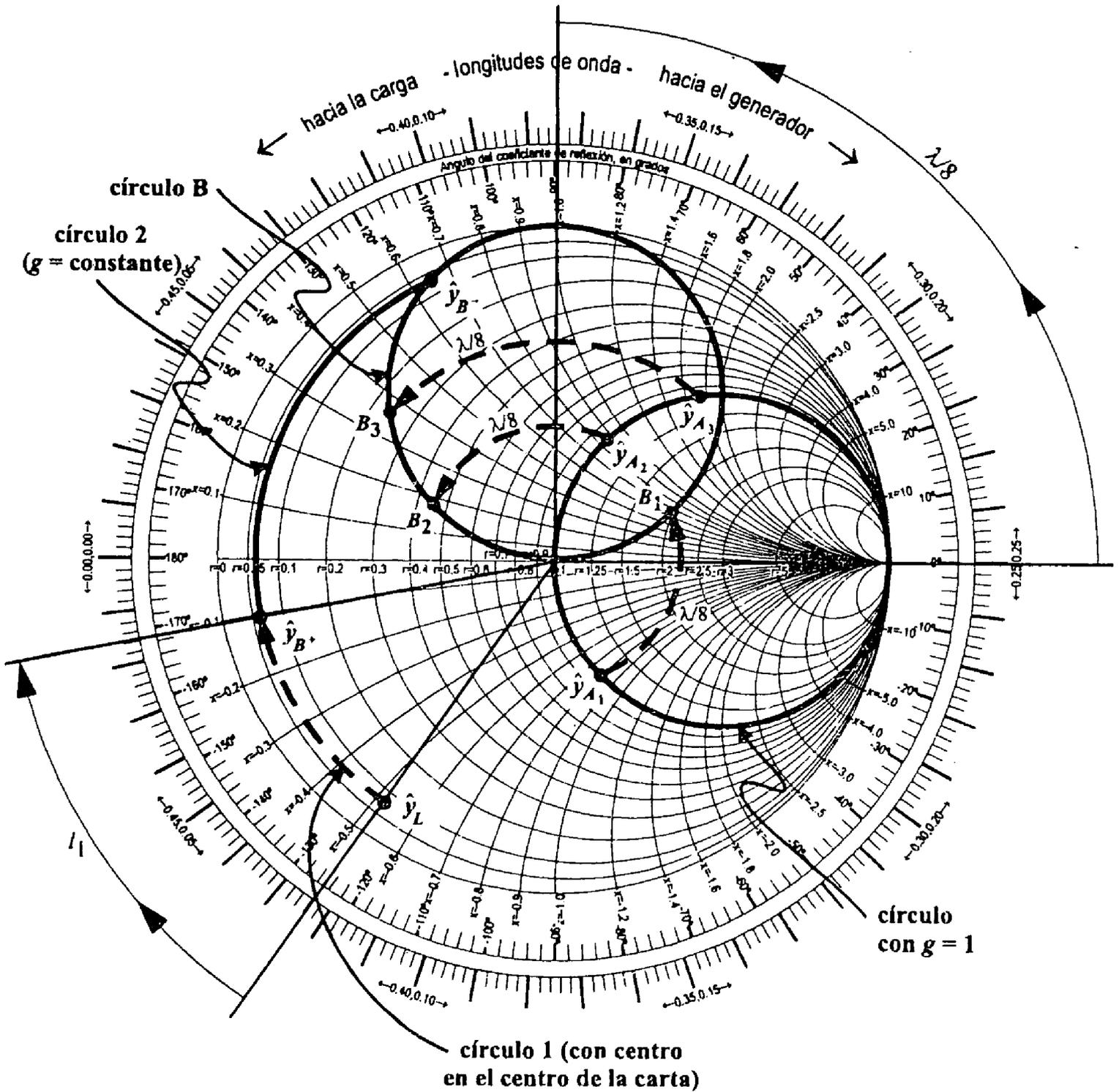
$$\hat{y}_{B^-} = \hat{y}_{B^+} + \hat{y}_{S_1} \quad (2-111)$$

Pero  $\hat{y}_{B^-}$  es igual a  $\hat{y}_A$  después de ser transferida al círculo B. Y como  $\hat{y}_{S_1}$  no tiene parte real, toda la parte real de  $\hat{y}_{B^-}$  debe ser igual a la de  $\hat{y}_{B^+}$ . Es decir, que la admitancia transferida de la carga,  $\hat{y}_{B^+}$ , debe estar sobre el círculo con la misma  $g$  que  $\hat{y}_{B^-}$ . En la Fig. 2-45 se muestra una sección de este círculo con  $g = \text{constante}$  (círculo 2) y la ubicación encontrada para  $\hat{y}_{B^-}$ . Conocida  $\hat{y}_{B^-}$ , su susceptancia se sustituye en la ec. (2-111) para encontrar la susceptancia con la que debe contribuir el "stub" 1:

$$\hat{y}_{S_1} = \hat{y}_{B^-} - \hat{y}_{B^+}$$

e igualando partes imaginarias:

$$b|_{\text{"stub" 1}} = b|_{B^-} - \underbrace{b|_{B^+}}_{\text{susceptancia de la carga transferida al punto B}} \quad (2-112)$$

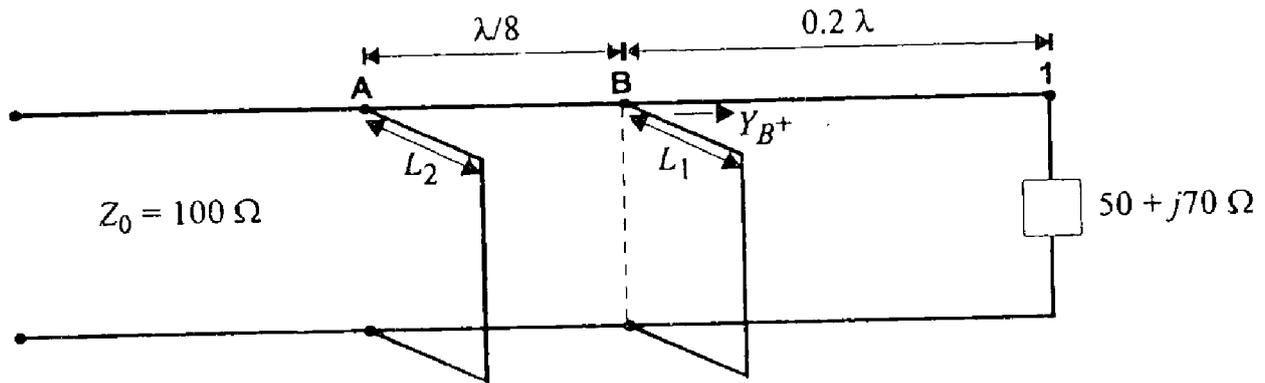


**Fig. 2-45** Acoplamiento con dos "stubs". Aunque la carta de Smith está impresa en su forma de impedancias, hay que trabajar sobre ella pensando en su forma de admittancias.

Como ya se sabe dónde está  $\hat{y}_B$ , se transfiere al círculo  $g = 1$ , en donde se lee la admittancia normalizada  $\hat{y}_A$ . La susceptancia de ésta debe ser el negativo de la susceptancia del "stub" 2, para que la admittancia total sea igual a 1, de acuerdo con la ec. (2-110). Con esto, ya se pueden calcular las longitudes de los "stubs" y el problema de acoplamiento ha quedado resuelto.

**Ejercicio 2-37** Una línea cuya impedancia característica es de  $100 \Omega$  termina en una carga de  $50 + j70 \Omega$ . Se desea acoplar la línea por medio de dos "stubs", situados respectivamente a una distancia de  $0.2 \lambda$  y  $0.2 \lambda + \lambda/8$  con relación a la carga. Encuentre la longitud de los dos acopladores cortocircuitados utilizando la carta de Smith.

*Solución*

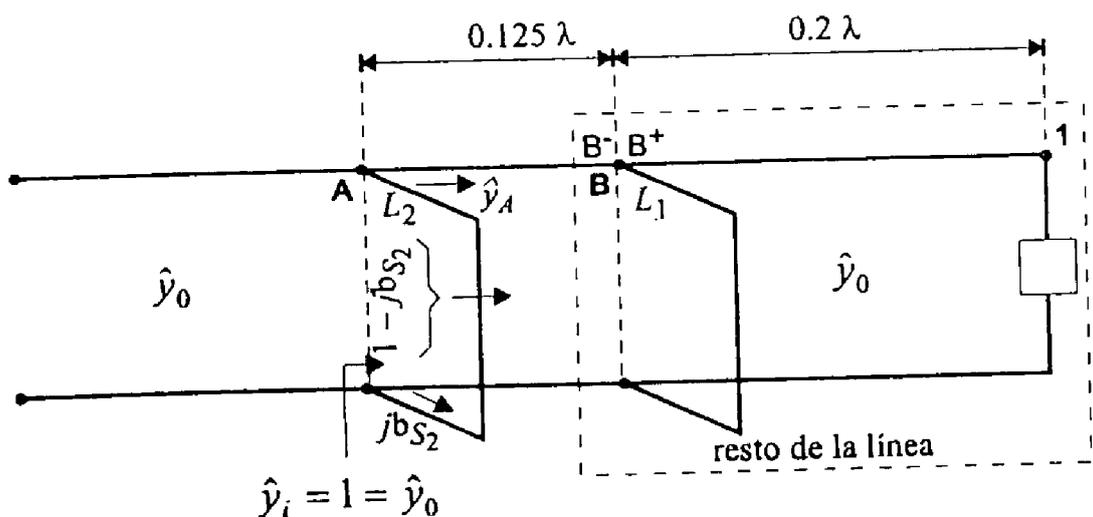


La admitancia normalizada de la carga es igual a:

$$\begin{aligned} \hat{y}_L &= \frac{Y_L}{Y_0} = 100 Y_L = 100 (0.00675 - j0.00946) \\ &= 0.675 - j0.946 \quad \text{(punto 1 en la carta)} \end{aligned}$$

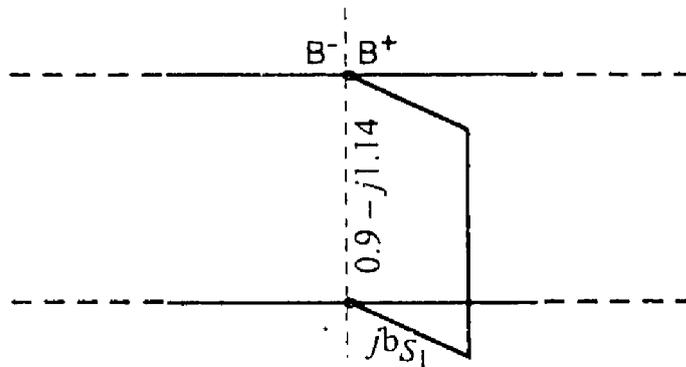
A una distancia de  $0.2 \lambda$  hacia el generador, la admitancia de la línea se mueve del punto 1 al punto  $B^+$  en la carta ( $0.9 - j1.14$ ), que equivaldría a  $\hat{y}_{B^+}$  en la ec. (2-111).

Por otra parte, a la izquierda del punto de conexión del "stub" 2 se desea tener una admitancia normalizada igual a la unidad (punto A):



Como el “stub” 2 proporcionará la susceptancia  $b_{S_2}$ , inmediatamente después del punto de conexión la admitancia puede valer  $1 - jb_{S_2}$  ( $\hat{y}_A$ ). Todos los puntos posibles  $\hat{y}_A$  se encuentran en el círculo  $C_1$  de la carta ( $g = 1$ ). Al transferir todos estos puntos posibles  $\hat{y}_A$  hasta el siguiente “stub” (hacia la carga), en la carta equivale a mover todo el círculo  $C_1$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj. El nuevo círculo que resulta ( $C_2$ ) contiene todos los puntos posibles  $B^-$  ( $\hat{y}_A$  transferida  $\lambda/8$  hacia la derecha de la línea).

Ahora bien, para que todo encaje correctamente en el punto de conexión del “stub” más cercano a la carga, se debe cumplir que la suma de las admitancias a la izquierda y a la derecha del punto de conexión sea la misma:



Como el “stub” 1 no contribuirá con una parte real, en  $B^-$  la parte real deberá valer lo mismo que en  $B^+$ , o sea  $g = 0.9$ . Por lo tanto, los puntos  $B^-$  que cumplen con esta condición se encuentran desplazando al punto  $B^+$  sobre el círculo de  $g$  constante igual a 0.9 hasta cruzar el círculo  $C_2$ . Ambas posibilidades están marcadas en la carta como los puntos  $\hat{y}_{B_1^-}$  y  $\hat{y}_{B_2^-}$ . De la *ec. (2-111)*:

$$\hat{y}_{B_1^-} = 0.9 + j0.005 = 0.9 - j1.14 + jb_{S_1} \Rightarrow b_{S_1} = 1.145$$

(primera opción)

$$\hat{y}_{B_2^-} = 0.9 + j1.96 = 0.9 - j1.14 + jb_{S_1} \Rightarrow b_{S_1} = 3.1$$

(segunda opción)

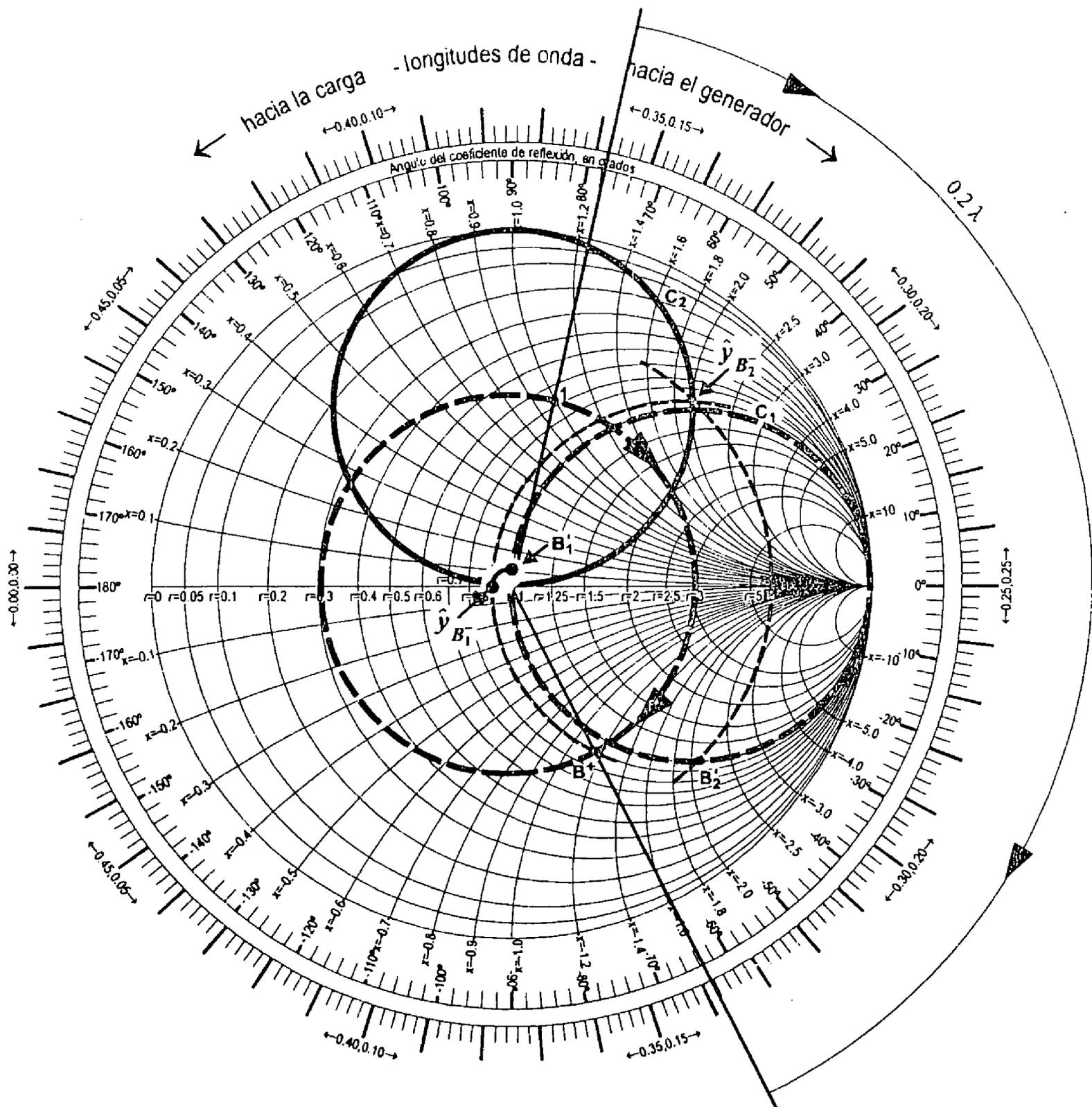
Regresando ahora al “stub” 2, los puntos  $\hat{y}_{A_1}$  y  $\hat{y}_{A_2}$  se encuentran fácilmente transfiriendo a  $\hat{y}_{B_1^-}$  y  $\hat{y}_{B_2^-}$ , respectivamente,  $\lambda/8$  hacia el generador (obviamente, quedarán sobre el círculo  $C_1$ ). Sus admitancias se leen directamente en la carta:

$$\hat{y}_{A_1} = 1 + j0.1 \qquad \hat{y}_{A_2} = 1 - j2.1$$

Usando la ec. (2-109), se tiene:

$$1 = \hat{y}_{A_1} + j b_{S_2} = (1 + j0.1) + j b_{S_2} \Rightarrow b_{S_2} = -0.1$$

(primera opción)

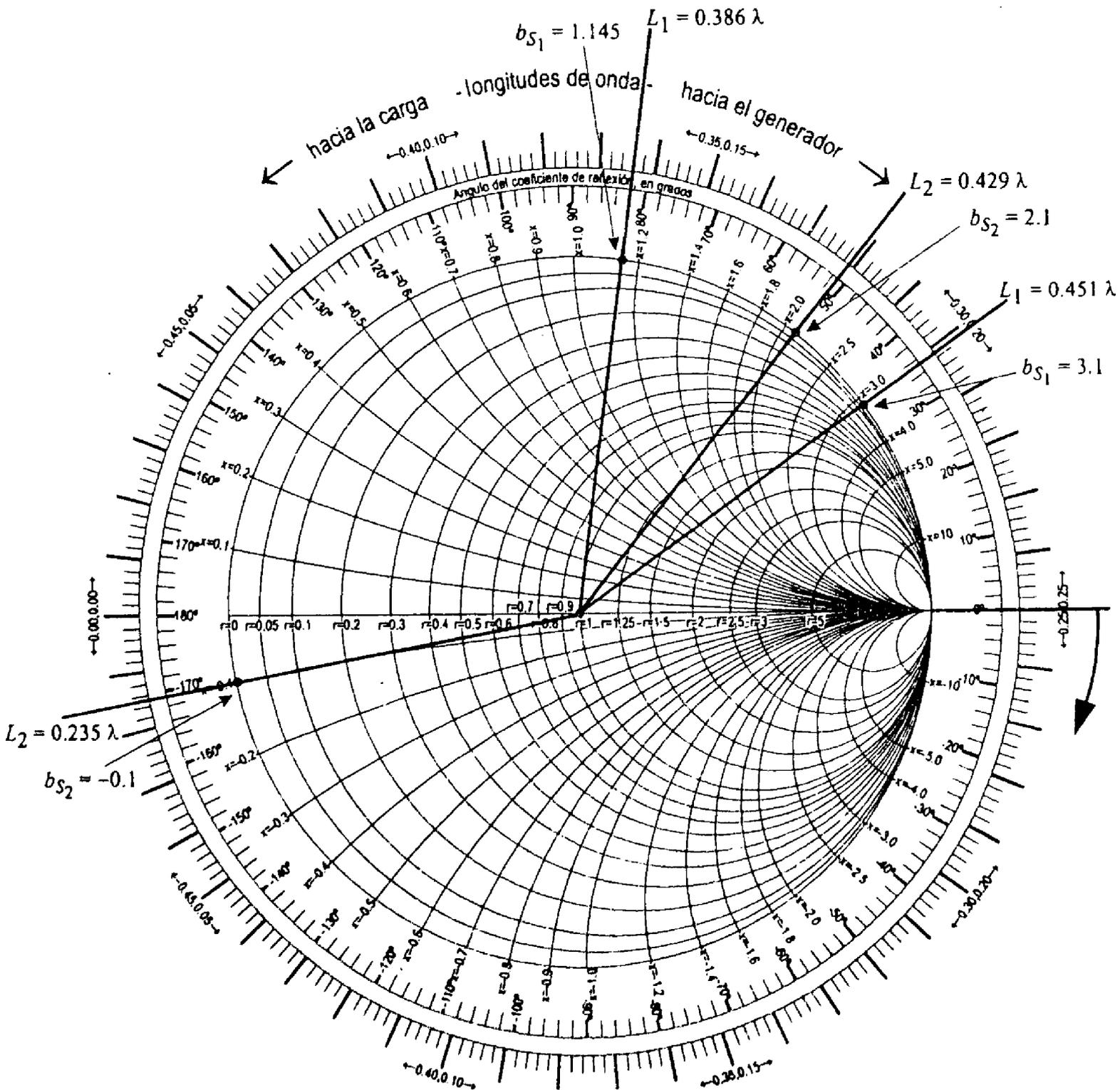


Carta de Smith del Ejercicio 2-37.

$$1 = \hat{y}_{A_2} + jb_{S_2} = (1 - j2.1) + jb_{S_2} \Rightarrow b_{S_2} = 2.1$$

(segunda opción)

Solamente resta encontrar las longitudes de los "stubs". Empleando otra carta de Smith, se encuentra que:



Cálculo de las longitudes de los "stubs" del Ejercicio 2-37.

primera opción

$$L_1 = 0.386 \lambda$$

$$L_2 = 0.235 \lambda$$

segunda opción

$$L_1 = 0.451 \lambda$$

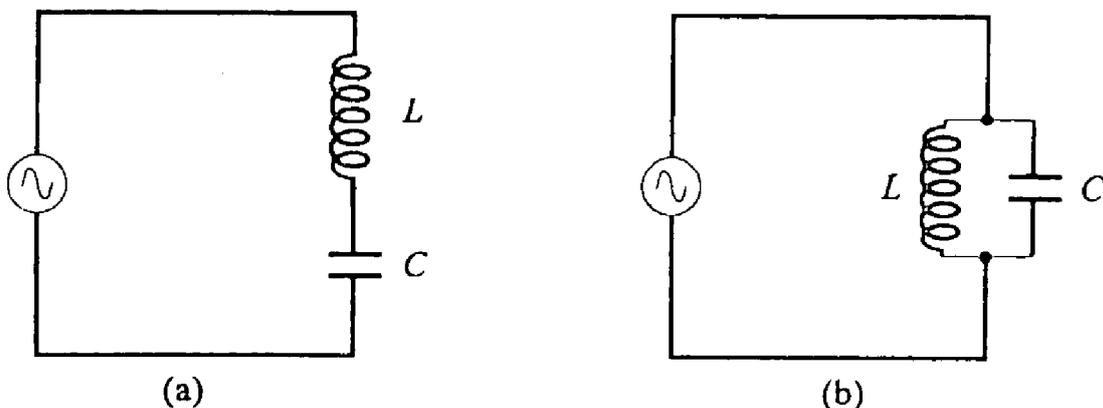
$$L_2 = 0.429 \lambda$$

## 2.17 Resonancia, factor de calidad y cavidades resonantes

Además de lo ya visto en secciones anteriores, las secciones de línea terminadas en cortocircuito tienen una aplicación muy importante en el diseño y fabricación de filtros, medidores de frecuencia, amplificadores y osciladores. Específicamente, un tramo coaxial cortocircuitado en **ambos** extremos puede, bajo ciertos parámetros de trabajo, funcionar como una *cavidad resonante* o *resonador de cavidad*. A muy altas frecuencias, un resonador toma el lugar de lo que sería el conjunto de inductancias y capacitancias empleadas a frecuencias más bajas en circuitos “resonantes” o “sintonizados”.

Antes de entrar en materia, recuérdese que un circuito resonante en serie o en paralelo (Fig. 2-46) tiene una frecuencia resonante  $f_0$  dada por la ecuación siguiente:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2-109)$$



**Fig. 2-46** Circuitos resonantes. (a) En serie. (b) En paralelo.

Se dice que un circuito es resonante cuando responde o entrega a la salida con amplitud máxima, para una cierta fuerza o señal de entrada aplicada. Esto ocurre a una cierta frecuencia de resonancia, en la que la reactancia inductiva es igual en magnitud a la reactancia capacitiva; es decir:

$$\underbrace{\omega L}_{\text{magnitud de la reactancia inductiva}} = \underbrace{\frac{1}{\omega C}}_{\text{magnitud de la reactancia capacitiva}}$$

Sustituyendo  $\omega = 2\pi f$ , la igualdad anterior se resuelve para encontrar la frecuencia de resonancia dada por la ec. (2-109).

Si ahora se introduce la resistencia  $R$  que tiene todo circuito en la realidad, los circuitos en serie y en paralelo adoptan la forma mostrada en la Fig. 2-47.

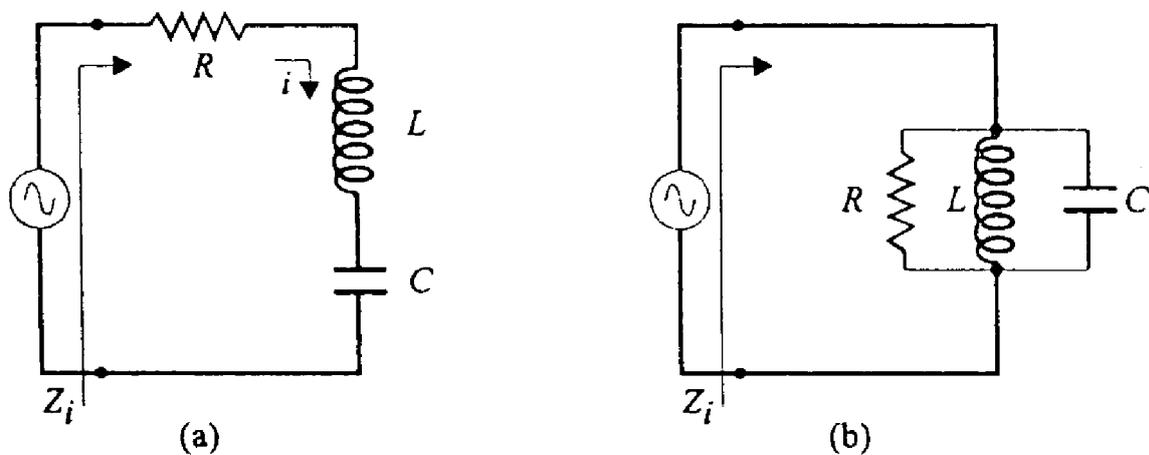


Fig. 2-47 Circuitos resonantes. (a) En serie. (b) En paralelo.

La magnitud de la impedancia de entrada total del circuito resonante en serie de la Fig. 2-47 (a) es mínima a la frecuencia  $f_0$  (ec. 2-109), en la que las componentes reactivas se cancelan. La corriente alcanza su valor máximo bajo esta condición, y se dice que el circuito está en resonancia. A frecuencias un poco arriba y un poco abajo de la frecuencia de resonancia  $f_0$ , la corriente será menor, obteniéndose así una respuesta similar a la de la Fig. 2-48. Nótese que la caída de voltaje entre las terminales del capacitor con reactancia

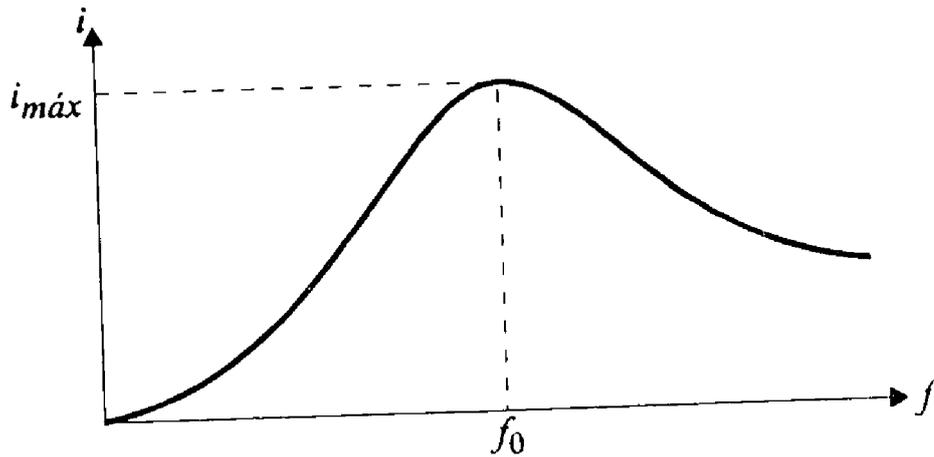


Fig. 2-48 Respuesta de un circuito en serie a diferentes frecuencias. La corriente es máxima a la frecuencia de resonancia.

$X_C$  sería igual a  $v_C = (X_C) (i)$ . Es decir que, aun cuando el voltaje de entrada aplicado al circuito sea bajo, originando cierta corriente  $i$  (máxima en resonancia), el voltaje en el capacitor sería **muchas veces mayor**, por un factor igual a  $Q$ . Debido a esta magnificación, este *factor*  $Q$  del circuito también se conoce como “factor de magnificación”, o simplemente se le dice “la  $Q$ ” del circuito. Para el circuito resonante en serie bajo estudio, esta  $Q$  está dada por:

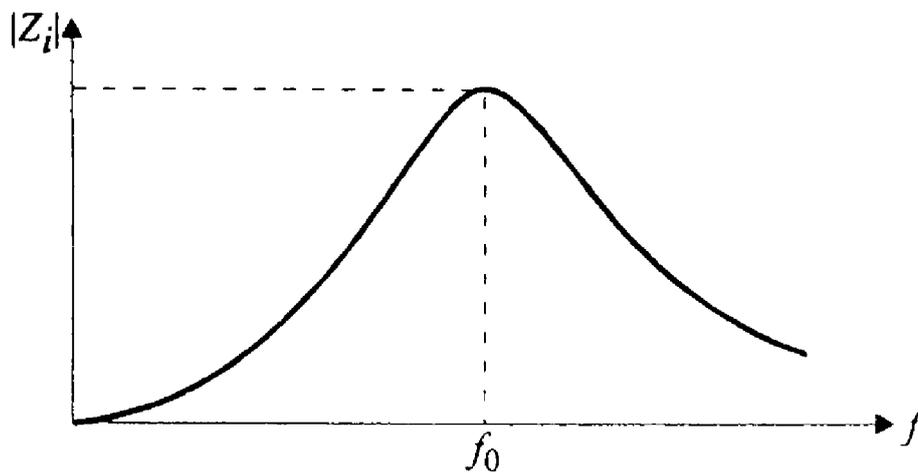
$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} \quad (2-110)$$

Mientras menor sea la resistencia del circuito, la  $Q$  será cada vez más grande, a la frecuencia de resonancia. En el caso ideal, si  $R = 0$ , la  $Q$  tendería a infinito.

Por lo que se refiere al circuito en paralelo de la Fig. 2-47 (b), cuando está en resonancia, presenta una impedancia de entrada muy alta. En este caso, el factor  $Q$  está dado por:

$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{X_C} \quad (2-111)$$

y la impedancia de entrada, en función de la frecuencia  $f$ , se puede calcular a partir de la expresión siguiente, cuya demostración se omitirá en el texto:



**Fig. 2-49** Impedancia de entrada de un circuito  $RLC$  en paralelo. Su magnitud es máxima a la frecuencia de resonancia  $f_0$ .

$$Z_i(f) = \frac{R}{1 + jQ \left[ \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right]} \quad (2-112)$$

en donde  $f_0$  es la frecuencia de resonancia dada por la ec. (2-109). La gráfica de la magnitud de  $Z_i$  se puede obtener a partir de la ec. (2-112), resultando una curva típica como la mostrada en la Fig. 2-49. En resonancia, su fase vale cero; para otras frecuencias varía entre  $+90^\circ$  y  $-90^\circ$ , volviéndose más y más inductiva o capacitiva a frecuencias cada vez más lejos de la de resonancia.

El recordatorio que hemos hecho nos permite ahora suponer que en una línea de transmisión de longitud  $l$  con muy bajas pérdidas ( $\alpha l$  pequeño) pueda obtenerse el fenómeno de resonancia. De hecho, ya se ha visto que la impedancia vista a lo largo de una línea desacoplada se repite cada  $\lambda/2$ , y que hay máximos y mínimos alternados cada  $\lambda/4$ , que son puramente resistivos y que constituyen las transiciones entre las impedancias inductivas y capacitivas, y viceversa. Por ejemplo, una línea cortocircuitada está en resonancia cuando su longitud es igual a un múltiplo impar de  $\lambda/4$ , y su modelo equivalente en teoría de circuitos sería precisamente el del circuito  $RLC$  en paralelo de la Fig. 2-47 (b). Omitiremos aquí el desarrollo matemático y presentaremos solamente los resultados de esta equivalencia. Si la línea mide  $\lambda/4$  y sus pérdidas son bajas, al igualar las ecuaciones de la

impedancia de entrada de la línea y de su circuito equivalente  $RLC$ , resulta que:

$$R = \frac{Z_0}{\alpha l} \quad L = \frac{2Z_0}{\pi^2 f_0} \quad C = \frac{1}{8Z_0 f_0} \quad (2-113)$$

y de la ec. (2-111), la  $Q$  de la línea es:

$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{2\pi f_0 L} = \frac{(Z_0)(\pi^2 f_0)}{(\alpha l)(2\pi f_0)(2Z_0)} = \frac{\pi}{4\alpha l} \quad (2-114)$$

De la ec. (2-114), se observa que si  $\alpha l$  es muy pequeña, la  $Q$  de la línea de bajas pérdidas cortocircuitada será muy grande, de varios cientos o miles, según el caso. Es decir, que su impedancia de entrada es muy alta a la frecuencia de resonancia; por lo tanto, las frecuencias bajas pasan libremente, mientras que la frecuencia de resonancia es bloqueada.

En el caso de una línea de  $\lambda/4$  terminada en circuito abierto, su circuito equivalente sería el circuito  $RLC$  en serie de la Fig. 2-47 (a). Ambos (línea y circuito) presentan una impedancia de entrada muy baja, que bloquea a las frecuencias bajas y permite el paso libre de una onda a la frecuencia de resonancia (cuando  $l = \lambda/4$ ).

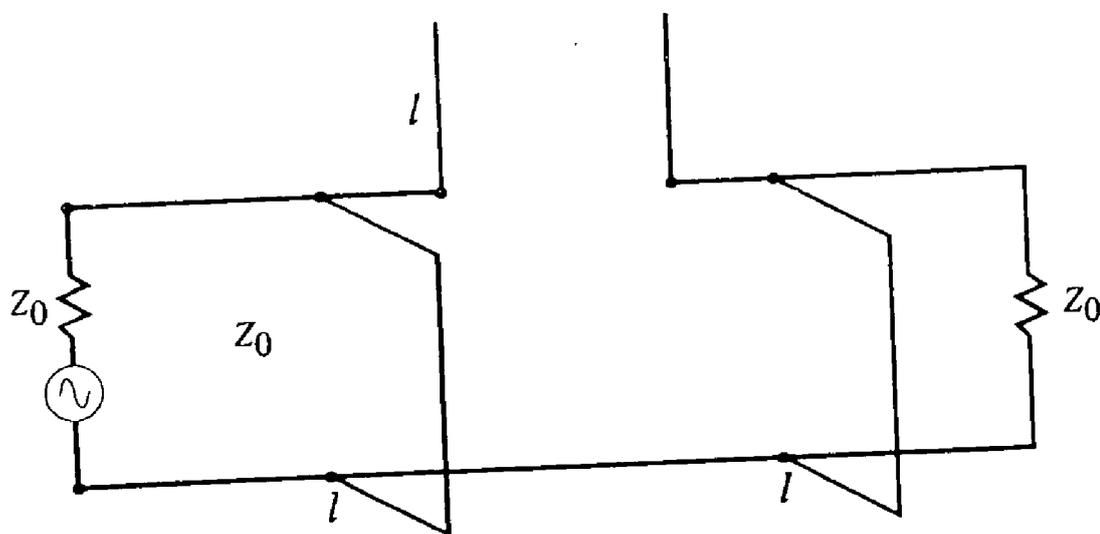


Fig. 2-50 Topología de un filtro pasa-banda usando secciones de línea resonantes.

Las propiedades anteriores de resonancia se aprovechan para fabricar cavidades resonantes. Existen diferentes tipos de cavidades y, como se verá en el capítulo 4, también se utilizan en sistemas de microondas con guías rectangulares y circulares, donde adoptan la forma de “cajas” rectangulares o cilíndricas con pequeñas aperturas.

Tal como se expresó al inicio de esta sección, las cavidades resonantes permiten diseñar una gran variedad de elementos necesarios a altas frecuencias, como filtros selectivos y medidores de frecuencia. A manera de ejemplo, en la Fig. 2-50 se muestra la topología de un filtro pasa-banda.

**Ejercicio 2-38** Un cable coaxial rígido con aire en su interior presenta una atenuación de 0.0075 dB/m. Calcule el factor  $Q$  para un tramo cortocircuitado hecho con ese tipo de cable, que mida  $\lambda/4$ , a una frecuencia de 600 MHz.

*Solución*

$$\alpha = 0.0075 \text{ dB/m} = \frac{0.0075}{8.68} \text{ Np/m} = 0.000864 \text{ Np/m}$$

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{3 \times 10^8}{600 \times 10^6} \right] = 12.5 \text{ cm}$$

Sustituyendo en la ec. (2-114):

$$Q = \frac{\pi}{4\alpha l} = \frac{\pi}{0.000864 \times 0.125} = 7,270$$


---

## 2.18 Problemas

**2.18.1** Una línea telefónica de uso interior, para efectuar la conexión de la caja del teléfono a la red exterior, consiste de dos conductores paralelos de cobre con diámetro de 0.60 mm. La separación entre los centros de los

conductores es de 2.5 mm y el material aislante entre ambos es polietileno. Calcule los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  por unidad de longitud a una frecuencia de 3 kHz. [ $L = 942$  nH/m,  $C = 30$  pF/m,  $R = 122$  m $\Omega$ /m,  $G = 112$  p $\Upsilon$ /m].

**2.18.2** Un cable coaxial utilizado en sistemas de VHF, UHF y microondas tiene conductores de cobre aislados entre sí con polietileno. El radio del conductor interno es de 1.5 mm y el del externo es de 4.8 mm. Obtenga los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  por unidad de longitud a 100 MHz y a 1 GHz. [100 MHz:  $L = 232$  nH/m,  $C = 108$  pF/m,  $R = 363$  m $\Omega$ /m,  $G = 13.6$   $\mu\Upsilon$ /m; 1 GHz:  $L = 232$  nH/m,  $C = 108$  pF/m,  $R = 1.15$   $\Omega$ /m,  $G = 136$   $\mu\Upsilon$ /m].

**2.18.3** Un cable coaxial empleado para transmitir potencias elevadas en VHF, UHF y microondas está formado por dos conductores de cobre aislados con aire. El conductor interno permanece centrado gracias a una fina y rígida hélice vertebral de polietileno. El radio del conductor interno es de 10 mm y el del externo es de 36 mm. Ignore la hélice de polietileno y suponga que todo el volumen entre los dos conductores está relleno de aire. Para este cable grueso de alta potencia, calcule los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  por unidad de longitud a 100 MHz y a 1 GHz.

**2.18.4** Una línea de transmisión formada por dos placas paralelas de níquel (Fig. 2-10) tiene las dimensiones  $a = 0.25$  mm,  $b = 6$  mm. El grosor de las placas es de 50  $\mu$ m. Determine los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$  por unidad de longitud a 10 GHz, suponiendo que el dieléctrico entre las placas es cuarzo. [ $L = 52$  nH/m,  $C = 807$  pF/m,  $R = 17$   $\Omega$ /m,  $G = 38$  m $\Upsilon$ /m].

**2.18.5** Las constantes primarias de una línea telefónica bifilar abierta son:  $R = 6 \times 10^{-3}$   $\Omega$ /m,  $L = 2 \times 10^{-6}$  H/m,  $C = 5 \times 10^{-12}$  F/m y  $G = 0.3 \times 10^{-9}$   $\Upsilon$ /m. Calcule la impedancia característica de la línea y la constante de propagación a una frecuencia de 10 kHz. [ $Z_0 = 632.6 - j14.8$   $\Omega$ ,  $\gamma = (4.84 + j198.75) \times 10^{-6}$ ].

**2.18.6** Utilizando los mismos datos del problema 2.18.1, suponga que al final de la línea hay un aparato receptor que presenta una impedancia de entrada de 600  $\Omega$ . Obtenga el coeficiente de reflexión en la carga.

**2.18.7** Un cable coaxial tiene los siguientes parámetros a 10 MHz:  $R = 3 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$ ,  $L = 0.3 \times 10^{-6} \text{ H/m}$ ,  $C = 9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  y  $G = 3.5 \times 10^{-6} \text{ S/m}$ . Determine su constante de atenuación en dB/m, su impedancia característica, y la relación de onda estacionaria cuando al final del cable se conecta una carga con impedancia de  $60 + j40 \Omega$ . [ $\alpha = 2.85 \times 10^{-3} \text{ dB/m}$ ,  $Z_0 = 182.6 + j0.55 \Omega$ ,  $ROE = 3.2$ ].

**2.18.8** Usando los mismos datos del problema 2.18.3, suponga que el cable mide 10 km. En el extremo transmisor hay un generador con voltaje interno de 10 V e impedancia interna de  $50 \Omega$ , a una frecuencia de 100 MHz. Las características de la carga permiten considerar que la línea está acoplada. Obtenga la eficiencia de la línea, tomando en cuenta las pérdidas de la misma.

**2.18.9** Un cable coaxial con impedancia característica de  $75 \Omega$  termina en una carga resistiva de  $100 \Omega$ , a una frecuencia de 600 MHz. Diga cuánto vale la impedancia vista en los puntos siguientes sobre la línea: a) en la carga, b) a 10 cm. antes de la carga, c) a  $\lambda/4$  antes de la carga, d) a  $\lambda/2$  antes de la carga, y e) a  $3\lambda/2$  antes de la carga. [ $Z = 100 \Omega$ ,  $Z = 58.8 + j10.2 \Omega$ ,  $Z = 56.25 \Omega$ ,  $Z = 100 \Omega$ ,  $Z = 100 \Omega$ ].

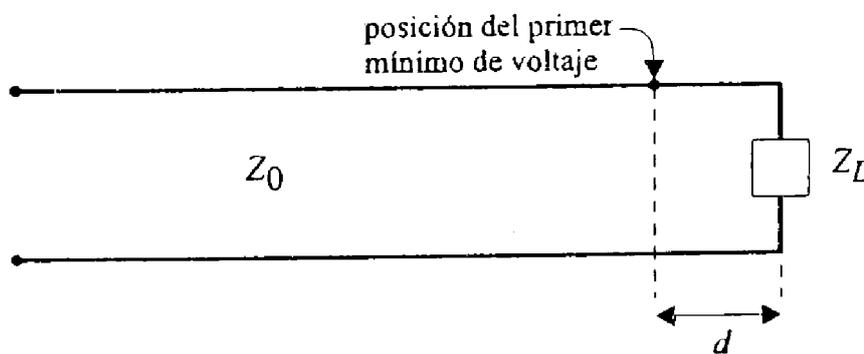
**2.18.10** Considere una línea sin pérdidas con 2 m de longitud, que a cierta frecuencia de medición es menor que  $\lambda/4$ . Las mediciones al terminar la línea en cortocircuito y en circuito abierto dieron impedancias de entrada de  $j110 \Omega$  y  $-j52 \Omega$ , respectivamente. Evalúe la constante de fase y la impedancia característica de la línea. [ $\beta = 0.484 \text{ rad/m}$ ,  $Z_0 = 75.6 \Omega$ ].

**2.18.11** En cierta línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica  $Z_0 = 50 \Omega$ , se midió en el laboratorio un  $VSWR$  de 3.20, y se encontró un mínimo de voltaje a una distancia de 2.6 longitudes de onda, medida desde la carga hacia el generador. Use la carta de Smith y encuentre el valor de la impedancia de la carga.

**2.18.12** Al final de una línea con  $Z_0 = 75 \Omega$  se conecta una carga con impedancia de  $75 + j25 \Omega$ . La longitud de onda de la onda incidente en la línea mide 1 m. Con la carta de Smith encuentre: a) el  $VSWR$ , y b) la posición del primer mínimo a la izquierda de la carga. [a)  $VSWR = 1.4$ , b) posición = 36.2 cm].

2.18.13) Una línea de transmisión sin pérdidas tiene una impedancia característica de  $100 \Omega$  y está terminada con una carga compleja de  $120 + j80 \Omega$ . Se desea acoplar esta línea con un tramo de  $\lambda/4$  en serie. Encuentre: a) la distancia necesaria entre el acoplador y la carga, y b) la impedancia característica del acoplador. [a)  $0.0775 \lambda$ , b)  $145 \Omega$ ].

2.18.14) Use la carta de Smith para encontrar la impedancia que debe tener la carga ( $Z_L$ ) de una línea, cuya impedancia característica es  $Z_0$ , de tal forma que el ROE o VSWR tenga los valores especificados a continuación, a una frecuencia de 3 GHz.



$d$	VSWR
1.52 cm	2.0
4.38 cm	2.0
2.08 cm	4.0

$$[ Z_L = (1 - j0.7) Z_0 ]$$

$$[ Z_L = (0.56 + j0.3) Z_0 ]$$

$$[ Z_L = (1.98 - j1.9) Z_0 ]$$

2.18.15) Una línea sin pérdidas con impedancia característica de  $75 \Omega$  termina en una carga con  $Z_L = 15 + j75 \Omega$ . Se desea usar un equilibrador reactivo con el fin de acoplar la línea. Encuentre la posición y la susceptancia capacitiva normalizada que debe tener el "stub" en el punto de conexión con la línea principal. [ $0.328 \lambda$  antes de la carga,  $b_s = -3$ ].

2.18.16) Un cable coaxial relleno de polietileno ( $\epsilon_r = 2.26$ ) tiene una impedancia característica de  $50 \Omega$  y una longitud de 25 m. El cable se utiliza para alimentar a una carga compleja de  $75 - j30 \Omega$  a 600 MHz. Calcule: a) el coeficiente de reflexión de voltajes en la carga (magnitud y fase); b) la

distancia, en metros, entre la carga y el primer mínimo de voltaje de la onda estacionaria; c) el valor del  $VSWR$ . Resuelva el problema usando dos métodos diferentes: 1) analíticamente, 2) con la carta de Smith.

**2.18.17)** Para el mismo cable del problema anterior, encuentre las características de un acoplador de impedancias para eliminar la reflexión en la carga. Dé dos opciones: a) línea de  $\lambda/4$  en serie, b) línea terminada en corto circuito (1 "stub"), en paralelo con el cable. Resuelva las dos opciones de este problema apoyándose en la carta de Smith.

**2.18.18)** Se tiene un cable con una impedancia característica de  $50 \Omega$ . En el extremo final del cable hay una carga con impedancia desconocida, pero se sabe que la relación de onda estacionaria es igual a 2. También se sabe que la distancia entre puntos adyacentes de voltaje mínimo es igual a 30 cm. Además, se sabe que si se retira la carga desconocida y se le sustituye por un corto circuito, entonces todos los puntos de voltaje mínimo se mueven 7.5 cm hacia el generador. ¿Cuál es el valor de la carga desconocida, en ohms? [ $Z_L = 40 + j29 \Omega$ ].

**2.18.19)** Se tiene una línea con pérdidas. La línea mide  $1.5 \lambda$ , su impedancia característica es de  $50 \Omega$ , y las pérdidas totales en la longitud de la línea son de 3 dB. Si en el extremo final de la línea se pone una carga de  $100 \Omega$ , ¿cuánto vale la impedancia de entrada de la línea? [ $Z_i = 70 \Omega$ ].

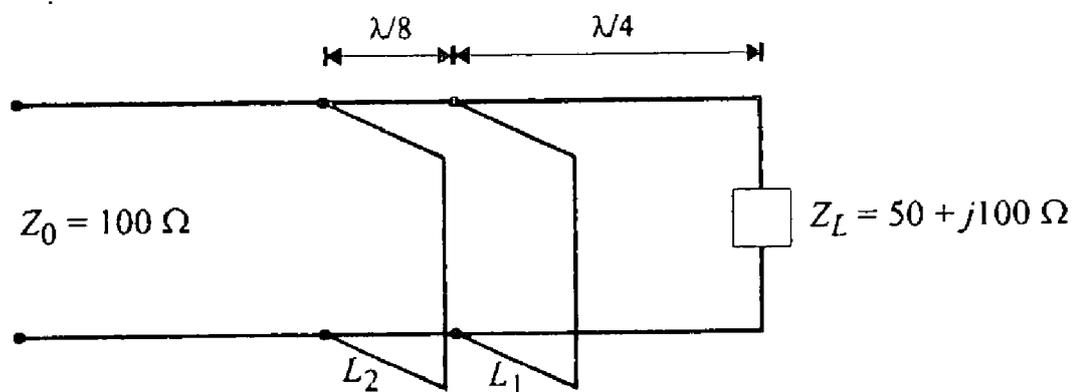
**2.18.20)** Se tiene un cable coaxial cuya impedancia característica es igual a  $150 \Omega$ . El cable termina en una carga desconocida y tampoco se conoce la longitud total del cable. Suponiendo que con la carta de Smith se calculó que a una distancia de  $5 \lambda$  antes de llegar a la carga la impedancia normalizada de entrada vale  $0.4 - j0.2$ , ¿cuánto vale la impedancia vista por la señal que viaja hacia la carga precisamente dos longitudes de onda antes de llegar a la carga? ¿Cuánto vale la admitancia a  $0.15 \lambda$  antes de llegar a la carga? [ $Z = 60 - j30 \Omega$ ,  $Y = 0.005 - j0.0053 \text{ S}$ ].

**2.18.21)** Una línea sin pérdidas con  $Z_0 = 100 \Omega$  termina en una carga con  $Z_L = 200 - j300 \Omega$ . Use la carta de Smith y calcule la impedancia de entrada de la línea, si ésta mide: a)  $0.125 \lambda$ , b)  $0.5 \lambda$ , c)  $0.8 \lambda$ . También obtenga el

coeficiente de reflexión en la carga y el  $VSWR$  de la línea. [a)  $Z_i = 22 - j60 \Omega$ , b)  $Z_i = 200 - j300 \Omega$ , c)  $21 + j59 \Omega$ ,  $\rho_L = 0.745 \angle -26.6^\circ$ ,  $VSWR = 6.84$ ]. Equilibre los terminales con los cables.

**2.18.22** Una línea de transmisión con  $Z_0 = 50 \Omega$  opera a una frecuencia de 1.875 GHz. El valor de la impedancia de la carga se desconoce, pero se sabe que el  $VSWR$  vale 2 y que la distancia entre máximos adyacentes de voltaje de la onda estacionaria es de 8 cm. También se sabe que el primer mínimo de voltaje está a 1.5 cm a la izquierda de la carga. ¿Cuánto vale  $Z_L$ ? Considere aire como dieléctrico en la línea. [ $Z_L = 32.5 - j22.5 \Omega$ ].

**2.18.23** Se tiene una línea de transmisión sin pérdidas y desacoplada, como se indica en la figura. Se desea acoplarla con dos "stubs", colocados en los puntos mostrados. Use la carta de Smith y encuentre la longitud mínima que deben tener los "stubs". [ $L_1 = 0.136 \lambda$ ,  $L_2 = 0.151 \lambda$ ].



**2.18.24** Una línea sin pérdidas con admitancia característica de  $0.01 \text{ S}$  termina en una carga con admitancia  $Y_L = 0.004 + j0.006 \text{ S}$ . Calcule la posición y la longitud de un equilibrador reactivo que permita acoplar a la línea. [ $0.078 \lambda$  antes de la carga,  $L = 0.102 \lambda$ ].

**2.18.25** Una línea de transmisión con  $Z_0 = 50 \Omega$  tiene una carga con  $Z_L = 60 + j80 \Omega$ . Se necesita acoplarla con dos "stubs", separados  $\lambda/8$  entre sí. Como requisito, el primer "stub" debe ir conectado en el mismo punto donde está la carga. Encuentre la longitud de cada "stub". [ $L_1 = 0.351 \lambda$ ,  $L_2 = 0.094 \lambda$ ].

# Aplicaciones de las líneas de dos conductores

---

## 3.1 El cable bifilar

De acuerdo con lo expuesto en la sección 1.3, el cable bifilar, en su forma de línea desnuda o abierta (es decir, con aire entre los dos conductores), fue el primero en utilizarse como medio de transmisión para telefonía, ya bien entrada la segunda mitad del siglo XIX. Generalmente, la separación entre los conductores era de unos 20 cm. Con tal geometría, y por el hecho de emplear al aire como dieléctrico, la atenuación en cada línea era relativamente baja, y las señales transmitidas podían viajar varias decenas de kilómetros sin que fuese necesario usar ningún tipo de amplificación.

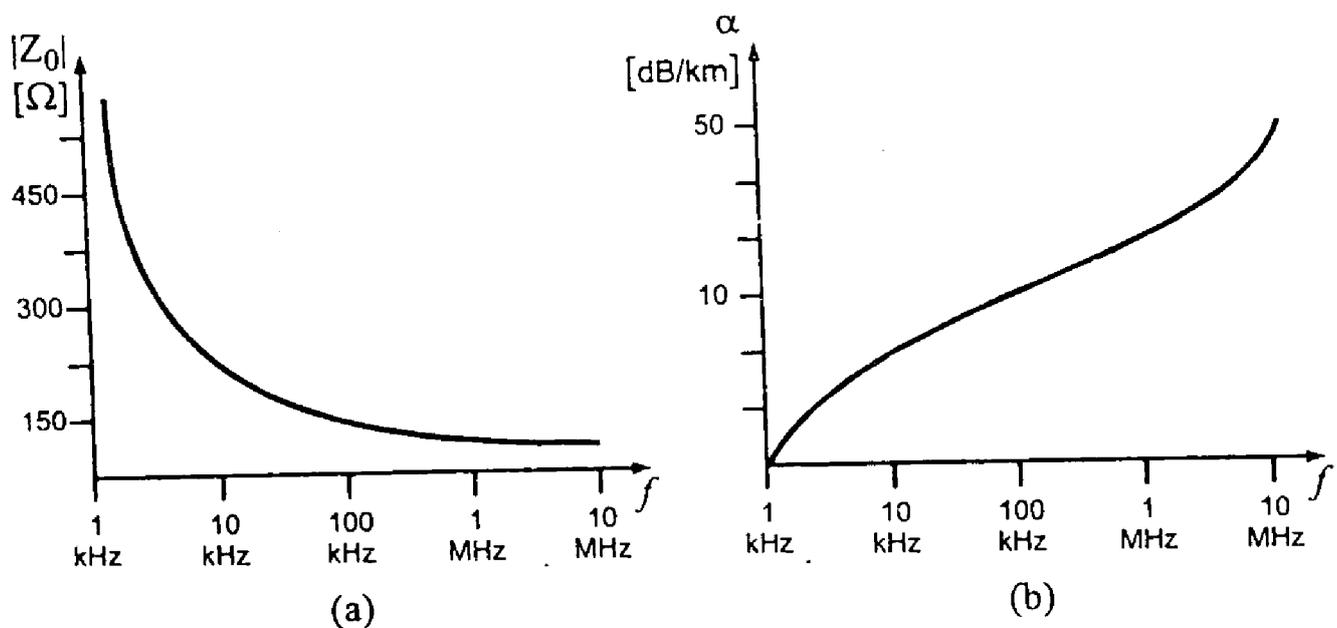
Sin embargo, cada línea desnuda sólo podía transmitir un canal de telefonía a la vez (véase la Fig. 1-8). Con el transcurso del tiempo, este medio de transmisión fue cayendo en desuso, pues la introducción de nuevos materiales aislantes y el propio crecimiento del tráfico telefónico impulsaron el uso de los cables multipar (sección 3.2). Estos últimos consisten de muchas líneas bifilares individuales colocadas en paralelo, en forma de paquete, dentro de una misma cubierta plástica común; a su vez, cada una de estas líneas bifilares puede tener papel o polietileno como aislante entre sus dos conductores, cuya separación ahora es de unos cuantos milímetros.

Además de su amplia y obligada utilización en los cables multipar, los cables bifilares individuales o sencillos también se siguen empleando en una

diversidad de aplicaciones en comunicaciones y electrónica. Por ejemplo, en las conexiones de audio de los equipos modulares con sus bocinas respectivas, en los aparatos personales portátiles de radio o de discos compactos (popularmente conocidos como "walk-man"), en micrófonos, en aparatos telefónicos caseros, en redes locales para la transmisión de datos en los interiores de edificios\* y, en general, en todos aquellos casos en los que no se requiera usar un ancho de banda muy grande ni frecuencias muy elevadas.

Como ya se ha visto en el capítulo 2, la separación entre los conductores y el tipo de aislante entre ellos determinan el valor de la impedancia característica  $Z_0$  de un cable bifilar. Este dato, además de otros, es proporcionado generalmente por los fabricantes en sus catálogos. Sin embargo, recuérdese que  $Z_0$  tiene cambios significativos a bajas frecuencias, porque hay corriente dentro de los conductores y esto influye en la inductancia de la línea. Por lo tanto, el valor dado por el proveedor es una cifra promedio dentro del rango de frecuencias sugerido para el uso de cada línea en particular.

En la Fig. 3-1a se muestra la forma típica que tiene la curva de la magnitud de la impedancia característica, en función de la frecuencia, para un cable bifilar. Se observa que, a medida que la frecuencia aumenta, esta magnitud



**Fig. 3-1** Curvas típicas de una línea bifilar arbitraria: a) magnitud de la impedancia característica, b) atenuación.

\* La tecnología actual permite transmitir en distancias cortas a velocidades de hasta varios Mbps.

tiende hacia un valor constante. Desde luego, esto coincide con la teoría vista en el capítulo anterior. Por lo que se refiere a la fase de  $Z_0$ , no mostrada en la figura, recuérdese que también tiene cambios importantes con la frecuencia, pero que conforme ésta aumenta, dicha fase tiende a cero grados, ya que  $Z_0$  es prácticamente real pura o resistiva. Nótese que la curva exacta para un cable en particular dependerá del metal de sus conductores (cobre), de sus radios y de la separación entre ambos\*, así como del tipo de aislante empleado. Si fuese necesaria, esta curva se le podría solicitar al fabricante del cable, o bien, podría obtenerse con un sencillo programa de computadora que siga el procedimiento visto en los ejercicios de las secciones 2.1 y 2.2. Asimismo, con el programa también se podría obtener de una buena vez la curva del coeficiente de atenuación  $\alpha$ , pues se conocerían los parámetros de la línea  $R, L, C$  y  $G$  a diferentes frecuencias. La forma típica de esta segunda curva se muestra en la Fig. 3-1b. Se observa que la atenuación aumenta con la frecuencia y que, en consecuencia, la línea es impráctica a altas frecuencias.

En conclusión, la impedancia característica de un cable bifilar puede valer hasta varios cientos de ohms y su atenuación puede ser de varias decenas de decibels por kilómetro. Como simple comparación, y aunque sus aplicaciones sean evidentemente distintas, recuérdese de lo visto en la sección 1.3, que una fibra óptica tiene en la actualidad mucho menos que un decibel de atenuación por kilómetro.

### 3.2 El cable multipar trenzado

Tal como se comentó en la sección anterior, el rápido crecimiento del tráfico telefónico trajo consigo la invención y la popularidad de los cables multipar. Algunos solamente tienen dos pares en su interior, pero otros pueden constar de docenas o cientos. El término *par* equivale a una línea bifilar individual, cuyos conductores de cobre tienen diámetros típicos de entre 0.5 y 2.0 mm, según el fabricante y el uso específico del cable. Por lo general, la separación entre los ejes de los dos conductores es de 1.5 veces el diámetro de cualquiera de ellos.

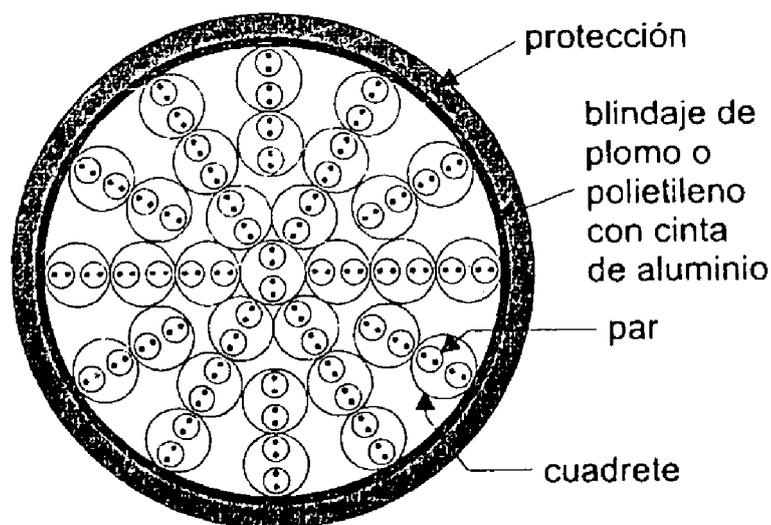
---

\*A una determinada frecuencia,  $Z_0$  aumenta progresivamente conforme se hace mayor la separación entre los conductores de la línea bifilar. En un cable coaxial también se observa un comportamiento similar, pues  $Z_0$  aumenta conforme la distancia entre los conductores interno y externo también se incrementa, dejando fijo el grueso del conductor interno.

El aislante que ahora se emplea comúnmente entre cada pareja de conductores es polietileno. También es común colocar dentro de un cable multipar a los pares individuales “por parejas”; a cada una de estas parejas de pares se le llama *cuadrete*. En la Fig. 3-2 se ejemplifica cómo es la colocación típica de los pares dentro de un cable multipar cualquiera. Nótese que los cuadretes están distribuidos en capas anulares concéntricas.

Entre otras aplicaciones, los cables multipar se emplean en redes locales de transmisión de datos y en líneas interurbanas de telefonía multicanal. Además, en todo el mundo se utilizan para llevar las señales de los abonados de una zona desde un punto concentrador o caja de registro hasta la central telefónica que les corresponda. La maraña de pares y cuadretes es tal, que se emplean códigos de colores y franjas para identificarlos a la hora de hacer las conexiones pertinentes de instalación o mantenimiento. Así, por ejemplo, la cubierta de un cierto cuadrete podría ser roja, con una franja azul; la de otro sería verde, con una franja negra; y así por el estilo.

En este tipo de cables se presenta el fenómeno de la *diafonía*, debido a la cercanía entre los pares y al aislamiento o blindaje imperfecto que hay entre ellos. Este acoplamiento entre líneas se traduce en capacitancias parásitas y se manifiesta como una interferencia que reduce la calidad de la transmisión en cada línea. Generalmente, los fabricantes de cables proporcionan información al respecto con cifras o curvas de *nivel de diafonía*\*, que conviene



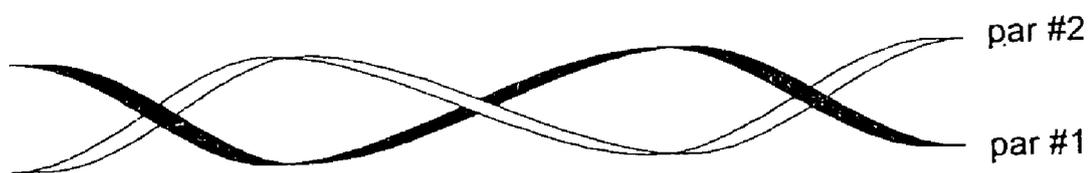
**Fig. 3-2** Colocación típica de los pares y cuadretes dentro de un cable multipar.

\* En inglés se le llama *Near-End-Crosstalk* o *N.E.X.T.*

tomar en cuenta al diseñar la instalación. Este nivel de diafonía se especifica en decibeles por cierta longitud del cable multipar y los valores permisibles están definidos por la CCITT\*, a través de estándares recomendados.

El fenómeno de la interferencia por diafonía se puede reducir significativamente torciendo a los pares\*\* como se ilustra en la Fig. 3-3. Esta técnica de *trenzado* le da el nombre de cable multipar trenzado a todo el conjunto.

Como comentario final, vale la pena aclarar que el rápido crecimiento de las redes locales en banda base para la transmisión de datos le ha dado un nuevo ímpetu al uso de los cables bifilares y multipar, ya que las distancias entre las computadoras y demás equipos periféricos de una red son cortas, del orden de 10 a 300 metros, y no es precisamente necesario usar cable coaxial o fibra óptica. Por ejemplo, desde principios de los años 90, existen estándares de cables multipar capaces de transmitir señales de voz, datos y video a velocidades de hasta 150 Mbps a distancias de casi 100 metros. Esto se logra con estándares de alta calidad en la manufactura y la instalación de los cables trenzados, y el tema es parte de los nuevos "sistemas de cableado estructurado". En todo caso, la elección de un tipo de cable u otro dependerá del costo y de las necesidades de crecimiento a largo plazo de una red. También es importante mencionar que los pares de cables pueden colocarse en paralelo sobre un mismo plano para formar listones; éstos tienen la ventaja de que pueden colocarse con facilidad por debajo de la alfombra de una oficina.



**Fig. 3-3** Dos pares trenzados, equivalentes a un cuadrore.

\* CCITT = Comité Consultatif International de Télégraphie et Téléphonie, de la Unión Internacional de Telecomunicaciones.

\*\* En inglés, esto se designa como "twisted pair".

### 3.3 El cable coaxial terrestre

Hasta principios de los años ochenta, época en que las fibras ópticas comenzaron a emplearse en las redes de gran capacidad, el cable coaxial era la única alternativa alámbrica de banda ancha. Por tal razón, fue la tecnología favorita para servicios como la telefonía multicanal terrestre y la distribución urbana de televisión de paga. De hecho, este segundo mercado aún sigue dominado casi en su totalidad en la mayor parte del mundo por las redes comerciales de cable coaxial. Tradicionalmente, las empresas propietarias de estas redes han transmitido televisión analógica en FDM\*, pero el exitoso surgimiento del servicio de radiodifusión directa de TV digital por satélite las obligará a digitalizarse también, con el fin de aumentar su cantidad de canales y poder competir, si es que desean sobrevivir a largo plazo.

Durante muchos años, el cable coaxial ha tenido diversas aplicaciones en la interconexión de equipos electrónicos y de cómputo, en sistemas de vigilancia, en comunicaciones industriales, en instrumentos de medición y aparatos médicos, en proyectiles y lanzadores de satélites, en cables

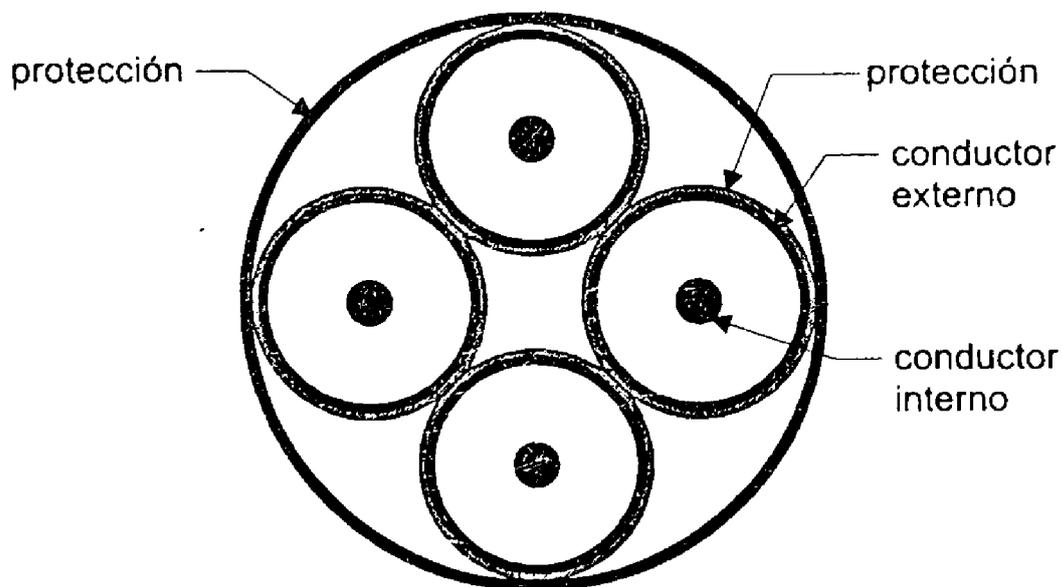


Fig. 3-4 Cable con cuatro "pares" coaxiales.

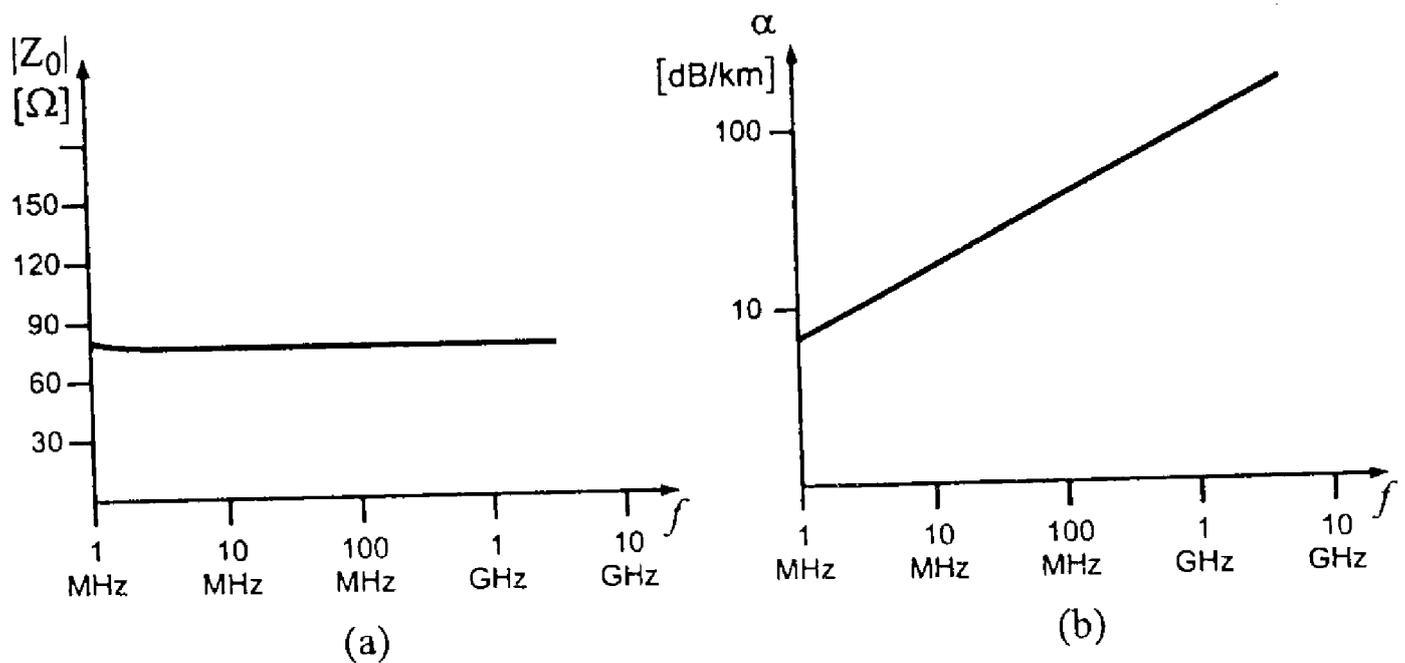
\* FDM = *F*requency *D*ivision *M*ultiplexing o multiplexaje (también multiplexación o multicanalización) por división en frecuencia.

submarinos, etc., y todavía sigue siendo una tecnología muy atractiva para la mayoría de estos usos y otros. Es un producto maduro, confiable, relativamente económico y fácil de instalar. Además, posee su propio "territorio" en el espectro de radiofrecuencias, pues transmite óptimamente (en el modo TEM) a frecuencias muchísimo más bajas que las necesarias en los sistemas ópticos.

Un cable coaxial también puede ser visto como si fuese un "par" de conductores, sólo que éstos son concéntricos y coaxiales (tienen un eje común y de allí el nombre del cable). Al igual que en el caso de los cables bifilares multipar, es posible emplear cables coaxiales múltiples, que obviamente contienen varios cables coaxiales individuales (Fig. 3-4). Recuérdese que, en teoría, el blindaje propio de un cable coaxial es excelente, pero de cualquier forma puede haber pequeños acoplamientos indeseables entre un cable y otro. Por ello, y con el fin de asegurar una protección contra la diafonía, especialmente en las frecuencias más bajas, cada par coaxial es rodeado por una o más cintas o hilos de acero, enrollados helicoidalmente. Esta armadura funciona como un doble blindaje y, además, le da al cable una gran resistencia mecánica.

La impedancia característica, el coeficiente de atenuación y demás parámetros de transmisión de un cable coaxial se pueden calcular de acuerdo con la teoría expuesta en el capítulo 2. Nuevamente, al igual que en el caso de la línea bifilar, las curvas típicas de impedancia y atenuación (Fig. 3-5) son función de la frecuencia, de la geometría transversal y las dimensiones del propio cable, y del dieléctrico empleado entre los conductores. Se observa que la atenuación crece con la frecuencia y, en consecuencia, impone en la práctica un límite de operación. Recuérdese que la resistencia de los conductores es proporcional a  $\sqrt{f}$  y que la conductancia es proporcional a  $f$ . De manera que la gráfica de la Fig. 3-5 b es la suma de las curvas de atenuación producidas por los conductores y por el dieléctrico; en las frecuencias más altas, las pérdidas por el dieléctrico son mayores que las pérdidas en los conductores.

En el campo de la telefonía multicanal FDM se aprovechan varios MHz de ancho de banda (hasta un máximo de 60 MHz), para enviar miles de canales por un mismo cable coaxial individual. Estos enlaces pueden ser de larga distancia o entre las centrales telefónicas dentro de una misma ciudad. Aún existe instalada y en operación mucha infraestructura de este tipo. Sin



**Fig. 3-5** Curvas típicas para un cable coaxial arbitrario: a) magnitud de la impedancia característica, b) atenuación (escala logarítmica).

embargo, los procesos de privatización de muchas redes telefónicas en el mundo, con sus correspondientes inversiones, el fomento de la competencia entre las empresas, y la madurez actual de los sistemas ópticos, han impulsado las interconexiones urbanas entre centrales digitales por medio de fibras ópticas. Igualmente, se han instalado redes terrestres de larga distancia y cables submarinos con esta nueva tecnología, como se verá más ampliamente en el capítulo 8.

La atenuación en un cable coaxial obliga a colocar muchos repetidores o amplificadores a lo largo de la línea, cuando ésta es larga. Según el tipo de cable y su uso, la distancia promedio entre repetidores consecutivos puede ser de entre 1 y 3 kilómetros. Sin duda, resulta importante que la atenuación sea lo más baja posible, de modo que el número de repetidores disminuya, así como el costo total del enlace.

Matemáticamente, es posible encontrar las dimensiones óptimas de un cable coaxial, para que trabaje en su rango mínimo de atenuación. Se puede demostrar que esto ocurre cuando el conductor externo tiene un radio interior ( $r_b$ ) que mide de tres a cuatro veces el radio del conductor interno ( $r_a$ ). En teoría, la atenuación mínima se obtiene cuando  $r_b/r_a = 3.6$ . Es evidente

que el cociente de radios que se elija finalmente para el cable también influirá en el valor de la impedancia característica, misma que además depende inversamente de la raíz cuadrada de la constante dieléctrica relativa del aislante.

Por lo general, los dos conductores de un cable coaxial son de cobre, aunque puede haber diseños específicos con aluminio recubierto de cobre, acero o, inclusive, plata. El aluminio es más ligero y más barato que el cobre, de modo que el costo del cable se puede reducir. En cuanto a los dieléctricos empleados, cuando la línea es rígida se prefiere usar simplemente aire; en este caso, la distancia entre los conductores se conserva con pequeños separadores plásticos colocados en ciertos puntos a lo largo de la línea. En cambio, en los cables semirígidos o flexibles es común encontrar aislantes como el polietileno, polipropileno, teflón, y otros compuestos. También existen diseños de líneas con aislante de espuma sólida, hecha de los mismos compuestos anteriores.

De todo lo anterior, no es ninguna sorpresa descubrir que en el mercado haya, al igual que en el caso de las líneas bifilares, cables coaxiales con impedancias características muy diversas. Sin embargo, por limitaciones dimensionales y de fabricación, el rango disponible en la práctica es menor para los coaxiales que para las líneas de dos hilos. La impedancia característica de los cables coaxiales se encuentra aproximadamente en el rango de  $20 \Omega \leq Z_0 \leq 200 \Omega$ . Así, por ejemplo, para aplicaciones de video y distribución de televisión por cable se usa una  $Z_0 = 75 \Omega$ ; para sistemas de cómputo, radiotransmisión, aplicaciones industriales y equipos de comunicación por satélite hay cables con  $Z_0 = 50 \Omega$ ; y para la conexión de computadoras también se emplea  $Z_0 = 93 \Omega$ .

Por supuesto, la velocidad de propagación en estos cables también varía. Generalmente, es de 60% a 80% del valor de la velocidad de la luz en el espacio libre, según la permitividad relativa del aislante entre los conductores. Y en cuanto al coeficiente de atenuación, en función de la frecuencia, es evidente que cada cable tiene su propia curva representativa. En la Fig. 3-5b se mostró la forma típica de dicha curva, simplemente como un ejemplo. En ciertas ocasiones, los fabricantes de cables proporcionan la gráfica correspondiente; en otros casos, suministran una tabla indicativa parecida a la Tabla 3-1.

**Tabla 3-1** Tabla indicativa típica de la constante de atenuación en un cable coaxial de 50  $\Omega$  con polietileno sólido como aislante ( $v_p = 66\%$ ). Los datos pueden variar, según el fabricante.

Frecuencia [MHz]	$\alpha$ [dB/100 m]
1	1
10	3
50	6
100	9
200	13
400	19
1,000	32

### 3.4 El cable coaxial submarino

Tal como se mencionó en el capítulo 1, durante la primera mitad del siglo XX todos los enlaces telefónicos intercontinentales fueron inalámbricos y de baja confiabilidad. No fue sino hasta 1956, cuando se instaló el primer cable coaxial submarino, que, al fin, fue posible aumentar tanto la confiabilidad como el número disponible de canales telefónicos simultáneos. En los años sesenta, al mismo tiempo que más cables coaxiales submarinos eran tendidos, también florecieron las comunicaciones internacionales por satélite. Las tarifas eran similares en ambos sistemas.

El medio ambiente en el que un cable submarino debe subsistir es muy distinto al de un cable terrestre. Por lo tanto, sus diseños también son diferentes, especialmente en lo que se refiere a la protección del cable contra el agua y las altas tensiones. Desde luego, la instalación y el mantenimiento son más complicados y costosos, en particular si se piensa en los trabajos necesarios para corregir la falla de un repetidor localizado en las profundidades de algún océano. Con el fin de reducir este riesgo, es entonces deseable emplear el menor número posible de repetidores. De la teoría vista en el capítulo 2, se

deduce que la atenuación  $\alpha$  es proporcional a  $1/[\ln(b/a)]$ , en donde  $b$  y  $a$  son, respectivamente, los radios de los conductores externo e interno. Luego, si  $b$  aumenta,  $\alpha$  disminuye (véase también la sección 3.3). Por esta razón, y también para fines de resistencia mecánica, los cables coaxiales submarinos se fabricaron de mayor grosor que los terrestres; generalmente, sus conductores externos tienen diámetros de cerca de 4 cm. La diferencia dimensional con un cable coaxial común y corriente es evidente.

El dominio submarino de los cables coaxiales no duró mucho tiempo; si acaso, un poco más de un cuarto de siglo. A partir de 1986, todos los nuevos cables submarinos que se han instalado son de fibra óptica monomodo (véase el capítulo 8). El coaxial submarino más poderoso fue el TAT-6 (Transatlántico #6); en sus buenos tiempos, transmitía 4,000 canales telefónicos y sus cientos de repetidores estaban espaciados unos nueve kilómetros entre sí.

Sin embargo, a pesar de la obsolescencia tecnológica de los coaxiales submarinos, es justo señalar que toda la experiencia ganada en su fabricación, instalación, operación y mantenimiento ha sido muy útil para optimizar algunos aspectos de los procesos equivalentes en el caso de los cables con fibra óptica. Las enormes tensiones mecánicas durante el tendido; la inmensa presión del agua, que prácticamente "aplasta" al cable y puede alterar su circunferencia; el jaloneo y los daños provocados por el oleaje y las anclas de buques o barcos pesqueros; la erosión por el roce con rocas; la necesidad de alimentar de energía eléctrica a los repetidores; la alta impermeabilidad y resistencia a la salinidad que se requieren; todos éstos son tan sólo algunos de los muchos problemas comunes que deben ser resueltos para todo cable submarino, sea coaxial o de fibra óptica.

Así, por ejemplo, entre otras medidas de protección, los tramos de cable que se instalan cerca de las costas, donde la profundidad es baja, siempre son más gruesos y resistentes que los que se colocan en el mar profundo. Esta mejora mecánica adicional se logra enrollando helicoidalmente alrededor del cable una armadura de hilos de acero. A su vez, dicha coraza va protegida con una nueva capa de material plástico altamente resistente.

Por lo que se refiere a los nuevos cables submarinos de fibra óptica, en el capítulo 8 se mencionan sus características principales. No sólo resalta su mayor capacidad de tráfico, parámetro que comúnmente se emplea para justificar su uso, sino también la separación entre sus repetidores, que es mucho mayor que en el caso necesario para los coaxiales.

# Teoría de las guías de ondas

---

## 4.1 Introducción

El método matemático que se utiliza para analizar una determinada línea o ducto de transmisión depende fundamentalmente del tamaño eléctrico del espacio por el cual se propagan las ondas electromagnéticas. Todo es cuestión de escala.

Si el espacio es pequeño comparado con la longitud de onda característica,  $\lambda_0$ , entonces se aplican la teoría de circuitos de corriente alterna y la teoría general de líneas de transmisión vistas en el capítulo 2.

Cuando dicho espacio (la sección de corte transversal de la línea o ducto) tiene dimensiones del mismo orden que el tamaño de la longitud de onda característica, ocurren efectos de propagación de la onda que pueden ser descritos resolviendo las ecuaciones de Maxwell y empleando campos electromagnéticos, en lugar de corrientes y voltajes como en el capítulo 2. Estos conceptos ya se plantearon de manera introductoria en las secciones 1.4 y 1.5.

En cambio, si el espacio (por ejemplo, el aire o “el espacio libre”) por el que una onda electromagnética viaja es grande comparado con la longitud de onda característica, es válido describir el comportamiento de propagación, en forma muy aproximada, por medio de una onda electromagnética plana. Mientras mayor sea el espacio de propagación en términos eléctricos, mejor será la aproximación usando una onda plana (Tabla 4.1).

**Tabla 4-1** Método de análisis según las dimensiones del espacio de propagación.

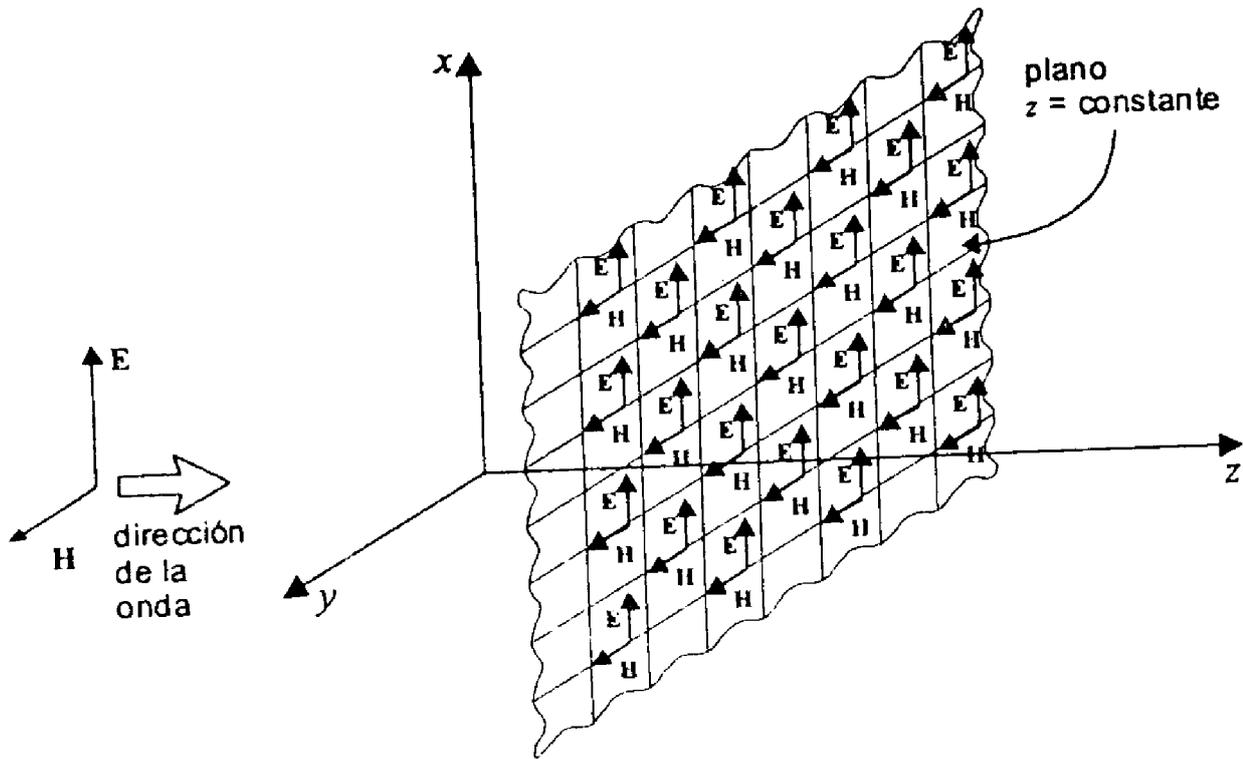
Espacio de propagación	Método de análisis
$\ll \lambda_0$	Teoría de circuitos de c.a. y teoría general de líneas de transmisión
$\approx \lambda_0$	Campos electromagnéticos y modos superiores de propagación
$\gg \lambda_0$	Onda electromagnética TEM plana y uniforme

Los efectos de propagación en las guías de ondas cuyas dimensiones transversales son comparables a  $\lambda_0$  serán estudiados en este capítulo. Se verán las guías rectangulares y circulares, que son las de mayor uso en los sistemas prácticos de microondas terrestres y comunicaciones por satélite. También se estudiará el comportamiento de las placas paralelas y de la guía de ondas elíptica [véanse las Figs. 1-3 b), f), g) y h)]. Con la excepción de las placas paralelas, las demás guías son “huecas”, pues consisten de un solo conductor cerrado, en cuyo interior generalmente hay aire.

Con el fin de entender mejor qué ocurre dentro de una guía hueca (rectangular, circular o elíptica), el presente análisis se iniciará con un recordatorio de las propiedades de una onda electromagnética plana; después se tratará el caso de las placas paralelas, que pueden conducir tanto una onda TEM como también modos superiores; y finalmente, se estará preparado para analizar las guías de un solo conductor o huecas.

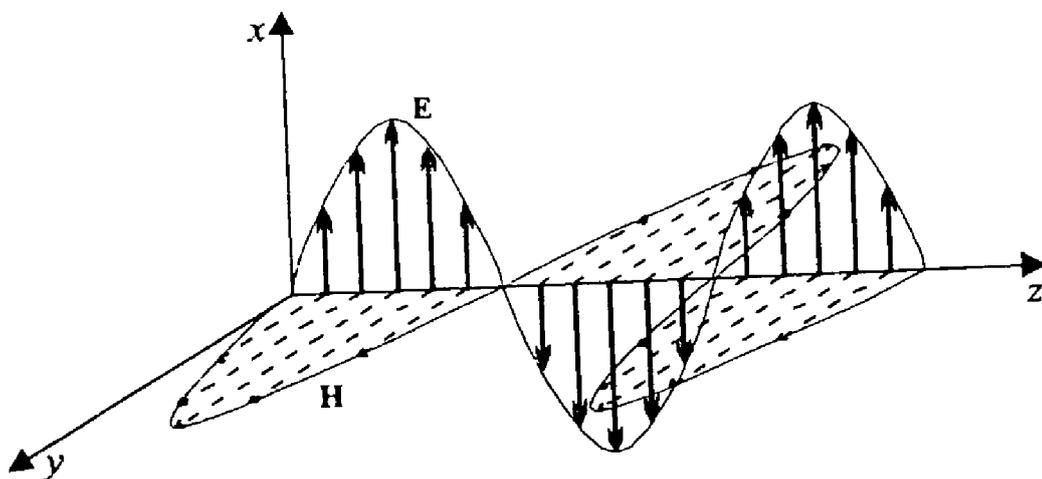
## 4.2 La onda electromagnética plana

Por definición, una onda TEM es aquella cuyos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son perpendiculares entre sí, y ambos a la vez son perpendiculares a la dirección de propagación (Fig. 1-13), misma que se designará como la dirección a lo largo del eje  $z$ . Si además de lo anterior, la magnitud y la fase de cada



**Fig. 4-1.** Una onda plana tiene sus campos con la misma magnitud y fase en todos los puntos de un plano  $z = \text{constante}$  que es perpendicular a la dirección de propagación.  $|\mathbf{E}|$  en V/m y  $|\mathbf{H}|$  en A/m.

campo son iguales en todos los puntos de un plano cualquiera, para el cual  $z$  es constante, entonces la onda es plana. Es decir, en un plano  $z = \text{constante}$  perpendicular a la dirección en que viaja la onda, los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son independientes de las coordenadas  $x$  y  $y$  (Fig. 4-1); en planos paralelos con



**Fig. 4-2.** Variación senoidal de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  con relación a la dirección  $z$ .

valores de  $z$  diferentes, los campos aumentarán o disminuirán de valor, de acuerdo con la periodicidad de la onda (Fig. 4-2), pero seguirán siendo iguales en todos los puntos de cada nuevo plano en cuestión. Ambos campos,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , están en fase, pues alcanzan sus valores máximos al mismo tiempo.

#### 4.2.1 La onda plana en un medio sin pérdidas

Para encontrar la expresión matemática de una onda plana, es necesario resolver las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones se presentaron en la sección 1.5, pero por facilidad se repiten a continuación:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (4-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (4-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (4-4)$$

$$\text{con } \mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{fuente}} + \mathbf{J}_{\text{conducción}} \quad (4-5)$$

Considérese ahora que el medio de propagación es el “espacio libre”, con conductividad igual a cero y sin fuentes de radiación presentes (cargas y corrientes). Las fuentes ( $\rho$  y  $\mathbf{J}_{\text{fuente}}$ ) sí existen, pero están en algún lugar lejano del espacio en el que ahora viaja la onda y donde quiere encontrarse su solución matemática. Por tanto,  $\mathbf{J}_f$  vale cero en la ec. (4-5), y  $\rho$ , la densidad de carga, también vale cero en la ec. (4-4). Además, como la conductividad  $\sigma$  del espacio libre se considera igual a cero, y dado que  $\mathbf{J}_{\text{conducción}} = \sigma \mathbf{E}$ , el producto da cero, y entonces toda la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  de la ec. (4-5) es igual a cero.

Por consiguiente, las cuatro ecuaciones de Maxwell, para encontrar la solución de propagación en el espacio libre, se reducen a:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (4-6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (4-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4-8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4-9)$$

Antes de intentar resolver estas ecuaciones, conviene introducir la herramienta auxiliar de los fasores para los campos, tal como se hizo en el capítulo 2 para los voltajes y corrientes. Para esto, se supone que los campos eléctrico y magnético tienen una dependencia senoidal con relación al tiempo, a una frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$ , es decir:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \overbrace{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})}^{\text{MAGNITUD}} \overbrace{\cos[\omega t + \theta(\mathbf{r})]}^{\text{FASE}} \quad (4-10)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \theta(\mathbf{r})] \quad (4-11)$$

en donde la magnitud de  $\mathbf{E}_0$  y la fase  $\theta$  sólo son funciones del vector de posición  $\mathbf{r}$ . Ahora, si se definen los fasores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  como funciones de  $\mathbf{r}$ , de la manera siguiente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{j\theta(\mathbf{r})} \quad (4-12)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{j\theta(\mathbf{r})} \quad (4-13)$$

entonces, las ecs. (4-10) y (4-11) se pueden reescribir como\*:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \quad (4-14)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \quad (4-15)$$

Al sustituir las ecuaciones (4-14) y (4-15) en (4-6) y (4-7), con  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  y  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ , y dado que derivar parcialmente con relación al tiempo se vuelve

\* Recuerdese la identidad de Euler  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ .

equivalente a multiplicar por  $j\omega$ , se obtienen las ecuaciones fasoriales siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (4-16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (4-17)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver fácilmente, lo cual justifica el uso de los fasores. Habiendo obtenido las soluciones  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , se utilizan las ecs. (4-14) y (4-15) para representar la solución completa real o instantánea, que es tanto dependiente de la posición  $\mathbf{r}$  como del tiempo  $t$ . Como es fácil de ver, este artificio matemático permite resolver un sistema de ecuaciones de tres variables ( $x, y, z$ ) en lugar de tener que hacerlo con cuatro variables ( $x, y, z, t$ ).

En términos generales,  $\mathbf{E}$  tiene componentes  $E_x, E_y$  y  $E_z$ , y  $\mathbf{H}$  tiene componentes  $H_x, H_y$  y  $H_z$ . Para el caso de la onda plana en cuestión:

$\bar{E}$  es constante  
y perpendicular  
al eje  $z$  entonces  
las componentes

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = 0, \quad E_z = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} = 0, \quad H_z = 0$$

ya que los campos no dependen ni de  $x$  ni de  $y$  (son constantes en el plano  $z = \text{constante}$ ), y la onda es TEM y totalmente transversal al eje  $z$ . De manera que, al sustituir al rotacional del vector por sus tres componentes cartesianas en las ecs. (4-16) y (4-17), éstas se convierten en el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas con derivadas parciales:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \quad (4-18)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \quad (4-19)$$

$$0 = -j\omega\mu H_z \Rightarrow H_z = 0$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x \quad (4-20)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega\epsilon E_y \quad (4-21)$$

$$0 = j\omega\mu E_z \Rightarrow E_z = 0$$

Sustituyendo (4-19) en (4-20), al eliminar la variable  $H_y$ , se obtiene la ecuación de segundo orden

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\epsilon E_x = 0 \quad (4-22)$$

cuyas soluciones son

$$E_x = A e^{-j\beta z} \quad (4-23)$$

$$y \quad E_x = B e^{j\beta z} \quad (4-24)$$

en donde A y B son constantes;  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  y se denomina la *constante de fase*. Nótese la similitud de estas soluciones con la ec. (2-14), encontrada para los voltajes incidente y reflejado en una línea de dos conductores.

Al sustituir la solución que se propaga alejándose de la fuente, dada por la ec. (4-23), en la ec. (4-19), se concluye que

$$H_y = \left(\frac{1}{\eta}\right) A e^{-j\beta z} \quad (4-25)$$

con  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , denominada como la *impedancia de la onda*. Comparando (4-23) con (4-25) se ve que

$$E_x = \eta H_y \quad (4-26)$$

o sea que la magnitud del campo eléctrico (en V/m y orientado en la dirección  $x$ ) es  $\eta$  veces mayor que la magnitud del campo magnético (en A/m y orientado perpendicularmente, en la dirección  $y$ ).

Similarmente, al combinar las ecs. (4-18) y (4-21) se obtienen las soluciones para  $E_y$  y  $H_x$ . En general, el campo  $\mathbf{E}$  puede estar orientado de tal forma que consista en sus dos componentes  $E_x$  y  $E_y$ , pero para efectos de

análisis en muchos problemas prácticos, es fácil elegir un sistema de coordenadas de referencia de tal forma que el vector  $\mathbf{E}$  total esté alineado en la dirección  $x$  y el  $\mathbf{H}$  total en la dirección  $y$ . Siendo así el caso,  $E_y$  y  $H_x$  no existen, y la solución completa queda representada por las ecs. (4-23) y (4-25), considerando que la onda electromagnética viaja en la dirección positiva de  $z$ .

Finalmente, empleando las ecs. (4-14) y (4-15) se obtienen las expresiones completas (instantáneas) para los campos de una onda plana que viaja en la dirección positiva de  $z$ , en función de la posición y del tiempo:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = A \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \quad (4-27)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(z, t) = \left( \frac{1}{\eta} \right) A \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \quad (4-28)$$

con

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (\text{constante de fase}) \quad (4-29)$$

$$\eta = \sqrt{\mu / \epsilon} \quad (\text{impedancia de la onda}) \quad (4-30)$$

Nótese nuevamente la similitud entre las ecs. (4-29) y (4-30) con las ecs. (2-48) y (2-49), deducidas para una línea de dos conductores sin pérdidas.

Si se fija ahora la atención sobre cualquier punto arbitrario de la onda, con el fin de calcular a qué velocidad se tendría que desplazar un observador a lo largo del eje  $z$  para ver siempre ese punto con la misma fase, de la ec. (4-27) se tiene que satisfacer:

$$\cos(\omega t - \beta z) = \text{constante}$$

es decir:

$$\omega t - \beta z = \text{cierta fase constante}$$

y derivando la relación anterior con relación al tiempo:

$$\omega - \beta \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

O sea que, la velocidad a la que la onda viaja a lo largo del eje  $z$  es igual a  $\omega/\beta$  y recibe el nombre de *velocidad de fase*:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{velocidad de fase}) \quad (4-31)$$

Si el medio de propagación es el vacío o el aire, dicha velocidad es igual a  $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  e igual a  $c$ , la velocidad de la luz.

**Ejercicio 4-1** Calcule la velocidad a la que una onda electromagnética plana de frecuencia 100 MHz, orientada como se indica en la Fig. 4-1, se propaga en los siguientes medios: a) aire, b) polietileno, c) mica. ¿Cuánto valen la constante de fase  $\beta$ , la longitud de onda  $\lambda$  y la impedancia de la onda en cada caso?

¿Cuál sería la expresión completa o instantánea para el campo magnético dentro del polietileno?

### Solución

De la Tabla 2-2 se obtienen los valores de la permitividad relativa de cada material:

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 1 \text{ (aire)} \\ \epsilon_r &= 2.26 \text{ (polietileno)} \\ \epsilon_r &= 5.4 \text{ (mica)}\end{aligned}$$

La permeabilidad relativa  $\mu_r$  se considera igual a 1 para los tres casos. De la ec. (4-29):

$$\begin{aligned}\beta &= \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi f\sqrt{\mu_0\epsilon_0\mu_r}\sqrt{\epsilon_r} \\ &= 2\pi \times 10^8 \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}} \sqrt{\epsilon_r} = 2.096 \sqrt{\epsilon_r}\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores correspondientes de  $\epsilon_r$  de cada material:

$$\beta_{\text{aire}} = 2.096 \sqrt{1} = 2.096 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{\text{polietileno}} = 2.096 \sqrt{2.26} = 3.151 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{\text{mica}} = 2.096 \sqrt{5.4} = 4.870 \text{ rad/m}$$

De la ec. (4-31):

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu_r}\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Por lo tanto:

$$v_{\text{aire}} = \frac{c}{\sqrt{1}} = 300 \times 10^6 \text{ m/seg}$$

$$v_{\text{polietileno}} = \frac{c}{\sqrt{2.26}} = 199.55 \times 10^6 \text{ m/seg}$$

$$v_{\text{mica}} = \frac{c}{\sqrt{5.4}} = 129.10 \times 10^6 \text{ m/seg}$$

La longitud de onda  $\lambda$  está dada por la ecuación

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

De tal manera que

$$\lambda_{\text{aire}} = v_{\text{aire}} \times 10^{-8} = 3 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{polietileno}} = v_{\text{polietileno}} \times 10^{-8} = 1.99 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{mica}} = v_{\text{mica}} \times 10^{-8} = 1.29 \text{ m}$$

Por último, la impedancia de la onda o impedancia intrínseca del medio de propagación está dada por la *ec. (4-30)*:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \\ &= 120\pi / \sqrt{\varepsilon_r} \end{aligned}$$

$$\eta_{\text{aire}} = 120\pi / \sqrt{1} = 376.99 \ \Omega$$

$$\eta_{\text{polietileno}} = 120\pi / \sqrt{2.26} = 250.77 \ \Omega$$

$$\eta_{\text{mica}} = 120\pi / \sqrt{5.4} = 162.23 \ \Omega$$

Conviene concentrar todos los resultados anteriores en la tabla siguiente:

$$f = 100 \text{ MHz}$$

	$\epsilon_r$	$\beta$ (rad/m)	$\nu$ (m/seg) $\times 10^6$	$\lambda$ (m)	$\eta$ ( $\Omega$ )
aire	1.00	2.09	300.00	3.00	376.99
polietileno	2.26	3.15	199.55	1.99	250.77
mica	5.40	4.87	129.10	1.29	162.23

Es evidente que conforme la permitividad relativa del dieléctrico aumenta,  $\beta$  aumenta y los demás parámetros disminuyen, como se intuye fácilmente al observar las fórmulas correspondientes.

Finalmente, la expresión para el campo magnético dentro del polietileno, en función de la posición y del tiempo, se obtiene de la ec. (4-28):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}}(z,t) &= \left( \frac{1}{\eta_{\text{poliet.}}} \right) A \cos(2\pi \times 10^8 t - \beta_{\text{poliet.}} z) \mathbf{a}_y \\ &= \frac{A}{250.77} \cos(2\pi \times 10^8 t - 3.15 z) \mathbf{a}_y\end{aligned}$$

**Ejercicio 4-2** Una onda plana con polarización vertical se propaga por el aire en la dirección positiva de  $z$ . Su frecuencia es de 150 MHz y la magnitud máxima del vector de intensidad de campo eléctrico es igual a 1.5 V/m. Encuentre las expresiones en función de la posición y del tiempo para los componentes de los campos eléctrico y magnético de la onda.

*Solución*

De las ecs. (4-27) y (4-28):

$$\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = A \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x = 1.5 \cos(2\pi \times 150 \times 10^6 t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(z,t) = \left( \frac{1}{\eta} \right) A \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y = \frac{1}{120\pi} (1.5) \cos(2\pi \times 150 \times 10^6 t - \beta z) \mathbf{a}_y$$

La constante de fase a la frecuencia especificada es igual a:

$$\beta_{\text{aire}} = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \times 150 \times 10^6}{300 \times 10^6} = \pi \text{ rad/m}$$

Por lo tanto:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = 1.5 \cos(3\pi \times 10^8 t - \pi z) \mathbf{a}_x \quad \text{V/m}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(z,t) = 3.98 \times 10^{-3} \cos(3\pi \times 10^8 t - \pi z) \mathbf{a}_y \quad \text{A/m}$$

#### 4.2.2 La onda plana en un medio con pérdidas

Cuando el medio de propagación es disipativo, es decir que  $\sigma \neq 0$ , entonces la densidad de corriente de conducción  $\mathbf{J}_c$  en la ec. (4-2) no se cancela y la expresión para el rotacional de  $\mathbf{H}$  empleando fasores queda del modo siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}$$

y factorizando:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \left( \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right) \mathbf{E} \quad (4-32)$$

La ec. (4-32) es realmente de la misma forma que la ec. (4-17), sólo que con la constante  $\epsilon$  reemplazada por una nueva cantidad compleja ( $\epsilon + \sigma/j\omega$ ). Esta última ya fue descrita en la sección 2.1, ec. (2-3), y se representa como  $\hat{\epsilon}$ . De modo que las ecuaciones diferenciales que hay que resolver son del mismo tipo y, por lo tanto, las soluciones buscadas para el medio con conductividad finita  $\sigma$  son similares a las ecs. (4-23) y (4-25), pero con  $j\beta$  sustituida ahora por la constante compleja  $\gamma$ , denominada *constante de propagación*:

$$E_x = A e^{-\gamma z} \quad (4-33)$$

$$H_y = \left( \frac{1}{\eta} \right) A e^{-\gamma z} \quad (4-34)$$

en donde

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \left( \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right)} \quad (4-35)$$

$$y \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\left( \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right)}} \quad (4-36)$$

Las ecs. (4-35) y (4-36) se pueden reescribir de tal manera que en ambas aparezca el factor  $\sqrt{1 + \sigma / j\omega\epsilon}$ . El cociente  $\sigma / \omega\epsilon$  es la tangente de pérdidas descrita con anterioridad en la ec. (2-4), las Figs. 2-4 y 2-5 y la Tabla 2-2 de materiales dieléctricos. Algebraicamente, se puede demostrar que si este cociente  $\sigma / \omega\epsilon$  es muy pequeño ( $\ll 1$ ), como sucede con los dieléctricos de pérdidas muy bajas, entonces las ecs. (4-35) y (4-36) se simplifican y toman la forma

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \\ &= \alpha + j\beta \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{medios} \\ \text{dieléctricos} \\ \text{de pocas} \\ \text{pérdidas} \end{array} \quad (4-37)$$

$$\left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1 \right) \quad (4-38)$$

Se observa que en este caso la impedancia de la onda,  $\eta$ , y la constante de fase,  $\beta$ , tienen valores idénticos a cuando el medio de propagación no tiene pérdidas (véanse las ecs. 4-29 y 4-30). Sin embargo, como el dieléctrico ahora bajo estudio sí tiene una conductividad finita, aparece un valor real en la constante de propagación  $\gamma$ , que indica cuánto se atenúa la onda conforme avanza a lo largo de la dirección  $z$ ; esta cantidad, representada por  $\alpha$  en la ec. (4-37), recibe acordemente el nombre de *constante de atenuación*. Una vez más, nótese la similitud de la ec. (4-37) con las ecs. (2-81) y (2-82) deducidas para las líneas de dos conductores con pérdidas.

**Ejercicio 4-3** Una onda plana viaja a través de un bloque muy grande hecho con vidrio Pyrex. Su frecuencia es de 3 GHz. Calcule la constante de fase y la longitud de onda dentro del bloque. ¿Cuántos decibeles se atenúa la onda por cada cm que avanza a través del bloque?

*Solución*

De la Tabla 2-2:

$$\epsilon_r \Big|_{\text{pyrex}} = 4 \qquad \tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \Big|_{\text{pyrex}} = 0.6 \times 10^{-3}$$

De la ec. (4-37):

$$\gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j2\pi f \sqrt{\mu \epsilon}$$

A 3 GHz, la conductividad aproximada del vidrio pyrex es:

$$\sigma = (0.6 \times 10^{-3})(2\pi f)(\epsilon_0 \epsilon_r)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} (0.6 \times 10^{-3})(2\pi)(3 \times 10^9)(8.8542 \times 10^{-12})(4)(120\pi) \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 0.03775 \text{ Np/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= (2\pi)(3 \times 10^9)(2) \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.8542 \times 10^{-12}} \\ &= (12\pi \times 10^9)(33.356 \times 10^{-10}) = 125.7 \text{ rad/m} \end{aligned}$$

De la ec. (4-31):

$$\lambda_{\text{pyrex}} = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f} = \frac{3 \times 10^8}{(2)(3 \times 10^9)} = 0.05 \text{ m}$$

De acuerdo con el valor calculado para  $\alpha$ , la onda se atenúa 0.0003775 Np por cada centímetro avanzado, y de la ec. (2-20):

$$\text{atenuación en dB/cm} = (8.686)(0.0003775) = 0.003279 \text{ dB/cm}$$

### 4.2.3 La onda plana en un conductor

El otro caso extremo que permite simplificar las ecs. (4-35) y (4-36) es cuando el cociente  $\sigma/\omega\epsilon$  es muy grande ( $\gg 1$ ). Tal es el caso para los medios que son buenos conductores, y las expresiones para  $\gamma$  y  $\eta$  quedan entonces como:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \alpha + j\beta \quad (4-39)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\pi/4} \quad (4-40)$$

$$= (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$= \frac{j\omega\mu}{(1+j)}\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

medios  
conductores  
con altas  
pérdidas

$$\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1\right)$$

Se observa de la ec. (4-39) que:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

y de la ec. (4-40) se nota que el campo magnético está atrasado  $\pi/4$  con relación al campo eléctrico, ya que  $E_x = \eta H_y$ . Es decir, los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  ya no están en fase, como sí era el caso para los medios dieléctricos de bajas pérdidas en la sección anterior.

El inverso de  $\alpha$  o  $\beta$  recibe el nombre de *profundidad de penetración* y recuérdese que se designa en este texto con la letra  $\ell$  (véase la ec. 2-2). De modo que:

$$\ell = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \quad (4-41)$$

Por lo tanto, las expresiones fasoriales para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son:

$$E_x = A e^{-\gamma z} = A e^{-z/\ell} e^{-jz/\ell}$$

$$H_y = \eta^{-1} E_x = A \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{-j\pi/4} e^{-z/\ell} e^{-jz/\ell}$$

y las expresiones instantáneas correspondientes (en función del tiempo) resultan ser:

$$\tilde{E}_x(z, t) = \text{Re}[E_x e^{j\omega t}] = A e^{-z/\ell} \cos[\omega t - z/\ell] \quad (4-42)$$

$$\tilde{H}_y(z, t) = \text{Re}[H_y e^{j\omega t}] = A \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{-z/\ell} \cos[\omega t - z/\ell - \pi/4] \quad (4-43)$$

Antes de realizar un ejercicio, conviene concentrar los resultados obtenidos en las secciones 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 en la Tabla 4-1 siguiente, para contar con una referencia comparativa y rápida.

**Tabla 4-1** Concentración de fórmulas para calcular la impedancia de la onda, la constante de atenuación y la constante de fase de una onda plana.

Tipo de medio	Expresión para $\eta$	Expresión para $\alpha$	Expresión para $\beta$
espacio libre	$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$	0	$\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$
dieléctrico de pocas pérdidas	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\frac{1}{2} \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\omega \sqrt{\mu \epsilon}$
conductor	$\frac{j\omega\mu}{(1+j)} \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

**Ejercicio 4-4** Una onda plana cuya frecuencia es 1 GHz penetra en una pared metálica de cobre situada en  $z = 0$ . Calcule la longitud de la onda dentro del metal y la profundidad de penetración  $\ell$ . ¿Qué porcentaje se ha atenuado la onda al llegar a  $z = \ell$ ?

### Solución

La profundidad de penetración se calcula a partir de la ec. (4-41):

$$\ell = \sqrt{\frac{2}{(2\pi)(10^9)(4\pi \times 10^{-7})(5.8 \times 10^7)}} = 2.0892 \times 10^{-6} \quad \text{m}$$

De la misma ec. (4-41):

$$\beta = \frac{1}{\ell} = 0.4786 \times 10^6 \quad \text{rad/m}$$

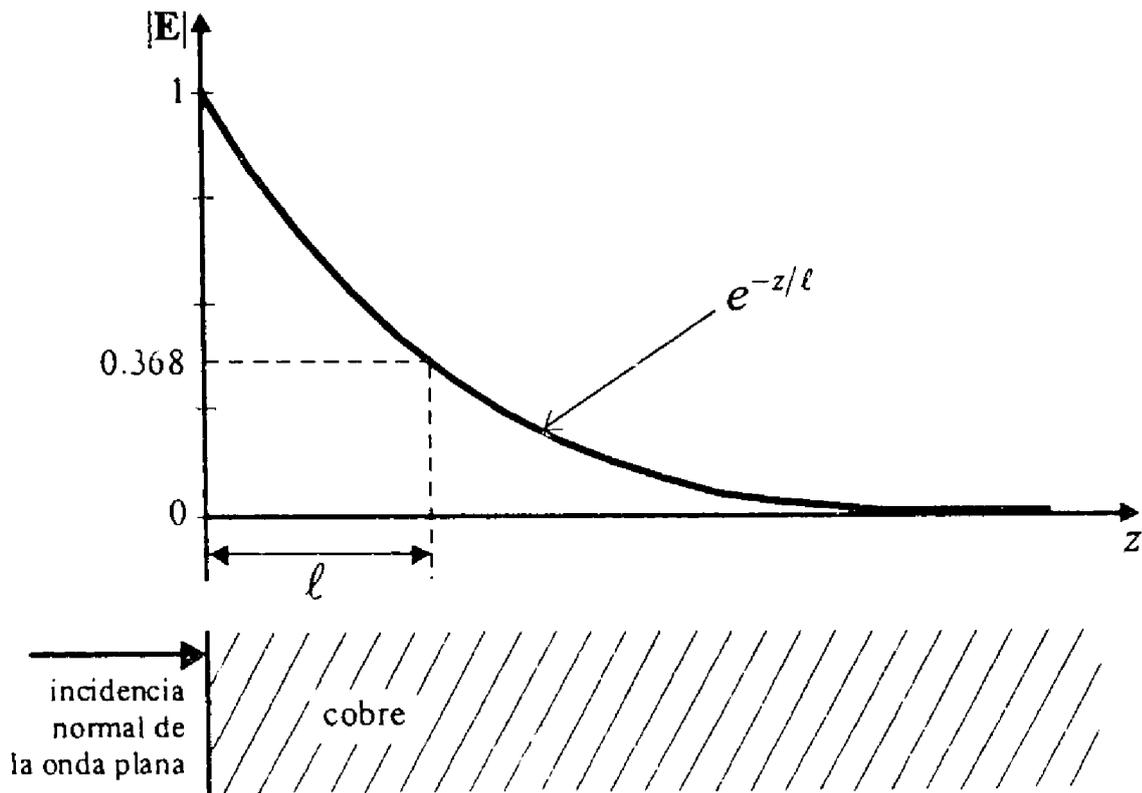
La longitud de onda es la distancia en la que la fase de la señal se incrementa por  $2\pi$  radianes, es decir:

$$\lambda_{\text{cobre}} = \frac{2\pi}{0.4786 \times 10^6} = (2\pi)(\ell) = 13.13 \times 10^{-6} \quad \text{m}$$

Cuando la onda avanza una distancia  $\ell$ , a partir del punto de contacto ( $z = 0$ ), entonces la intensidad del campo eléctrico es, a partir de la ec. (4-42), proporcional a  $e^{-z/\ell}$  con relación al valor inicial del mismo campo. Si se considera que este valor inicial de penetración es igual a la unidad, entonces:

$$\left| \mathbf{E} \right|_{z=\ell} = e^{-\ell/\ell} = e^{-1} \doteq 0.368$$

O sea que el campo eléctrico tiene una intensidad igual al 36.8% del valor inicial:



### 4.3 Teoría general de los modos TE

Un gran número de líneas puede conducir una onda TEM; por ejemplo, la línea bifilar, el cable coaxial y las placas paralelas. Pero otras no, como es el caso de las guías huecas rectangulares o circulares; en éstas sólo pueden propagarse ondas TE y TM (véase la sección 1.5). Además, en las líneas que originalmente llevan una onda TEM, también pueden aparecer modos de propagación TE y TM, conforme la frecuencia de operación se incrementa más y más.

Los modos TE tienen todo su campo eléctrico transversal a la dirección axial ( $E_z = 0$ ) y una componente  $H_z \neq 0$ . A continuación se deducirán las expresiones matemáticas para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  de estos modos.

Las ecs. (4-16) y (4-17) escritas en coordenadas cartesianas dan el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \quad (4-44)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (4-45)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (4-46)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x \quad (4-47)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (4-48)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (4-49)$$

Si  $E_z = 0$  (modo TE) y se supone que la dependencia de los campos con relación a la dirección  $z$  está dada por la función  $e^{-\gamma z}$ , entonces las ecs. (4-44) y (4-45) se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\gamma E_y = j\omega\mu H_x \\ \Rightarrow E_y &= -\frac{j\omega\mu}{\gamma} H_x \end{aligned} \quad (4-50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\gamma E_x = -j\omega\mu H_y \\ \Rightarrow E_x &= \frac{j\omega\mu}{\gamma} H_y \end{aligned} \quad (4-51)$$

Siguiendo el mismo criterio anterior para obtener las derivadas parciales con relación a  $z$ , las ecs. (4-47) y (4-48) quedan como:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (4-52)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (4-53)$$

y si en estas dos últimas se sustituyen (4-51) y (4-50), respectivamente, se obtiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = (j\omega\epsilon) \left( \frac{j\omega\mu}{\gamma} \right) H_y$$

$$\Rightarrow H_y = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4-54)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = (j\omega\epsilon) \left( - \frac{j\omega\mu}{\gamma} \right) H_x$$

$$\Rightarrow H_x = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4-55)$$

Las ecs. (4-54) y (4-55) satisfacen la ec. (4-49), ya que  $E_z = 0$  para las ondas TE. La última ecuación del sistema simultáneo original que falta por emplearse es la (4-46). Al sustituir en ésta las ecs. (4-50), (4-51), (4-54) y (4-55), se obtiene finalmente la ecuación diferencial que hay que resolver:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ - \frac{j\omega\mu}{\gamma} H_x \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{j\omega\mu}{\gamma} H_y \right] = -j\omega\mu H_z$$

$$\frac{j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -j\omega\mu H_z$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0 \quad (4-56)$$

La ec. (4-56) sólo incluye a la variable  $H_z$ . Nótese que ésta es una ecuación general para cualquier sistema con modos TE. Si, por ejemplo, se desea obtener la solución para una guía de ondas rectangular o para dos placas paralelas, la ecuación tendrá que resolverse aplicando las condiciones de frontera pertinentes en cada caso. Encontrada la solución, ésta se sustituye en las ecs. (4-54) y (4-55) para encontrar las otras dos componentes  $H_x$  y  $H_y$ , mismas que a la vez permiten encontrar  $E_x$  y  $E_y$  por medio de las ecs. (4-50) y (4-51).

## 4.4 Teoría general de los modos TM

Los modos TM tienen todo su campo magnético transversal a la dirección axial ( $H_z = 0$ ) y una componente  $E_z \neq 0$ . La metodología para encontrar las expresiones matemáticas de las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  de estos modos es análoga a la que se empleó en la sección anterior para los modos TE.

Partiendo de las ecuaciones fundamentales (4-44) a (4-49), con  $H_z = 0$ , se obtiene una ecuación similar a la ec. (4-56), sólo que ahora la variable a encontrar es  $E_z$ :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0 \quad (4-57)$$

y las demás componentes de los campos se determinan con las expresiones siguientes:

$$E_x = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (4-58)$$

$$E_y = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (4-59)$$

$$H_x = - \frac{j\omega\epsilon}{\gamma} E_y \quad (4-60)$$

$$H_y = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma} E_x \quad (4-61)$$

Así) son ortogonales, iguales

## 4.5 La guía de dos placas paralelas

### 4.5.1 Generalidades

El análisis de un sistema de transmisión integrado por dos placas paralelas es el más sencillo dentro del grupo de las guías de ondas y, además, ofrece una buena visualización introductoria sobre los efectos de propagación dentro de una guía.

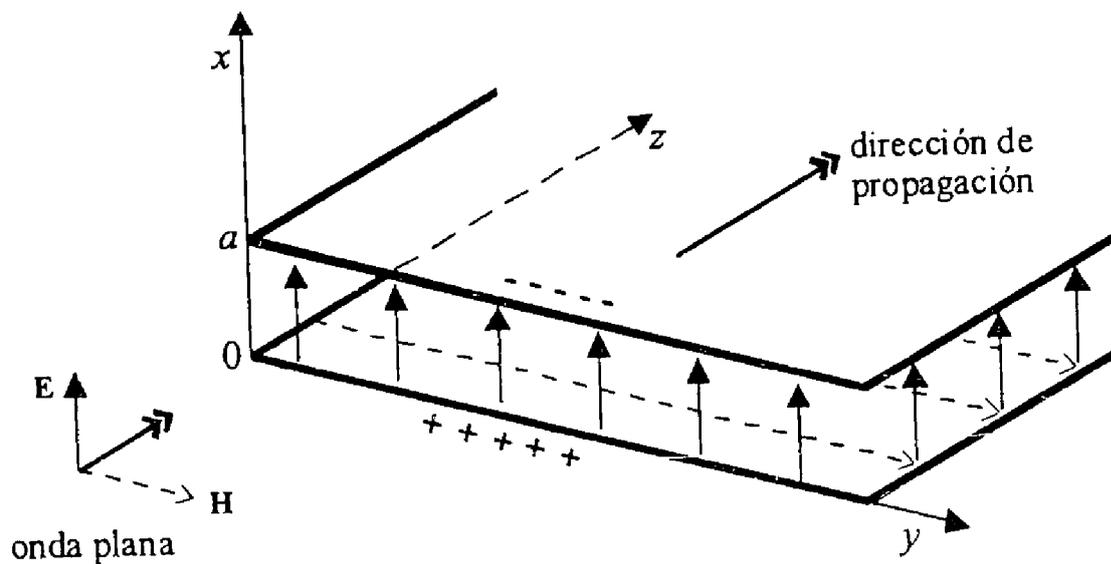


Fig. 4-3 Sistema de dos placas paralelas que "atrapa" una porción de una onda plana incidente.

Considérense inicialmente una onda plana que viaja en la dirección  $z$  y dos placas paralelas perfectamente conductoras orientadas como se muestra en la Fig. 4-3.

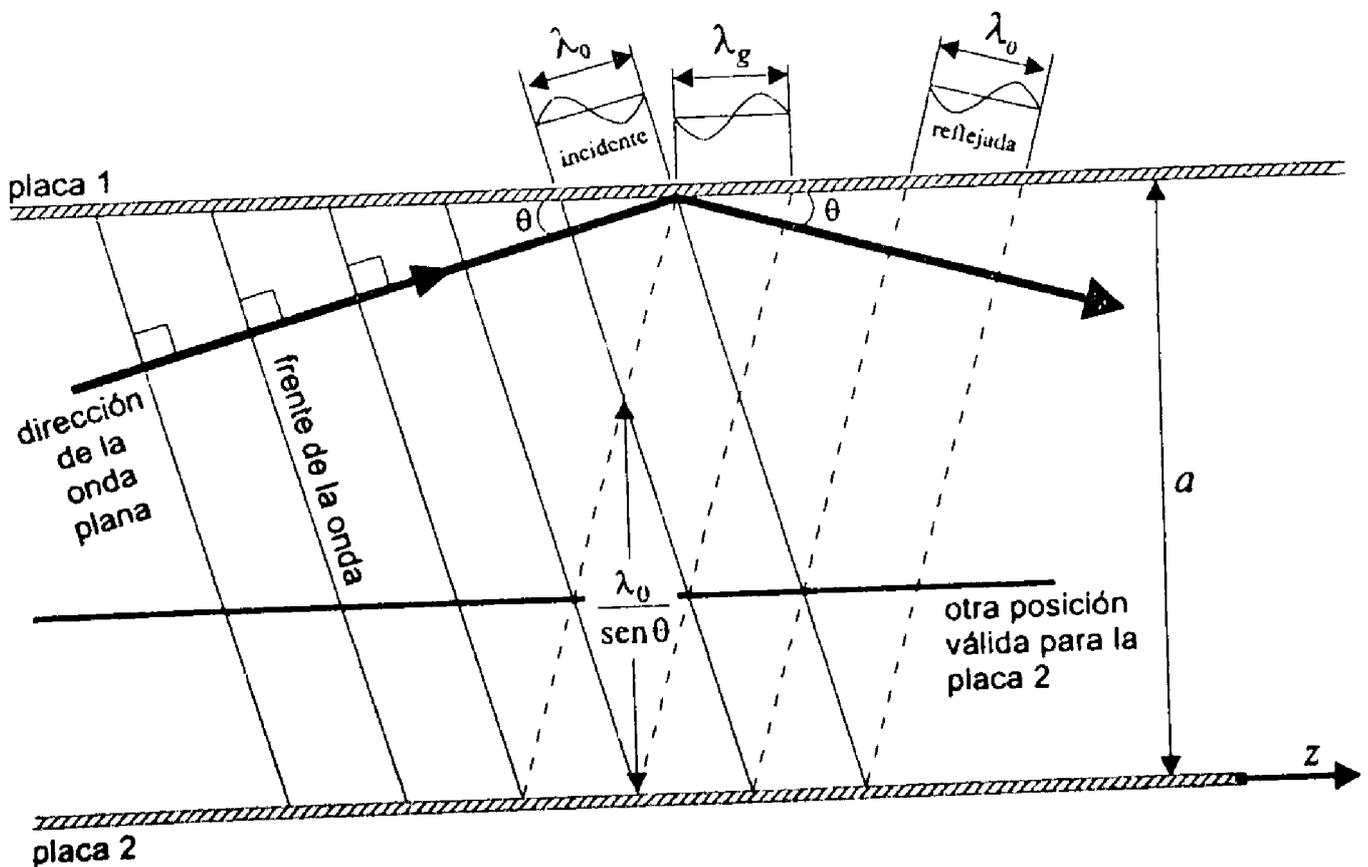
Como las dos placas son perpendiculares al campo eléctrico incidente de la onda plana, no afectan en absoluto su distribución, ya que debe cumplirse la condición de frontera de que el campo eléctrico tangencial en las superficies conductoras sea igual a cero. Es decir, el campo eléctrico sólo puede ser normal a las placas, dirección que coincide con el campo eléctrico de la onda plana incidente. Por su parte, el campo magnético dentro de las dos placas forma noventa grados con el campo eléctrico y con la dirección  $z$ , igual que en el caso de la onda plana.

Dicho de otra forma, la onda que se propaga entre las dos placas también es TEM, y la distribución de los campos es igual a la de la onda plana original, como si las placas no existieran. Un porción de la onda plana es "atrapada" en el interior de las placas, y se sigue propagando a lo largo de la dirección  $z$  con las mismas características que las de una onda plana (o al menos, muy aproximadamente, pues en la práctica los conductores no son perfectos). Por lo tanto, las dos placas paralelas forman una *guía de ondas*.

El modo TEM de propagación dentro de las dos placas es el modo fundamental de transmisión de la guía y existe para toda frecuencia de operación.

Sin embargo, conforme la frecuencia de trabajo se incrementa más y más, dejando fija la separación entre las placas, irán apareciendo otras configuraciones o distribuciones de los campos dentro de la guía, llamadas modos TE y TM. Estos modos tendrán longitudes de onda y constantes de propagación diferentes a las de una onda plana (correspondiente al modo fundamental TEM).

Los modos TE y TM tienen componentes de campo en la dirección axial (eje  $z$ ). Para estudiar sus propiedades, conviene considerar una onda plana que se refleja oblicuamente en un conductor perfecto plano, como se muestra en la Fig. 4-4 (placa 1). Las líneas sólidas paralelas representan el frente de la onda incidente, y en todos los puntos de cada línea el campo tiene la misma fase. Las líneas punteadas son el frente de la onda reflejada y también son líneas de igual fase en todos sus puntos. La longitud de onda característica  $\lambda_0$  es igual para las dos ondas, y el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. Suponiendo que originalmente sólo existiera la placa 1, la placa 2 se puede colocar paralela a la placa 1 en la posición indicada en la figura



**Fig. 4-4** Propagación de una onda entre dos placas paralelas. El rayo que indica la dirección de la onda es perpendicular a las líneas de igual fase.

sin que la distribución de los campos se modifique, siempre y cuando la placa 2 pase por los puntos de cruce de las líneas de igual fase de las dos ondas (cruce de las líneas sólidas con las líneas punteadas). Así, por ejemplo, la línea fina horizontal intermedia también podría ser otra posición válida para la placa 2 y los campos seguirían sin ser perturbados. Cuando el rayo que muestra la dirección de la onda incida sobre la placa 2, se repetirá el mismo fenómeno de reflexión, y así sucesivamente, rebotando de una placa a la otra, hasta llegar al final de la guía.

A partir de la geometría mostrada en la Fig. 4-4, se deduce que la separación entre las dos placas es igual a:

$$a = \frac{n}{2} \left( \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-62)$$

Es obvio que, a pesar de las reflexiones oblicuas sucesivas, al final de cuentas la onda (y su potencia) se mueve hacia la derecha, en la dirección  $z$ . Por tal razón, se define una nueva longitud de onda  $\lambda_g$ , medida a lo largo de las placas de la guía, tal como se muestra en la misma figura. Esta longitud  $\lambda_g$  es la distancia entre puntos de la onda con igual fase en la dirección efectiva de propagación ( $z$ ); se denomina *longitud de onda en la guía* y es mayor que la longitud de onda característica  $\lambda_0$  de la onda plana. A partir de la Fig. 4-4, se deduce entonces que:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} \quad (4-63)$$

Como el  $\sin \theta$  deber ser menor o igual que la unidad, de la ec. (4-62) se tiene que

$$a \geq \frac{n}{2} \lambda_0$$

y la separación mínima requerida para que haya propagación está dada por el límite de esta expresión, es decir:

$$a = \frac{n}{2} \lambda_0 \quad \text{Separación mínima} \quad (4-64)$$

En la práctica, la separación  $a$  entre las dos placas es fija y lo que se puede cambiar es la frecuencia. Por lo tanto, es preferible definir una longitud de onda de corte  $\lambda_c$  que indique la misma condición límite, a partir de la ec. (4-64), como:

$$\lambda_c = \frac{2a}{n} \quad (4-65)$$

La frecuencia correspondiente para esta longitud de onda de corte será  $f_c$ , igual a:

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{cn}{2a} \quad *$$

Ahora bien, si se combinan las ecs. (4-62) y (4-63) para eliminar el ángulo  $\theta$ , se llega a que:

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 = 1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2$$

y sustituyendo en esta expresión la ec. (4-65), se concluye que:

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2$$

Finalmente, dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre  $\lambda_0^2$ :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (4-67)$$

La longitud de onda en la guía,  $\lambda_g$ , también se puede calcular en términos de la frecuencia de trabajo y la frecuencia de corte:

$$\lambda_g = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}} \quad (4-68)$$

---

\* Suponiendo que entre las dos placas hay aire.

Al observar la *ec.* (4-66), se ve que para cada valor de  $n$  hay una frecuencia de corte diferente, y de la *ec.* (4-68) es claro que para cada  $n$  también habrá un valor distinto de la longitud de onda en la guía,  $\lambda_g$ . En cada caso, el valor de  $n$  será precisamente el orden del modo superior de propagación que existe a partir de la  $f_c$  que le corresponde. De esta manera, irán apareciendo los modos  $TE_1$  y  $TM_1$ ,  $TE_2$  y  $TM_2$ , etc., conforme aumente la frecuencia de operación.

**Ejercicio 4-5** Una onda electromagnética se propaga entre dos placas paralelas separadas 5 cm entre sí. La frecuencia de la onda es 8 GHz. ¿Cuántos modos distintos hay en la guía? ¿Cuánto mide la longitud de onda en la guía para cada modo?

### Solución

La onda TEM existe para toda frecuencia. Si la frecuencia de corte de algún modo superior es menor o igual que 8 GHz (la frecuencia de operación), entonces ese modo también existe. De la *ec.* (4-66):

$$f_{c_1} = \frac{(3 \times 10^8)(1)}{(2)(0.05)} = 3 \text{ GHz}$$

$$f_{c_2} = \frac{(3 \times 10^8)(2)}{(2)(0.05)} = 6 \text{ GHz}$$

$$f_{c_3} = \frac{(3 \times 10^8)(3)}{(2)(0.05)} = 9 \text{ GHz}$$

Se concluye que sólo existen los modos TEM,  $TE_1$ ,  $TM_1$ ,  $TE_2$  y  $TM_2$  (Fig. 4-5), simultáneamente. Cinco modos en total.

De la *ec.* (4-68):

$$\lambda_g = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}$$

Por lo tanto:

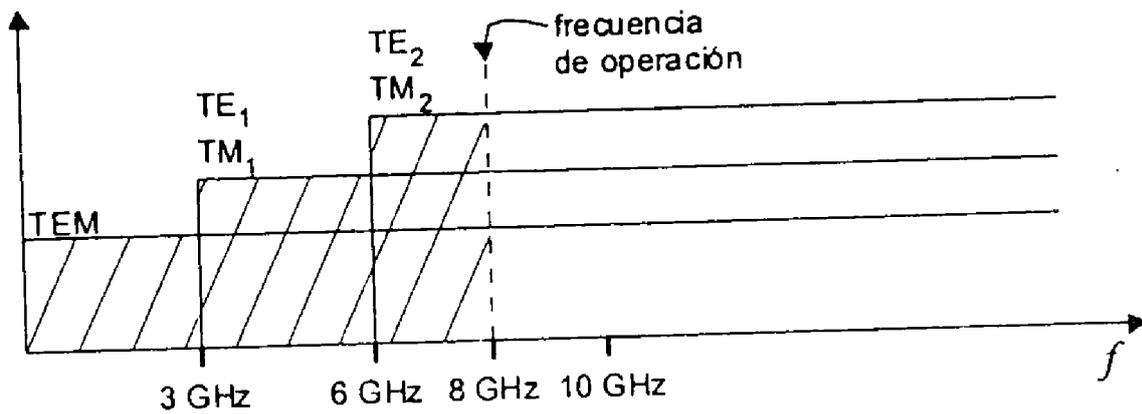


Fig. 4-5 Modos de propagación para las dos placas paralelas del Ejercicio 4-5.

$$\lambda_{g_1} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{(8 \times 10^9)^2 - (3 \times 10^9)^2}} = 4.045 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_2} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{(8 \times 10^9)^2 - (6 \times 10^9)^2}} = 5.669 \text{ cm}$$

En el caso de la onda TEM,  $\lambda_g = \lambda_0$ :

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{8 \times 10^9} = 3.75 \text{ cm}$$

A continuación se empleará un mayor rigor matemático para deducir las expresiones de las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , y se demostrará que las frecuencias de corte para los modos  $\text{TE}_n$  y  $\text{TM}_n$  son iguales.

#### 4.5.2 Los modos TE

Si las placas paralelas de la Fig. 4-3 son muy anchas, puede considerarse que  $H_z$  es independiente de la coordenada  $y$ . Entonces, la ec. (4-56) de la teoría general de los modos TE se reduce a:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0$$

cuya solución es de la forma armónica :

$$H_z = (A \cos gx + B \operatorname{sen} gx) e^{-\gamma z} \quad (4-69)$$

con 
$$g^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (4-70)$$

Como se debe de cumplir la condición de frontera  $H_{\text{normal}} = H_x = 0$  en ambas placas, se deduce de la ec. (4-55) que también debe de cumplirse  $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$ , en  $x = 0$  y en  $x = a$ . La condición para  $x = 0$ , al derivar la ec. (4-57) con relación a  $x$ , implica que  $B = 0$ , por lo que la solución final es:

$$H_z = (A \cos gx) e^{-\gamma z} \quad (4-71)$$

Derivando esta solución con respecto a  $x$ , para poder aplicar la segunda condición de frontera en  $x = a$ , se tiene:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = (-A g \operatorname{sen} gx) e^{-\gamma z} \Big|_{x=a} = 0$$

El coeficiente  $A$  no puede valer cero, porque entonces  $H_z = 0$  en la ec. (4-71) y no habría ninguna solución. Por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\operatorname{sen} ga = 0$$

o bien:

$$ga = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-72)$$

Sustituyendo la ec. (4-72) en la ec. (4-70):

$$\frac{n^2 \pi^2}{a^2} - \omega^2 \mu \epsilon = \gamma^2 \quad (4-73)$$

La ec. (4-73) indica que  $\gamma$  solamente puede tomar valores reales o imaginarios puros, y que tiene un valor diferente para cada modo  $n$  a una frecuencia angular determinada,  $\omega$ . Si  $\gamma$  es real, esto corresponde a una atenuación exponencial en la ec. (4-71) y la onda prácticamente no avanza. En cambio, si  $\gamma$  es imaginaria pura, se tiene una onda progresiva sin atenuación, con un factor de desfase  $\exp(-j \beta_n z)$ . Esta última es la

situación de interés práctico. El punto de transición entre un valor real y uno imaginario para  $\gamma$  se obtiene de la ec. (4-73), igualándola a cero:

$$\frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{n \pi}{a} \left( \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \right)$$

y para el vacío o el aire, esta fórmula se reduce a:

$$2\pi f_c = \frac{n \pi}{a} (c)$$

de donde

$$f_c = \frac{cn}{2a} \quad (4-74)$$

expresión que es idéntica a la ec. (4-66).

Si la frecuencia de operación es mayor que  $f_c$ ,  $\gamma$  es imaginaria y hay propagación del modo  $n$  correspondiente. Si la frecuencia es menor que  $f_c$ ,  $\gamma$  será real y no habrá propagación. Por lo tanto,  $f_{c_n}$  es la frecuencia de corte para que pueda comenzar a existir el modo  $n$ .

Conocidos  $H_z$  y  $\gamma$ , a través de las ecs. (4-71) y (4-73), las demás componentes de los campos para cada modo  $n$  se pueden obtener tal como se explicó en la sección 4.3:

$$H_z = (A \cos gx) e^{-\gamma_n z} \quad = (4-71)$$

o sea:

$$H_z = A \cos \left( \frac{n \pi}{a} x \right) e^{-\gamma_n z} \quad (4-75)$$

en donde

$$\gamma_n = \sqrt{\left( \frac{n \pi}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad > 0 \quad (4-76)$$

y la componente en  $x$  del campo magnético es

$$H_x = - \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad = (4-55)$$

$$H_x = A \left( \frac{n\pi}{a} \right) \left( \frac{\gamma_n a^2}{n^2 \pi^2} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_n z}$$

$$H_x = A \left( \frac{\gamma_n a}{n\pi} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_n z} \quad (4-77)$$

Como  $H_z$  no depende de  $y$ , de las ecs. (4-54) y (4-51) se concluye que:

$$H_y = 0 \quad \text{y} \quad E_x = 0 \quad (4-78)$$

Finalmente, de la ec. (4-50):

$$E_y = - \frac{j\omega\mu}{\gamma_n} H_x$$

$$E_y = - A \left( \frac{j\omega\mu a}{n\pi} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_n z} \quad (4-79)$$

**Ejercicio 4-6** ¿Cuál es la separación máxima permisible entre dos placas paralelas para que de los modos TE sólo pueda propagarse el primero, a una frecuencia de 10 GHz? Suponga que entre las dos placas hay aire.

Solución

La frecuencia de corte del segundo modo TE sería, de la ec. (4-74):

$$f_{c_2} = \frac{cn}{2a} \Big|_{n=2} = \frac{3 \times 10^8}{a} > 10 \text{ GHz}$$

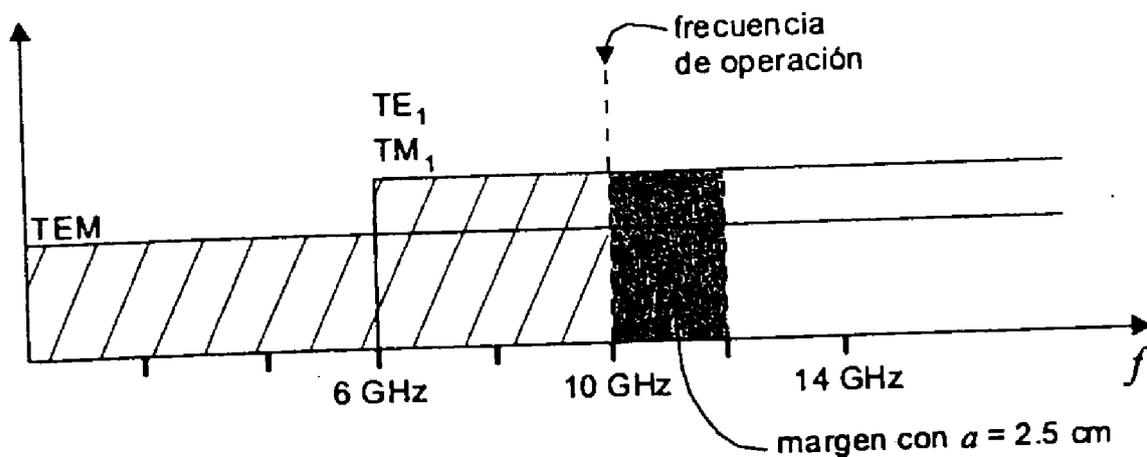
$$\Rightarrow a < \frac{3 \times 10^8}{10^{10}} = 3 \text{ cm} \quad \left( \begin{array}{l} \text{separación máxima} \\ \text{permisible pedida} \end{array} \right)$$

Si  $a = 3 \text{ cm.}$ , además de los modos TEM,  $TE_1$  y  $TM_1$ , aparecerían los modos adicionales  $TE_2$  y  $TM_2$ , ya que la frecuencia de corte del modo 2 sería igual a 10 GHz, o sea la frecuencia de operación. La frecuencia de corte correspondiente para el modo 1 sería 5 GHz. La condición buscada es entonces  $a < 3 \text{ cm.}$  Si se eligiese por ejemplo  $a = 2.5 \text{ cm.}$ , se tendría:

$$f_{c_1} = \frac{cn}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^{-2}} = 6 \text{ GHz}$$

$$f_{c_2} = (f_{c_1})(2) = 12 \text{ GHz}$$

Con esto, habría un margen seguro entre la frecuencia de operación y la de corte del segundo modo:



**Ejercicio 4-7** Dibuje la distribución aproximada de las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  entre dos placas paralelas, en un cierto instante, para el modo de propagación  $TE_1^*$ .

### Solución

De las ecs. (4-75), (4-77) y (4-79), las funciones que hay que graficar, para  $n = 1$ , son:

$$H_x = A \left( \frac{\gamma_1 a}{\pi} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_1 z} \quad (\gamma_1 = j\beta_1)$$

$$H_z = A \cos \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_1 z}$$

$$E_y = -A \left( \frac{j\omega\mu a}{\pi} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_1 z}$$

Las demás componentes son iguales a cero. En la Fig. 4-6 se muestra la distribución de las intensidades y direcciones de los campos.

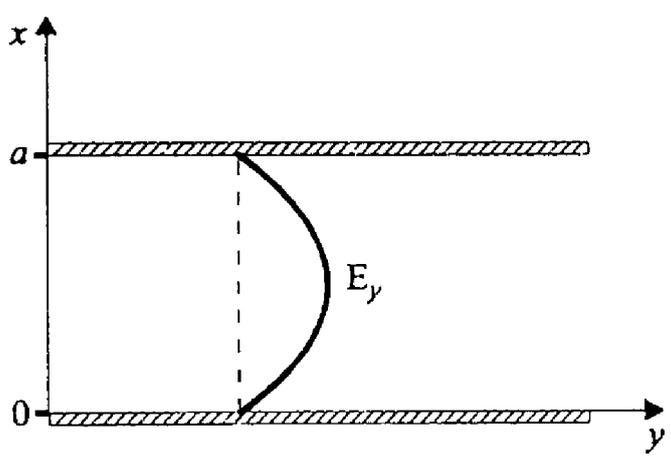
### 4.5.3 Los modos TM

En este caso,  $H_z = 0$  y  $E_z \neq 0$ . La teoría general correspondiente ya ha sido presentada en la sección 4.4, y para las dos placas paralelas la ecuación a resolver es:

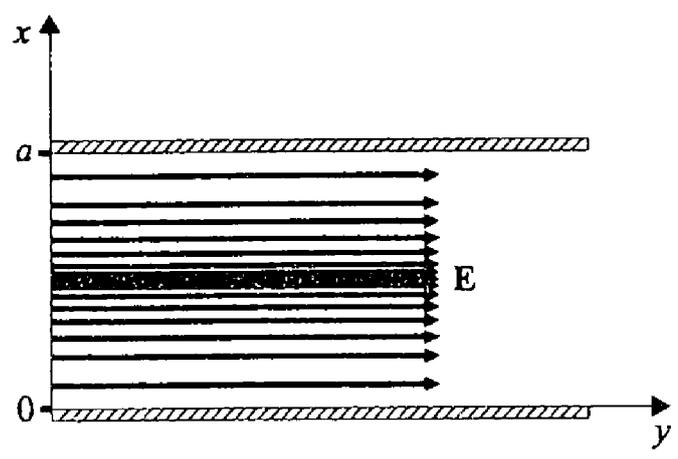
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0$$

cuya solución es de la forma

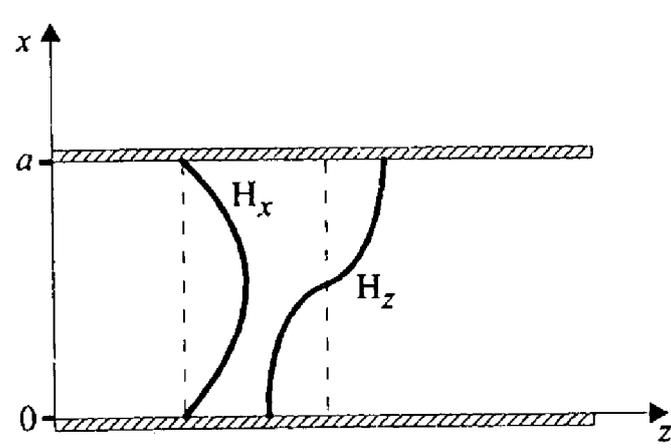
\* Conviene aclarar que algunos autores prefieren utilizar la nomenclatura  $TE_{10}$ ,  $TE_{20}$ , etc., en lugar de  $TE_1$ ,  $TE_2$ , etc., para las placas paralelas. El segundo subíndice siempre vale cero y se puede omitir, como en este texto. Sin embargo, para identificar a los modos de propagación en otros tipos de guías sí se emplea el segundo subíndice; por ejemplo, en las guías rectangulares y circulares, pues ya tiene un verdadero significado, tal como se verá en las siguientes secciones 4.8 y 4.9. El mismo comentario aplica para los modos TM.



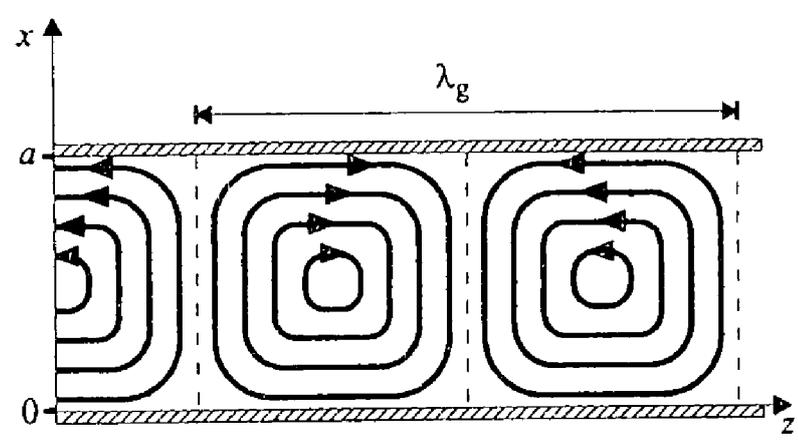
Intensidad de  $E_y$  en un instante dado.



Líneas de intensidad, indicando la dirección del campo total  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{a}_y$ .



Intensidades de  $H_x$  y  $H_z$  en un instante dado.



Líneas de intensidad, indicando la dirección del campo total  $\mathbf{H} = H_x \mathbf{a}_x + H_z \mathbf{a}_z$ .

**Fig. 4-6** Intensidad y distribución de los campos entre dos placas paralelas para el modo  $TE_1$ .

$$E_z = (A \cos gx + B \text{ sen } gx) e^{-\gamma z}$$

con 
$$g^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \tag{4-70}$$

Para  $x = 0$ , la condición de frontera es que  $E$  tangencial valga cero, o sea que  $E_z = 0$ , de donde se concluye que el coeficiente  $A$  de la solución general vale cero, reduciéndose ésta a:

$$E_z = (B \text{ sen } gx) e^{-\gamma z} \tag{4-80}$$

En la pared interior de la otra placa, donde  $x = a$ ,  $E_z$  también debe valer cero, por lo que, para que la ec. (4-80) se satisfaga, debe cumplirse que:

$$\text{sen } ga = 0$$

o bien:

$$g = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad = (4-72)$$

De las ecs. (4-70) y (4-72), que son idénticas para los modos TE y TM, se demuestra que la frecuencia de corte y la constante de propagación tienen el mismo valor para ambos modos, para cada  $n$  en particular:

$$f_c = \frac{cn}{2a} \quad = (4-74)$$

$$\gamma_n = j\beta_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \omega^2\mu\epsilon} \quad = (4-73)$$

A partir de la ec. (4-80) y la ec. (4-58) se deduce que

$$E_x = \left( -\frac{\gamma B}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon}} \right) \cos gx e^{-\gamma z} \quad (4-81)$$

Asimismo, de las ecs. (4-59) y (4-60) se obtiene que

$$E_y = 0 \quad \text{y} \quad H_x = 0 \quad (4-82)$$

y finalmente, combinando las ecs. (4-61) y (4-81):

$$H_y = \left( -\frac{j\omega\epsilon B}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon}} \right) \cos gx e^{-\gamma z} \quad (4-83)$$

La distribución de los campos para el primer modo  $TM_1$  entre las dos placas se muestra en la Fig 4-7, para un cierto instante (compárese con los resultados del ejercicio 4-7 para el modo  $TE_1$ , Fig. 4-6).

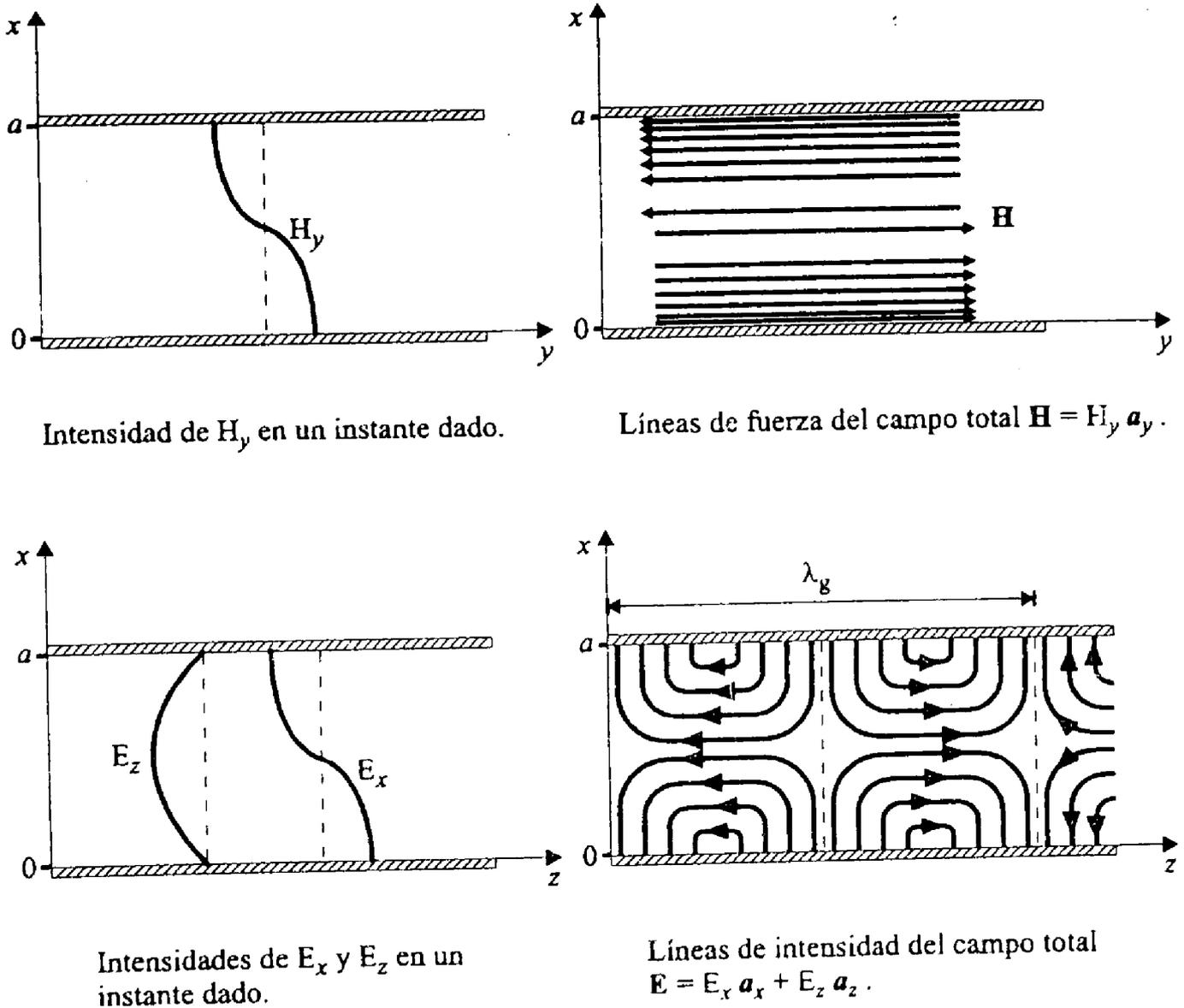


Fig. 4-7 Intensidad y distribución de los campos entre dos placas paralelas para el modo  $TM_1$ .

Nótese que para los modos TM,  $n$  sí puede valer cero (ec. 4-72), pues aunque  $E_z$  se vuelve idéntica a cero,  $\cos gx = 1$  y no todos los campos desaparecen. De hecho, sólo tienen valor las siguientes componentes, a partir de las ecs. (4-81) y (4-83):

$$E_x = C_1 e^{-\gamma z}$$

$$H_y = C_2 e^{-\gamma z}$$

que no es más que la onda transversal electromagnética TEM, o sea, el modo fundamental de transmisión de la guía. En realidad, el modo ya no es TM, puesto que  $E_z = 0$ .

**Ejercicio 4-8** Retomando el ejercicio 4-6, suponga ahora que entre las dos placas hay un material con  $\epsilon_r = 4$ . ¿Cuál sería ahora la separación que puede haber entre ellas para que solamente se propaguen los primeros modos TEM, TE<sub>1</sub> y TM<sub>1</sub> en un rango de frecuencias con  $f < 10$  GHz?

*Solución*

A 10 GHz ya pueden existir los modos TE<sub>2</sub> y TM<sub>2</sub>. Por lo tanto:

1ª parte

$$f_c = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}} \frac{n}{a}$$

Para  $n = 2$ :

$$10 \times 10^9 = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 2} \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow a = 0.015 \text{ m}$$

(valor límite que no debe ser alcanzado)

2ª parte

El modo TEM existe desde  $f = 0$ .

Para los modos TE<sub>1</sub> y TM<sub>1</sub> debe cumplirse:

$$f_{c_1} < 10 \text{ GHz}$$

Es decir  $\frac{c}{4a} < 10^{10} \Rightarrow a > 0.0075 \text{ m}$

Por lo tanto, el rango permisible para  $a$  es:

$$0.0075 \text{ m} < a < 0.015 \text{ m}$$

## 4.6 Velocidades de los modos TE y TM. Teoría general

Cuando se estudió la propagación de una onda plana en un medio sin pérdidas en la sección 4.2.1, se definió su velocidad de fase como

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad = (4-31)$$

Claramente,  $\beta$  es una función lineal de  $\omega$ , lo cual convierte a  $v$  en una constante independiente de la frecuencia. Sin embargo, hay casos, tales como la propagación en un dieléctrico con pérdidas muy altas o dentro de una guía de ondas, en que  $\beta$  no es una función lineal de  $\omega$ . Esto quiere decir que ondas de diferente frecuencia se propagan con distintas velocidades de fase. Toda señal que contiene información no es una onda senoidal pura a una sola frecuencia, sino la superposición de muchas componentes armónicas dentro de la banda de frecuencias de la señal; estas componentes viajan a lo largo de una guía con distintas velocidades de fase, y esto causa distorsión en la forma de la señal recibida. En términos electromagnéticos, se dice que la onda “se dispersa”, y por ello el fenómeno descrito recibe el nombre de *dispersión*. Acordemente, una guía de ondas es un medio de propagación dispersivo.

Por otra parte, en la sección 4.5 se demostró geoméricamente para las placas paralelas que la longitud de onda en la guía es mayor que la longitud de onda característica:

$$\lambda_g > \lambda_0$$

Como ambas longitudes de onda representan la distancia entre dos puntos consecutivos de la onda con la misma fase, en un caso medida a lo largo de la guía, y en el otro a lo largo de la dirección de la onda plana (véase la Fig. 4-4), resulta que los puntos a lo largo de la guía se deben mover más rápido, pues tienen que recorrer una distancia mayor en el mismo tiempo que los puntos sobre la onda plana. Por tanto, la velocidad a lo largo de la guía es mayor que la velocidad de fase de la onda plana. Esto parece contradecir la teoría de la relatividad, pues si la onda plana viaja a la velocidad de la luz, ¿cómo es posible que exista una velocidad mayor a lo largo de la guía? La realidad es que no hay ninguna contradicción, ya que esta velocidad mayor

sólo es aparente. La potencia de la señal viaja en la misma dirección que la onda plana, a la misma velocidad de fase, que es inferior o igual a la velocidad de la luz según el tipo de material dieléctrico. De la Fig. 4-4 se deduce que:

$$v_p = \frac{c \lambda_g}{\lambda_0} \quad (4-84)$$

en donde  $v_p$  es la velocidad de fase **a lo largo de la guía**, a diferencia de  $v$  que representa la velocidad de fase **en la dirección de la onda plana**. Es claro que  $v_p > v$ .

Sin embargo, aún queda otra velocidad por definir, que es la más importante de todas, pues es la velocidad a la que realmente se mueve la información de una señal dentro de la guía. Esta nueva velocidad se denomina *velocidad de grupo* y se representa como  $v_g$ .

El significado de la velocidad de grupo se explicará retomando el asunto de la dispersión. Considérese para ello una señal modulada muy sencilla, por ejemplo en AM, en donde la frecuencia moduladora es muy pequeña comparada con la frecuencia portadora. Si la frecuencia de la portadora se designa como  $\omega$  y la de la señal moduladora como  $\delta\omega$ , resulta que la onda modulada es:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\omega t - \beta z) \\ &+ \frac{1}{2} E_0 m \cos(\omega t + \delta\omega t - \beta z - \delta\beta z) \\ &+ \frac{1}{2} E_0 m \cos(\omega t - \delta\omega t - \beta z + \delta\beta z) \end{aligned}$$

en donde el primer término es la onda portadora y los otros dos son las bandas laterales. La ecuación anterior puede reescribirse como:

$$E = E_0 [1 + m \cos(\delta\omega t - \delta\beta z)] \cos(\omega t - \beta z)$$

Se observa que la portadora (fuera del paréntesis rectangular) se sigue propagando a la misma velocidad de fase dada por la *ec. (4-31)*, pero la onda moduladora viaja a otra velocidad de fase, que puede obtenerse del argumento de la función coseno dentro del paréntesis rectangular como:

$$v_g = \frac{\delta \omega}{\delta \beta} = \frac{1}{\frac{\delta \beta}{\delta \omega}}$$

y en el límite  $v_g = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega}$ , ya que  $\beta$  es función de  $\omega$ . Esta es la velocidad de grupo, y en términos de la longitud de onda a lo largo de la guía,  $\lambda_g$ , se calcula como:

$$v_g = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega} = \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right) c \quad (4-85)$$

Comparando las ecs. (4-84) y (4-85), se tiene que en general:

$$v_p > c > v_g$$

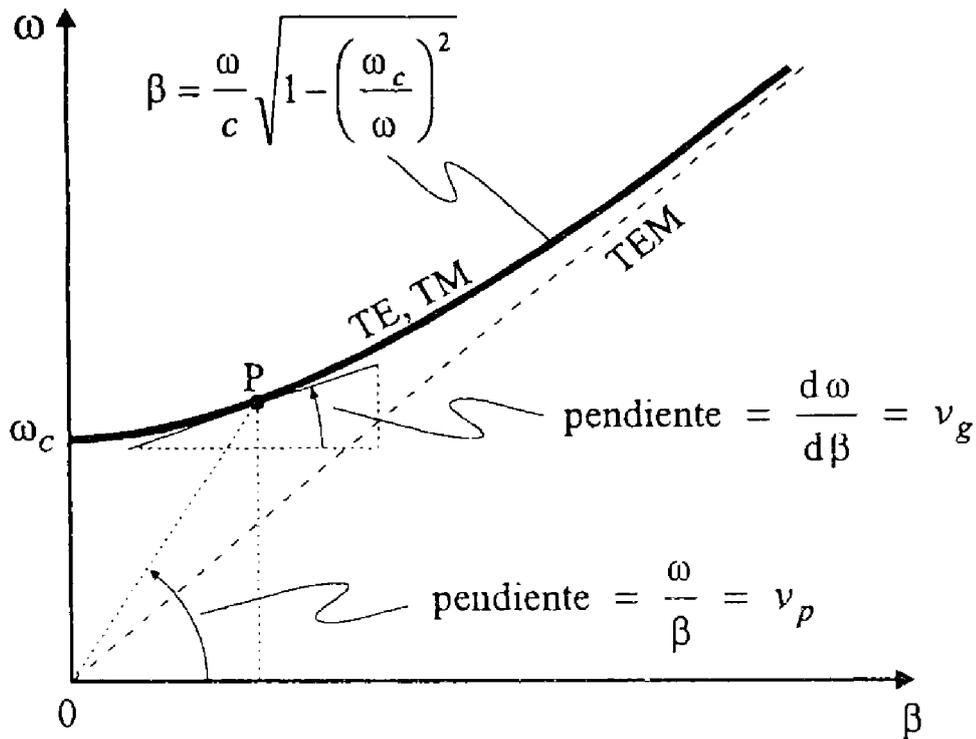
$$v_p v_g = c^2 \quad (4-86)$$

y

La velocidad de grupo es la velocidad a la que se mueve un "grupo" de frecuencias, es decir, el paquete de la información, siempre y cuando la señal sea de banda angosta. Para señales con espectros de frecuencia muy anchos es necesario emplear otro tipo de análisis, que queda fuera de los objetivos de este texto.

Al graficar  $\omega$  contra  $\beta$ , se obtiene una gráfica llamada "diagrama de dispersión". Este diagrama (Fig. 4-8) es muy útil, pues la pendiente de una línea recta dibujada desde el origen hasta un punto P sobre la gráfica da el valor de la velocidad de fase, y la pendiente local de una línea tangente a la gráfica en ese mismo punto P (derivada de  $\omega$  con respecto a  $\beta$ ) da el valor de la velocidad de grupo. La función graficada es la relación no lineal entre  $\beta$  y  $\omega$  para los modos TE y TM dentro de una guía ideal:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2} \quad (4-87)$$



**Fig. 4-8** Diagrama de dispersión  $\omega$ - $\beta$  para los modos TE y TM en una guía de ondas, con frecuencia angular de corte  $\omega_c$ .

Por lo que:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (4-88)$$

$$\begin{aligned}
 y \quad v_g &= \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = \frac{c}{\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 - (2\pi f_c)^2]^{1/2}} \\
 &= \frac{c \sqrt{\omega^2 - (2\pi f_c)^2}}{\omega} = c \sqrt{1 - (f_c/f)^2} \quad (4-89)
 \end{aligned}$$

en donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $f_c$  es la frecuencia de corte del modo de propagación. De las ecs. (4-88) y (4-89) se observa que, a medida que la frecuencia aumenta, ambas velocidades tienden a igualarse a la velocidad de la luz\*. Lo mismo puede apreciarse gráficamente en la Fig. 4-8, donde

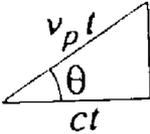
\* Esto es suponiendo que el medio es aire o el vacío. Si el medio de propagación es un dieléctrico cualquiera con  $\epsilon_r \neq 1$ , ambas velocidades tenderán a igualarse a  $v = c/\sqrt{\epsilon_r}$ .

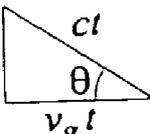
los valores de ambas pendientes tienden asintóticamente hacia la pendiente de la recta punteada, que equivaldría a la función lineal  $\omega = c \beta$  para una onda TEM en el espacio libre; la pendiente de esta recta es igual a  $c$ , la velocidad de la luz. También vale la pena notar que el producto  $v_p v_g$ , a partir de las ecs. (4-88) y (4-89), da  $c^2$  como resultado, lo cual concuerda con la ec. (4-86).

Por último, y con el fin de ilustrar geoméricamente el significado de las tres velocidades vistas, se mostrará un sencillo método en base a triángulos rectángulos. Considérese para esto la Fig. 4-9. El rayo que avanza de la izquierda hacia la derecha representa la dirección de un frente de onda. Al reflejarse en cada pared, el campo eléctrico de la onda sufre un cambio de fase de  $180^\circ$ . Suponiendo que dentro de la guía haya aire, el frente de la onda viaja a una velocidad  $v = c$ , y en un tiempo  $t$  cubre una distancia  $ct$ . En cambio, la potencia de la señal, que efectivamente se desplaza en la dirección  $z$ , sólo avanza una distancia  $v_g t$  en el mismo tiempo. Por su parte, el punto de incidencia A del frente de la onda se mueve a lo largo de la pared de la guía una distancia  $v_p t$ . La relación entre estas velocidades y el ángulo de incidencia  $\theta$  se obtiene fácilmente de los triángulos rectángulos de la Fig. 4-9:

$$v_p = \frac{c}{\cos \theta} > c$$

$$v_g = c \cos \theta < c$$


 $\cos \theta = \frac{c}{v_p}$


 $\cos \theta = \frac{v_g}{c}$

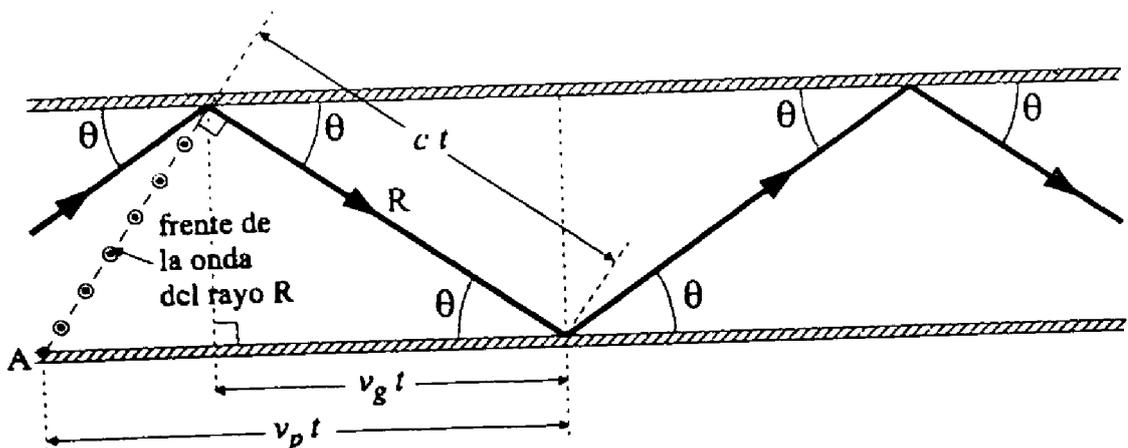


Fig. 4-9 Relación geométrica de velocidades en una guía. El símbolo  $\odot$  del frente de la onda indica que el vector de campo eléctrico sale del papel.

y desde luego:

$$v_p v_g = c^2$$

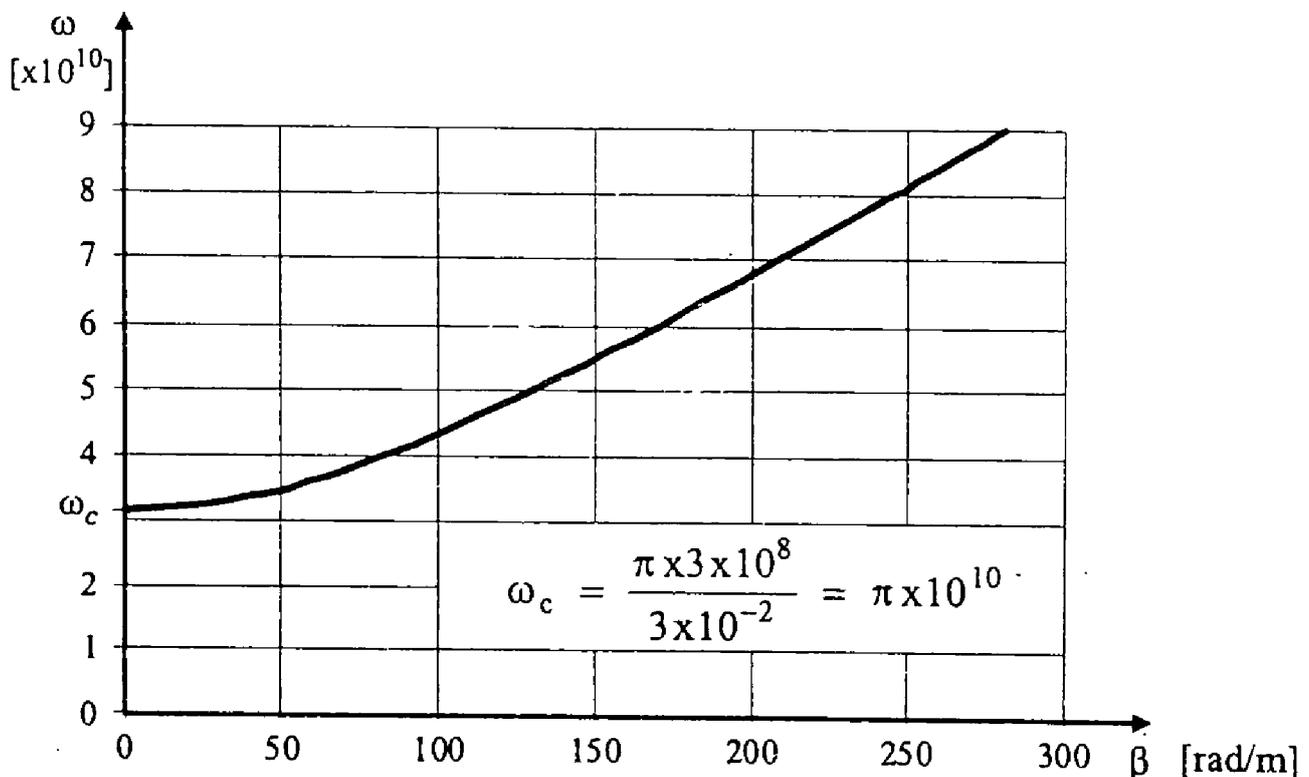
**Ejercicio 4-9** Obtenga el diagrama  $\omega$ - $\beta$  para el modo  $TE_1$  de propagación dentro de dos placas paralelas\*. Considere que la separación de las placas es de 3 cm y que el medio de propagación es aire.

*Solución*

De las ecs. (4-87) y (4-74):

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \left( \frac{2\pi c n}{2a\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \left( \frac{(\pi)(3 \times 10^8)(1)}{(0.03)(\omega)} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\omega}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - \left( \frac{\pi \times 10^{10}}{\omega} \right)^2} \end{aligned}$$

y la gráfica correspondiente del diagrama de dispersión es:



\* Es importante recordar que la teoría general que se ha presentado en esta sección sobre velocidades es válida también para las demás guías que se verán en este capítulo. En este ejercicio se elige un par de placas paralelas porque es el único tipo de guía visto hasta ahora.

**Ejercicio 4-10** Calcule las velocidades de fase y de grupo de todos los modos que se pueden propagar a una frecuencia de 12 GHz entre dos placas paralelas de cobre, separadas 4 cm entre sí.

### Solución

Para resolver este problema, podrían usarse directamente las *ecs.* (4-88) y (4-89). Sin embargo, se ilustrará un método alternativo. Las fórmulas a aplicar están dadas por las *ecs.* (4-84) y (4-85):

$$v_p = \frac{\lambda_g}{\lambda_0} c \quad \text{y} \quad v_g = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} c$$

La longitud de onda característica a 12 GHz es igual a

$$\lambda_0 = \frac{c}{12 \times 10^9} = 2.5 \text{ cm}$$

Las frecuencias de corte de los primeros modos son

$$f_{c_1} = \frac{c}{2a} (1) = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 4 \times 10^{-2}} = 3.75 \text{ GHz}$$

$$f_{c_2} = 2f_{c_1} = 7.5 \text{ GHz}$$

$$f_{c_3} = 3f_{c_1} = 11.25 \text{ GHz}$$

Evidentemente, el modo 4 tiene una frecuencia de corte mayor que la frecuencia de operación (12 GHz) y no se propaga. Por tanto, los modos dentro de las placas son: TEM, TE<sub>1</sub>, TM<sub>1</sub>, TE<sub>2</sub>, TM<sub>2</sub>, TE<sub>3</sub> y TM<sub>3</sub>.

A continuación, se calcula la longitud de onda en la guía para cada modo, usando la *ec.* (4-68):

$$\lambda_{g_1} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_{c_1}^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{(12^2 - 0.375^2)} \times 10^{10}} = 2.63 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_2} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_{c_2}^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1.2^2 - 0.75^2} \times 10^{10}} = 3.20 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_3} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_{c_3}^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1.2^2 - 1.125^2} \times 10^{10}} = 7.18 \text{ cm}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones para  $v_p$  y  $v_g$ , se obtienen los datos pedidos, que se encuentran concentrados en la tabla siguiente:

Modo	$n$	$\lambda_0$ (cm)	$\lambda_g$ (cm)	$v_p$ ( $\times 10^8$ m/s)	$v_g$ ( $\times 10^8$ m/s)
TEM	0	2.50	2.50	3.00	3.00
TE <sub>1</sub> y TM <sub>1</sub>	1	2.50	2.63	3.16	2.85
TE <sub>2</sub> y TM <sub>2</sub>	2	2.50	3.20	3.84	2.34
TE <sub>3</sub> y TM <sub>3</sub>	3	2.50	7.18	8.62	1.04

#### 4.7 Impedancias de los modos TE y TM. Teoría general

En las secciones siguientes se verá que una guía de ondas hueca (rectangular o circular) se comporta como un filtro pasa-altas, puesto que no puede transmitir una onda TEM, sino sólo ondas TE o TM. Para un modo dado, habrá una región de corte y otra de paso, siendo  $f_c$ , la frecuencia de corte, el punto de transición a partir del cual existirá la transmisión del modo.

Sin embargo, para todas las guías (incluyendo las placas paralelas), a pesar de que haya propagación de un cierto modo TE o TM a partir de  $f_c$ , la relación entre las magnitudes de los campos eléctrico y magnético transversales a la dirección axial no es constante, sino que cambia con la frecuencia de trabajo. Por ello, conviene estudiar ahora la teoría general sobre el comportamiento de la impedancia de la onda en función de la frecuencia.

Para los modos TE, la impedancia de onda se obtiene a partir de la ec. (4-51):

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (4-90)$$

y de la ec. (4-61) se obtiene la impedancia de onda para los modos TM:

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \quad (4-91)$$

En términos de la frecuencia de corte del modo  $mn^*$  y de la impedancia intrínseca del medio de propagación,  $\eta$ , las ecuaciones anteriores toman la forma siguiente:

$$Z_{TE_{mn}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (f_{c_{mn}}/f)^2}} \quad (4-92)$$

$$Z_{TM_{mn}} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2} \quad (4-93)$$

Las ecs. (4-92) y (4-93) se pueden graficar para un modo cualquiera  $mn$  en función de la frecuencia, normalizada con relación a la frecuencia de corte correspondiente. También es conveniente, desde el punto de vista de interpretación, graficar la impedancia de onda normalizándola con relación a la impedancia intrínseca del medio. La forma típica de las curvas resultantes se muestra en la Fig. 4-10. En ella se observa que la impedancia  $Z_{TE}$  es resistiva pura, siempre es mayor que la impedancia intrínseca del medio, y conforme la frecuencia aumenta, se acerca más y más al valor de  $\eta$ , que correspondería a la impedancia de una onda TEM en el mismo medio. Asimismo, se puede apreciar que  $Z_{TM}$  también es resistiva pura, pero siempre es menor que la impedancia intrínseca del medio; conforme la frecuencia aumenta, también se acerca más y más al valor de  $\eta$ .

---

\* Para las placas paralelas,  $m = 1, 2, 3, \dots$  y  $n = 0$ . Para las guías huecas,  $n$  también puede tener valores diferentes de cero.

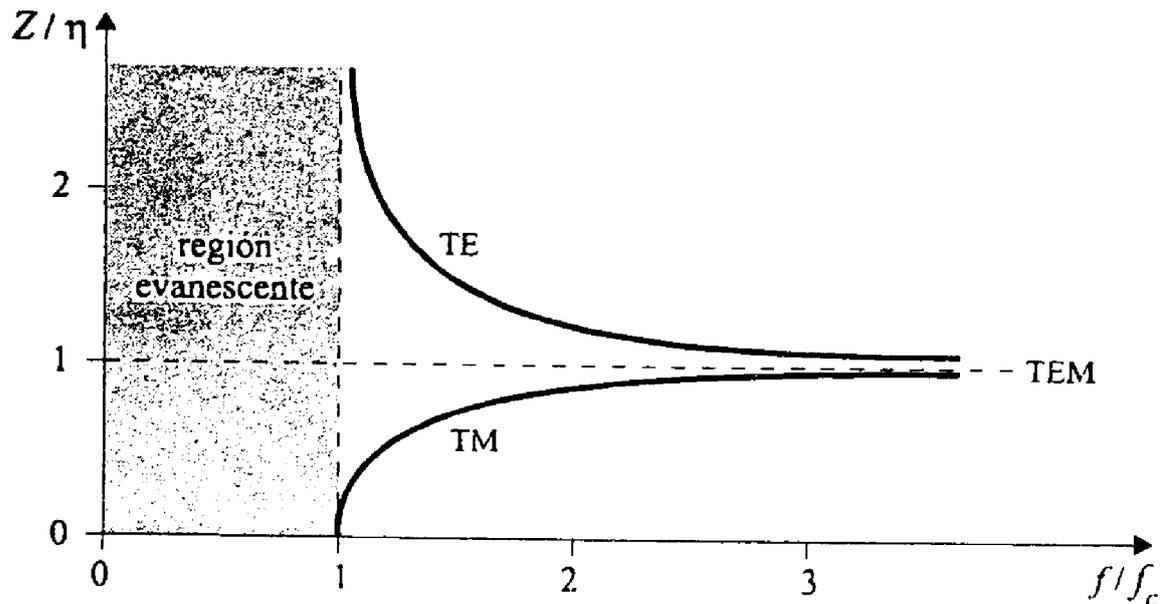


Fig. 4-10 Gráfica típica de la impedancia de onda normalizada para los modos de propagación TE y TM, en general y para un medio sin pérdidas.

Para frecuencias inferiores a la frecuencia de corte, las impedancias de onda correspondientes para los modos TE y TM son reactivas puras (no se muestran en la gráfica), por lo que no puede haber flujo de potencia ni propagación. A esta región se le llama *evanescente*.

**Ejercicio 4-11** Para un sistema de dos placas paralelas, demuestre la validez de las ecs (4-92) y (4-93). A continuación grafique las impedancias de onda para los modos  $TE_1$ ,  $TM_1$ ,  $TE_3$  y  $TM_3$  del Ejercicio 4-10. Suponga que el medio entre las dos placas es aire.

### Solución

De acuerdo con el sistema de coordenadas de la Fig. 4-3 y con la ec. (4-78), se observa que la impedancia debe definirse en términos de las ecs. (4-77) y (4-79), que corresponden a los campos transversales de la onda que viaja en la dirección positiva de  $z$ . Es decir:

$$Z_{TE} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu a n \pi}{n \pi \gamma_n a}$$

Ahora bien,  $\gamma_n$  está dada por la ec. (4-76):

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} Z_{TE} &= \frac{j\omega\mu}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}} = \frac{j\omega\mu}{\omega\sqrt{-\mu\epsilon + \left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2}} \\ &= \frac{j\mu}{\sqrt{\mu\epsilon\left[\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2\left(\frac{1}{\mu\epsilon}\right) - 1\right]}} = \left(j\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2 - 1}}\right) \end{aligned}$$

y como  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  y  $f_c = cn/2a$ :

$$\begin{aligned} Z_{TE} &= \frac{j\eta}{\sqrt{\left(\frac{2\pi f_c}{\omega}\right)^2 - 1}} = \frac{j\eta}{\sqrt{\left(\frac{2\pi f_c}{2\pi f}\right)^2 - 1}} \\ &= \frac{j\eta}{\sqrt{[1 - (f_c/f)^2](-1)}} = \frac{\eta}{\sqrt{[1 - (f_c/f)^2]}} \end{aligned}$$

que concuerda con la ec. (4-92).

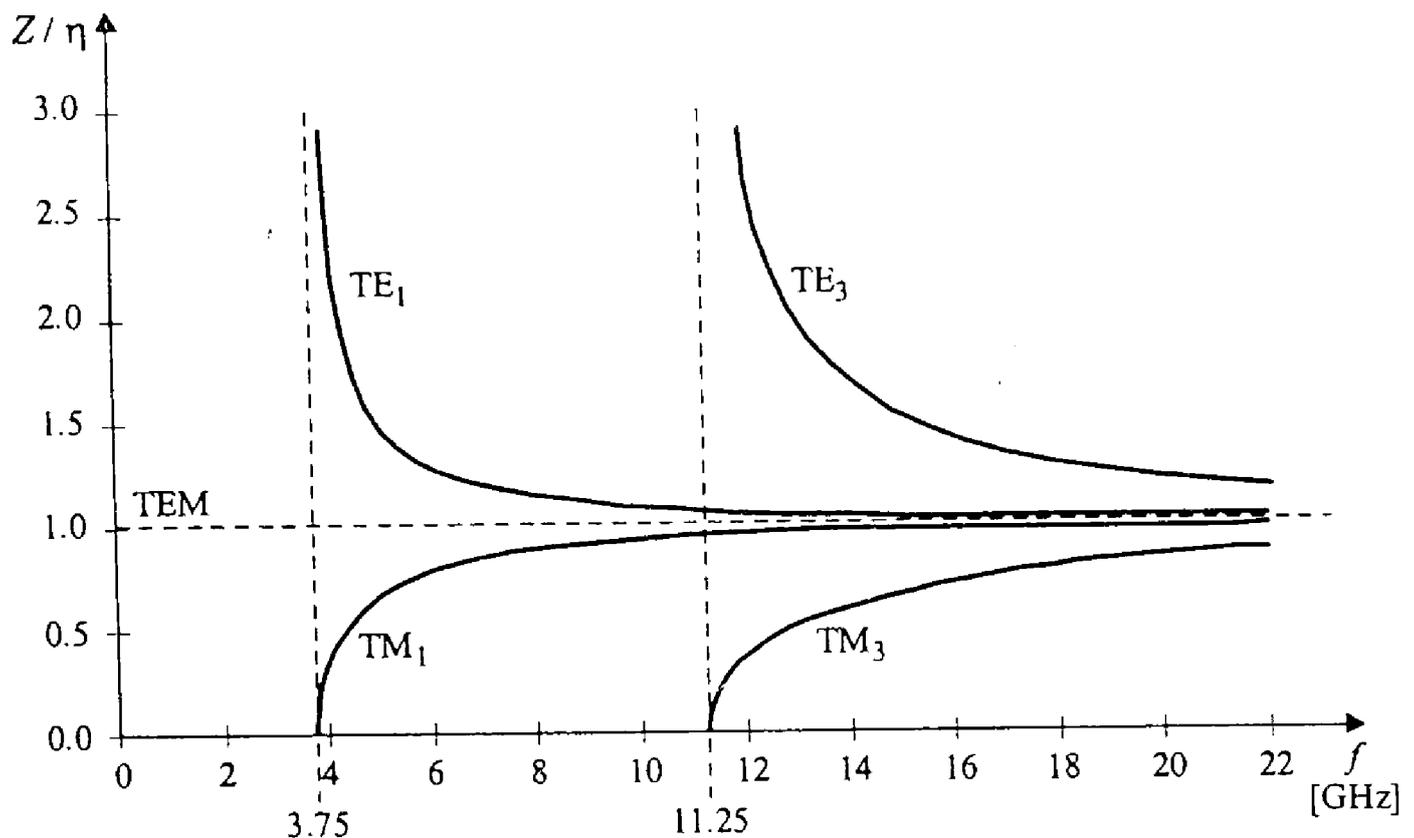
Siguiendo un procedimiento similar, el lector podrá fácilmente demostrar la validez de la ec. (4-93):

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$$

Las frecuencias de corte obtenidas en el Ejercicio 4-10 fueron:

$$f_{c_1} = 3.75 \text{ GHz} \quad f_{c_3} = 11.25 \text{ GHz}$$

y las gráficas pedidas son:



## 4.8 Guías rectangulares

Los conceptos generales vistos en las secciones anteriores de este capítulo facilitarán enormemente la comprensión de la operación de las guías rectangulares, circulares y elípticas. Los parámetros ya estudiados, como la frecuencia de corte para los modos TE y TM, la impedancia de onda y las velocidades de fase y de grupo también son aplicables a estas guías, aunque desde luego hay ligeras modificaciones, en función de la geometría de cada una en particular.

Hasta ahora, la propagación de las ondas electromagnéticas en una guía, a partir de una cierta frecuencia de corte, se ha considerado sin pérdidas

(constante de atenuación  $\alpha = 0$ ), ya que se ha supuesto que los conductores son perfectos. Sin embargo, en una guía práctica sí habrá atenuación, debida a las corrientes en las paredes metálicas y a las pérdidas en el dieléctrico que haya dentro de la guía.

El objetivo de esta sección es analizar el funcionamiento de las guías rectangulares y de sus cavidades correspondientes. Estas guías se utilizan más que las circulares o las elípticas, y se emplean en muchos sistemas prácticos de radiofrecuencia, por ejemplo, en equipos de microondas terrestres y de comunicaciones por satélite. Son fáciles de fabricar, su ancho de banda es muy grande y presentan pocas pérdidas en sus frecuencias comunes de operación.

Considérese que en la Fig. 4-3, correspondiente a un sistema de dos placas paralelas, la extensión de dichas placas a lo largo de la coordenada  $y$  es pequeña, menor o comparable a la separación  $a$ . Esta nueva situación ya no permite considerar que la variación de los campos con relación a  $y$  (es decir,  $\partial/\partial y$ ) pueda suponerse igual a cero. Si, además, se colocan dos placas paralelas adicionales separadas entre sí una distancia  $b$ , en posición vertical y en los extremos de la guía, se obtiene una guía rectangular como la de la Fig. 4-11. Al comparar ambas figuras, nótese que el sistema de coordenadas rectangulares es el mismo y sólo ha sido girado  $90^\circ$  sobre el eje  $z$ . Es fácil intuir en este punto que el análisis matemático será relativamente sencillo, porque gran parte de éste ya se ha hecho al principio del capítulo.

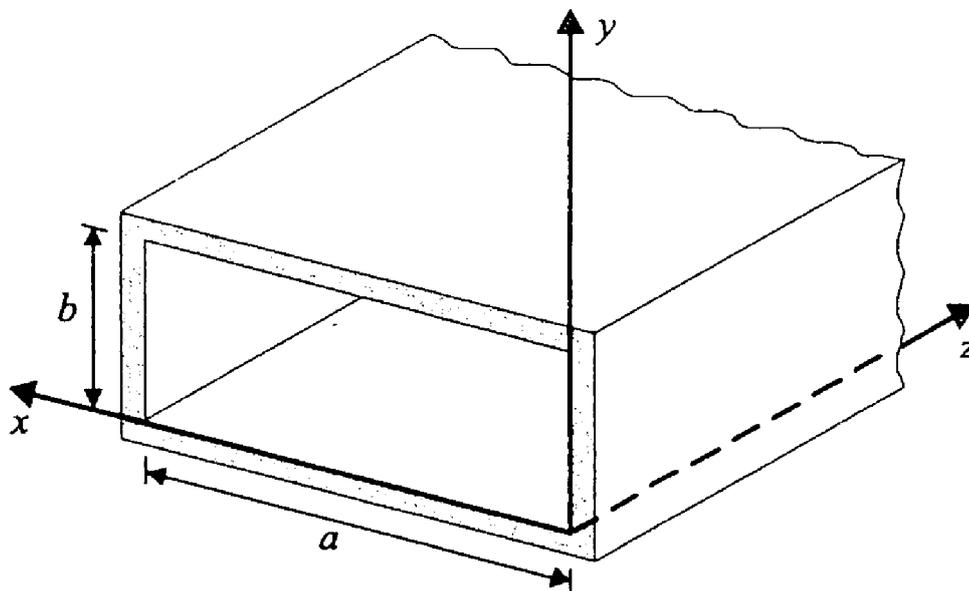


Fig. 4-11 Guía de ondas rectangular.

Suponiendo conductores perfectos inicialmente, las condiciones de frontera que deben cumplirse en las cuatro paredes son que el campo eléctrico tangencial valga cero y que el campo magnético normal también sea igual a cero.

En los conductores huecos (un solo conductor cerrado como la guía rectangular o la circular) no puede haber ondas TEM, porque para ello se necesita la existencia de un gradiente de potencial transversal. Dicho de otra forma, es imposible que haya líneas cerradas de campo magnético en cualquier plano transversal de la guía, y por lo tanto no hay onda TEM. Para entender mejor esto, se puede razonar al revés. Supóngase, entonces, que hay una onda TEM en el interior de la guía; esto quiere decir que las líneas de flujo de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  son trayectorias cerradas en un plano transversal al eje  $z$ . Sin embargo, la ley circuital de Ampere establece que la integral de línea cerrada del campo magnético en ese plano transversal debe ser igual a la suma de las corrientes longitudinales que pasan dentro de la trayectoria cerrada. Estas corrientes pueden ser de dos tipos: corriente de conducción y corriente de desplazamiento. Si no hay otro conductor dentro de la guía (en un cable coaxial sí lo hay, y por ello puede conducir una onda TEM), no puede haber corriente de conducción longitudinal. Por definición, la onda TEM no tiene componente  $E_z$ ; en consecuencia, tampoco hay corriente de desplazamiento longitudinal. Entonces, los dos tipos posibles de corriente valen cero, la integral de la ley circuital de Ampere vale cero, y no puede haber trayectorias cerradas de líneas de campo magnético en ningún plano transversal. Se concluye que la onda TEM no puede existir. Solamente habrá modos TE y TM. •

#### 4.8.1 Los modos TE

De la teoría general para los modos TE vista en la sección 4.3, la ecuación que debe resolverse es la (4-56):

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0 \quad = (4-56)$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver empleando el método de separación de variables, estableciendo que la solución sea el producto de tres funciones (una de  $x$ , una de  $y$ , y otra de  $z$ ):

$$H_z = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

La solución general resulta ser de la forma:

$$H_z = \underbrace{[A \cos px + B \operatorname{sen} px]}_{f_1(x)} \underbrace{[C \cos qy + D \operatorname{sen} qy]}_{f_2(y)} \underbrace{e^{-\gamma z}}_{f_3(z)} \quad (4-94)$$

Al diferenciar y sustituir esta solución en la ec. (4-56), se obtiene la siguiente relación que debe ser satisfecha:

$$(p^2 + q^2) = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (4-95)$$

Esta última relación es parecida a la ec. (4-70) que se obtuvo en el caso de las placas paralelas, de donde se intuye que los valores discretos de  $p$  y  $q$  definirán el orden del modo TE.

Conocida  $H_z$ , las componentes  $H_x$  y  $H_y$  se pueden obtener, respectivamente, de las ecs. (4-55) y (4-54):

$$H_x = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad = (4-55)$$

$$H_y = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad = (4-54)$$

Las condiciones de frontera exigen que el campo magnético normal a las paredes izquierda y derecha de la Fig. 4-11 sea igual a cero. Es decir,  $H_x = 0$  en  $x = 0$  y  $x = a$ , que es lo mismo que  $\partial H_z / \partial x = 0$  en  $x = 0$  y  $x = a$ . Igualmente, para las paredes inferior y superior de la misma figura debe cumplirse que  $H_y = 0$  en  $y = 0$  y  $y = b$ , que a partir de la ec. (4-54) es lo mismo que  $\partial H_z / \partial y = 0$  en  $y = 0$  y  $y = b$ . Efectuando las diferenciaciones correspondientes sobre la ec. (4-94) se tiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = p \uparrow [-A \operatorname{sen} px + B \cos px] [C \cos qy + D \operatorname{sen} qy] e^{-\gamma z} \quad (4-96)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = q [A \cos px + B \operatorname{sen} px] [-C \operatorname{sen} qy + D \cos qy] e^{-\gamma z} \quad (4-97)$$

Las condiciones impuestas para  $x = 0$  sustituidas en las dos ecuaciones anteriores conducen a

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 = p[B][C \cos qy + D \operatorname{sen} qy] e^{-\gamma z}$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 = q[A \cos px + B \operatorname{sen} px][D] e^{-\gamma z}$$

de donde se concluye que  $B = D = 0$ . Entonces, las ecs. (4-96) y (4-97) se reducen a:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -pAC(\operatorname{sen} px)(\cos qy) e^{-\gamma z} \quad (4-98)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -qAC(\cos px)(\operatorname{sen} qy) e^{-\gamma z} \quad (4-99)$$

Si ahora se sustituyen las condiciones de frontera para  $x = a$  y  $y = b$  en las ecs. (4-98) y (4-99), igualándolas a cero, se observa que la única posibilidad para que existan soluciones es que:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} pa = 0$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} qb = 0$$

Como  $a$  y  $b$  no pueden valer cero (no habría guía), se concluye que  $p$  y  $q$  sólo pueden tener valores discretos:

$$p = m \left( \frac{\pi}{a} \right) \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$q = n \left( \frac{\pi}{b} \right) \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

de donde, al sustituir los resultados obtenidos en la ec. (4-94), la solución final buscada es:

$$H_z = \left[ A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right] \left[ C \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right] e^{-\gamma z} \quad (4-100)$$

en donde A y C son constantes, cuyo producto puede combinarse en una nueva y única constante  $A_0$ .

A partir de la ec. (4-100) se pueden encontrar las demás componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  usando las ecs. (4-55), (4-54), (4-51) y (4-50). El resultado final, haciendo  $\gamma = j\beta$ , es:

$$H_{x_{mn}} = \left[ \frac{j A_0 \beta \frac{m\pi}{a}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right] \left( \text{sen} \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \cos \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_{y_{mn}} = \left[ \frac{j A_0 \beta \frac{n\pi}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right] \left( \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \text{sen} \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$
(4-101)

$$H_{z_{mn}} = A_0 \left( \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \cos \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$

$$E_{x_{mn}} = \frac{\omega\mu}{\beta} H_{y_{mn}}$$

$$E_{y_{mn}} = - \frac{\omega\mu}{\beta} H_{x_{mn}}$$

$$E_{z_{mn}} = 0 \quad (\text{condición para los modos TE}_{mn})$$

En teoría, dentro de la guía rectangular puede haber un número infinito de distribuciones de campo, o modos, de acuerdo con todas las combinaciones posibles para los valores discretos de  $m$  y  $n$  ( $= 0, 1, 2, 3, \dots$ ) sustituidos en el conjunto de ecuaciones (4-101). En la Fig. 4-12 se muestran las distribuciones o patrones de los campos en la sección transversal de la guía para los modos  $TE_{10}$  ( $m = 1, n = 0$ ) y  $TE_{11}$  ( $m = 1, n = 1$ ).

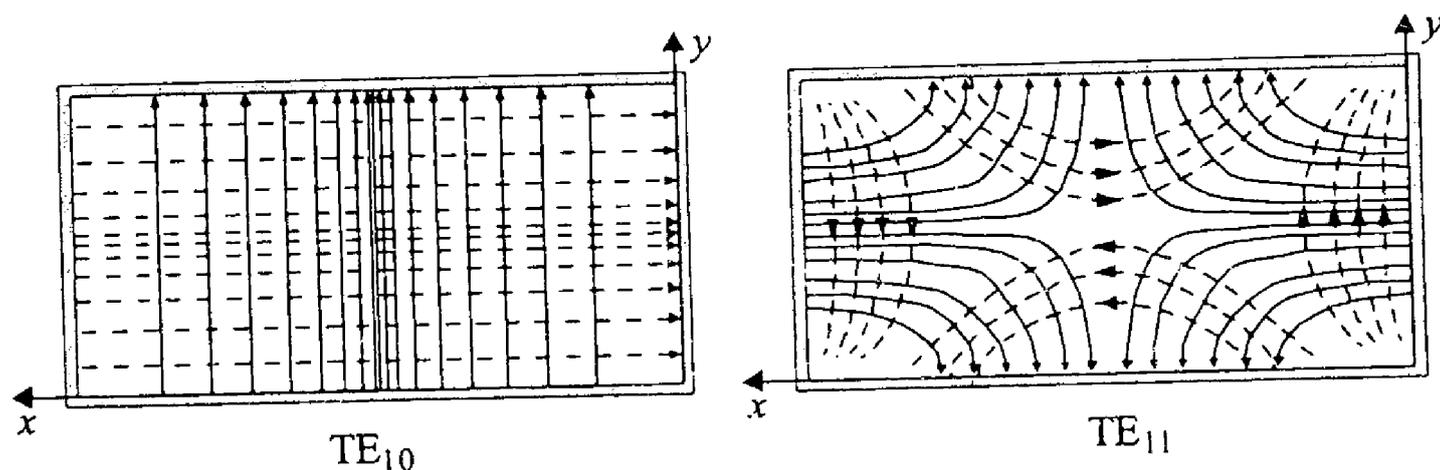


Fig. 4-12 Patrones de campo eléctrico (rayas continuas) y campo magnético (rayas punteadas) de los modos de propagación  $TE_{10}$  y  $TE_{11}$  en una guía rectangular. El patrón del modo  $TE_{01}$  se muestra en la Fig. 1-16.

Al igual que en el caso de las placas paralelas, cada modo comienza a existir a partir de su frecuencia de corte correspondiente, tiene su propia impedancia de onda, y se propaga con sus respectivas velocidades de fase y de grupo, así como su constante de fase. La condición impuesta por la ec. (4-95) y los valores discretos permitidos para  $p$  y  $q$  determinan que:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

o bien:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} \quad (4-102)$$

Para que la onda TE sea progresiva, y debe ser imaginaria pura. Es decir, debe cumplirse que  $\omega^2 \mu \epsilon > (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ . Si  $\gamma$  es real, la operación de la guía se encontrará en una región evanescente y no habrá propagación. El punto de transición y la frecuencia angular  $\omega_c$  correspondiente para que se inicie la propagación se obtiene igualando la ec. (4-102) a cero:

$$\omega_{c_{mn}}^2 = (2\pi f_{c_{mn}})^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]$$

de donde la frecuencia de corte para el modo  $TE_{mn}$  está dada por

$$f_{c_{mn}} = \frac{v}{2} \sqrt{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2} \quad (4-103)$$

ya que  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  (velocidad de una onda plana en un medio sin fronteras).

Sustituyendo la ec. (4-103) en la ec. (4-102) con el radicando negativo y utilizando un poco de álgebra, la constante de propagación se puede calcular en función de la frecuencia de corte, para frecuencias en las que la onda es progresiva:

$$\gamma_{mn} = j\beta_{mn} = j \left( \frac{2\pi}{v} \right) \sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2} \quad f > f_{c_{mn}} \quad (4-104)$$

Recordando que la velocidad de fase es igual a  $\omega/\beta$ , para los modos  $TE_{mn}$  se calcula como:

$$v_{p_{mn}} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = v \left[ \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2}} \right] \quad (4-105)$$

Para  $f > f_{c_{mn}}$ , la cantidad entre paréntesis en la ec. (4-105) siempre será mayor que la unidad. Por lo tanto,  $v_{p_{mn}} > v$ .

Por lo que se refiere a la longitud de onda en la guía,  $\lambda_g$ , ésta se calcula como:

$$\lambda_{g_{mn}} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{v_{p_{mn}}}{f} \quad (4-106)$$

y como  $v_{p_{mn}} > v$ ,  $\lambda_{g_{mn}}$  siempre es mayor que la longitud de onda  $\lambda$  que tendría una onda plana (TEM) en el mismo medio.

A partir de la ec. (4-103) se puede obtener fácilmente la longitud de onda de corte:

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (4-107)$$

que junto con  $\lambda$  y  $\lambda_g$  satisface la relación

$$\frac{1}{\lambda_{c_{mn}}^2} + \frac{1}{\lambda_{g_{mn}}^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4-108)$$

que es idéntica a la ec. (4-67) deducida para las placas paralelas, considerando un material cualquiera de propagación.

Asimismo,  $\lambda_g$  puede escribirse en términos de  $\lambda$  y  $\lambda_c$  como:

$$\lambda_{g_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c_{mn}}}\right)^2}} \quad (4-109)$$

Si la guía está llena de aire, la permitividad y la permeabilidad se pueden aproximar, respectivamente, por  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ , y entonces  $\lambda = \lambda_0$ .

Finalmente, la velocidad de grupo también puede obtenerse. Antes de hacerlo, es conveniente recordar que la velocidad de fase es un concepto que se aplica a ondas senoidales de una sola frecuencia o monocromáticas; esta velocidad depende alinealmente de la frecuencia, como lo indica la ec. (4-105), pero a una cierta frecuencia dada (por ejemplo, una frecuencia portadora), su valor es único. Sin embargo, si lo que se desea transmitir a lo

largo de la guía es una señal modulada (que es la realidad en la práctica), ésta se puede considerar como la superposición de Fourier de una gran cantidad de ondas senoidales con distintas frecuencias, que juntas constituyen a la onda modulada. Cada componente senoidal, que tiene su propia frecuencia, viajará con una velocidad de fase distinta a la de las demás componentes. Esta situación inevitable lleva a la definición del concepto de velocidad de grupo, que ya fue tratado en la sección 4.6, y tiene validez y un significado preciso sólo si la frecuencia de la portadora es muchísimo más elevada en comparación con el ancho de banda de frecuencias ocupado por la señal modulada, lo cual se cumple en las transmisiones típicas de microondas. El efecto que se tiene es que la envolvente de la onda modulada parece rezagarse o “quedarse atrás” con relación a la portadora; mientras que la portadora viaja a una velocidad aparente  $v_p$ , la envolvente lo hace a una velocidad  $v_g$ , en donde  $v_p > c > v_g$ , cumpliéndose la ec. (4-86). Para la guía rectangular, la velocidad de grupo se puede calcular, de acuerdo con lo visto en la sección 4.6, como:

$$v_g = \frac{1}{\partial\beta/\partial\omega} \quad = (4-85)$$

Sustituyendo  $\beta_{mn}$  de la ec. (4-104) con  $f = \omega/2\pi$ , en la ec. (4-85), se tiene

$$\begin{aligned} v_{g_{mn}} &= v \left[ \frac{\partial}{\partial\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_{c_{mn}}^2} \right]^{-1} \\ &= v \left[ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{c_{mn}}^2}} \right]^{-1} \\ &= v \sqrt{1 - (\omega_{c_{mn}}/\omega)^2} \end{aligned}$$

de donde, en términos de la frecuencia de corte:

$$v_{g_{mn}} = v \sqrt{1 - (f_{c_{mn}}/f)^2} \quad (4-110)$$

Como la frecuencia de corte siempre será menor que la frecuencia de operación, el radical de la ec. (4-110) siempre será menor que la unidad y  $v_{g_{mn}} < v$ . Si las ecs. (4-105) y (4-110) se multiplican, se comprueba que el producto de la velocidad de fase por la velocidad de grupo es igual al cuadrado de la velocidad en un medio ilimitado:

$$v_p v_g = v^2 \quad (4-111)$$

**Ejercicio 4-12** Una guía rectangular llena de aire tiene dimensiones internas de 10 x 5 cm y transporta una señal senoidal con frecuencia de 4.5 GHz. Encuentre cuántos modos TE diferentes se propagan en la guía, así como la constante de fase, la velocidad de fase, la longitud de onda en la guía y la impedancia de onda para cada modo a esa frecuencia de transmisión.

### Solución

Primero hay que encontrar las frecuencias de corte de los primeros modos, para ver cuáles están por debajo de los 4.5 GHz. Como la guía tiene aire en su interior,  $v = c = 3 \times 10^8$  m/seg. De la ec. (4-103):

$$f_{c_{10}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{0.1}\right)^2} = 1.5 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{01}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{0.05}\right)^2} = 3 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{11}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{10^2 + 20^2} = 3.35 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{20}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{0.1}\right)^2} = 3 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{02}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{0.05}\right)^2} = 6 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{21}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{0.1}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.05}\right)^2} = 4.24 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{12}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{0.1}\right)^2 + \left(\frac{2}{0.05}\right)^2} = 6.18 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{22}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{0.1}\right)^2 + \left(\frac{2}{0.05}\right)^2} = 6.7 \text{ GHz}$$

Los modos TE que se propagan son entonces  $TE_{10}$ ,  $TE_{01}$ ,  $TE_{20}$ ,  $TE_{11}$  y  $TE_{21}$ .

Como paso siguiente, la constante de fase se calcula usando la ec. (4-104):

$$\beta_{10} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 1.5^2} \times 10^9 = 88.86 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{01} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 3^2} \times 10^9 = 70.25 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{20} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 3^2} \times 10^9 = 70.25 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{11} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 3.35^2} \times 10^9 = 62.93 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{21} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 4.24^2} \times 10^9 = 31.57 \text{ rad/m}$$

La velocidad de fase se obtiene ahora con la ec. (4-105):

$$v_{p_{10}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{10}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{88.86} = 3.18 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{p_{01}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{01}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{70.25} = 4.02 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{p_{20}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{20}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{70.25} = 4.02 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{p_{11}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{11}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{62.93} = 4.49 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{p_{21}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{21}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{31.57} = 8.95 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

La longitud de onda en la guía está dada por la *ec. (4-106)*:

$$\lambda_{g_{10}} = \frac{2\pi}{\beta_{10}} = \frac{2\pi}{88.86} = 7.07 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_{01}} = \frac{2\pi}{\beta_{01}} = \frac{2\pi}{70.25} = 8.94 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_{20}} = \frac{2\pi}{\beta_{20}} = \frac{2\pi}{70.25} = 8.94 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_{11}} = \frac{2\pi}{\beta_{11}} = \frac{2\pi}{62.93} = 9.98 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_{21}} = \frac{2\pi}{\beta_{21}} = \frac{2\pi}{31.57} = 19.9 \text{ cm}$$

Finalmente, del sistema de *ecs. (4-101)* se observa que la relación entre las magnitudes de las componentes transversales  $E_x$  y  $H_y$  es igual a:

$$Z_{TE_{mn}} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} = \mu v_{p_{mn}}$$

lo cual coincide con la definición general dada por la ec. (4-90), y como  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m:

$$Z_{TE_{10}} = 4\pi \times 10^{-7} \times v_{p_{10}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 3.18 \times 10^8 = 399.85 \Omega$$

$$Z_{TE_{01}} = 4\pi \times 10^{-7} \times v_{p_{01}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 4.02 \times 10^8 = 505.78 \Omega$$

$$Z_{TE_{20}} = 4\pi \times 10^{-7} \times v_{p_{20}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 4.02 \times 10^8 = 505.78 \Omega$$

$$Z_{TE_{11}} = 4\pi \times 10^{-7} \times v_{p_{11}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 4.49 \times 10^8 = 564.62 \Omega$$

$$Z_{TE_{21}} = 4\pi \times 10^{-7} \times v_{p_{21}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 8.95 \times 10^8 = 1,125.38 \Omega$$

Con fines de comparación, resulta ilustrativo concentrar todos los resultados anteriores en la tabla siguiente.

modo	$f_c$ (GHz)	$\beta$ (rad/m)	$v_p$ ( $\times 10^8$ m/seg)	$\lambda_g$ (cm)	Z ( $\Omega$ )
TE <sub>10</sub>	1.50	88.86	3.18	7.07	399.85
TE <sub>01</sub>	3.00	70.25	4.02	8.94	505.78
TE <sub>20</sub>	3.00	70.25	4.02	8.94	505.78
TE <sub>11</sub>	3.35	62.93	4.49	9.98	564.62
TE <sub>21</sub>	4.24	31.57	8.95	19.9	1,125.38
$f = 4.5$ GHz $\mu = \mu_0$ $\epsilon = \epsilon_0$					

**Ejercicio 4-13** Para la misma guía del Ejercicio 4-12, considere los modos de propagación TE<sub>10</sub> y TE<sub>01</sub>. Grafique el comportamiento de sus impedancias de onda en función de la frecuencia. Posteriormente, suponga que la guía transporta una señal modulada cuya banda es lo suficientemente

angosta y la frecuencia de la portadora es 4.5 GHz, y calcule la velocidad de grupo para ambos modos.

### Solución

La impedancia de onda para los modos TE, que es la función que se desea graficar, está dada por:

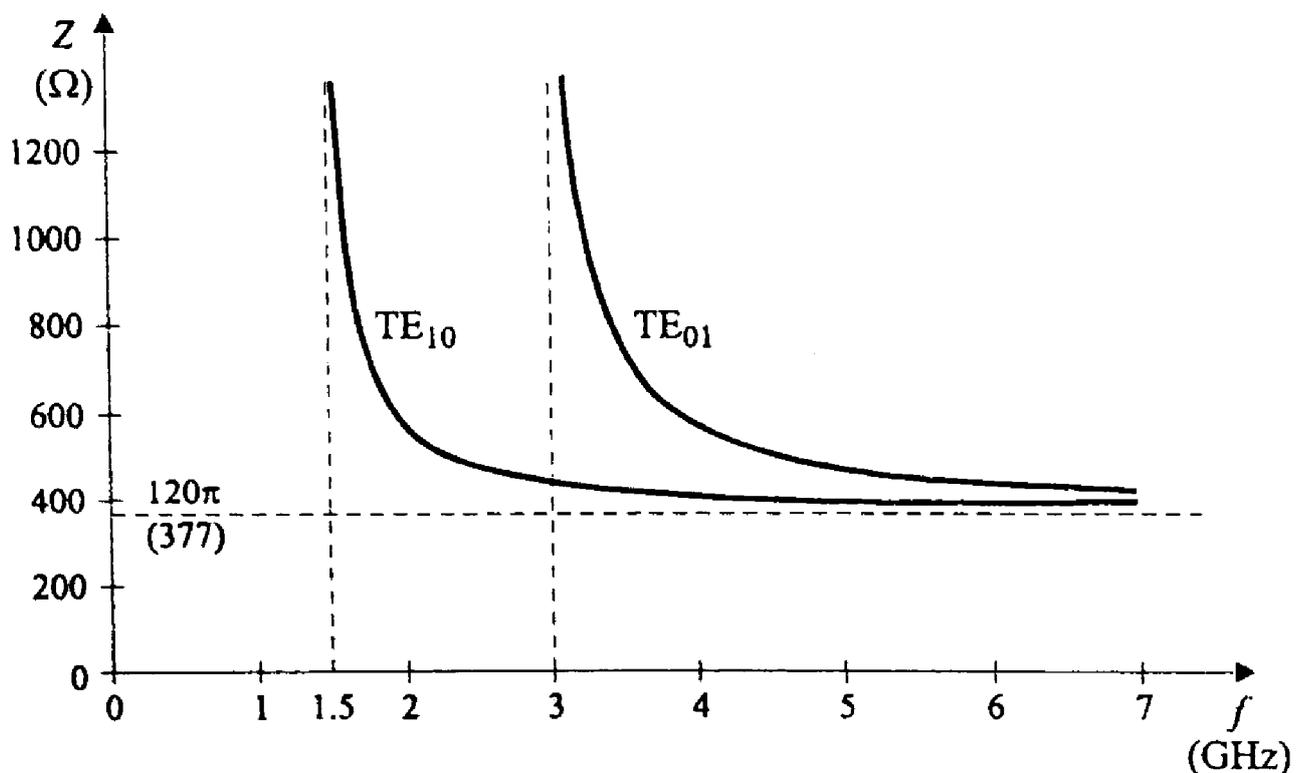
$$Z_{TE_{mn}} = \frac{2\pi f \mu \nu}{2\pi \sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2}} = \frac{\mu \nu}{\sqrt{1 - (f_{c_{mn}}/f)^2}}$$

en donde  $\mu \nu = \frac{\mu}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta = 120\pi \Omega$ , y por lo tanto:

$$Z_{TE_{10}} = \eta \left[ 1 - \frac{1.5}{f} \right]^{-1/2} \quad \text{con } f \text{ en GHz}$$

$$\text{y } Z_{TE_{01}} = \eta \left[ 1 - \frac{3.0}{f} \right]^{-1/2} \quad \text{con } f \text{ en GHz}$$

La gráfica de estas dos funciones se muestra a continuación:



La velocidad de grupo se calcula con la ec. (4-110):

$$v_{g_{10}} = 3 \times 10^8 \sqrt{1 - (1.5/4.5)^2} = 2.83 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{g_{01}} = 3 \times 10^8 \sqrt{1 - (3.0/4.5)^2} = 2.24 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

#### 4.8.2 Los modos TM — 10 de 11 —

Ahora la ecuación que hay que resolver, con las condiciones apropiadas de frontera, es la ec. (4-57), que es similar a la ec. (4-56) de los modos TE, sólo que en lugar de  $H_z$  se tiene a la variable desconocida  $E_z$ . Por lo tanto, la solución general para los modos TM también será de la misma forma que la ec. (4-94) de los modos TE, y también debe satisfacerse la relación dada por la ec. (4-95). Es decir:

$$E_z = \underbrace{[A \cos px + B \operatorname{sen} px]}_{f_1(x)} \underbrace{[C \cos qy + D \operatorname{sen} qy]}_{f_2(y)} e^{-\gamma z} \quad (4-112)$$

con  $(p^2 + q^2) = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad = (4-95)$

La aplicación de las condiciones de frontera es más sencilla que para el caso de los modos TE. Simplemente, debe garantizarse que  $E_z$  valga cero en las cuatro paredes de la guía. Si no fuese igual a cero, sería tangencial a los conductores. Por tanto:

$$E_z = 0 \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \\ y = 0 \\ y = b \end{array} \quad (4-113)$$

Al sustituir las condiciones (4-113) para  $x = y = 0$  en la ec. (4-112), ignorando el término  $e^{-\gamma z}$ , se obtiene rápidamente que

$$E_z \Big|_{x=0} = 0 = A [C \cos qy + D \operatorname{sen} qy] \Rightarrow A = 0$$

$$E_z \Big|_{y=0} = 0 = C[A \cos px + B \operatorname{sen} px] \Rightarrow C = 0$$

La solución (4-112) se reduce entonces a:

$$E_z = (B \operatorname{sen} px)(D \operatorname{sen} qy) e^{-\gamma z}.$$

Rebautizando el producto de las constantes B y D por una sola constante A, la ecuación anterior queda como:

$$E_z = A(\operatorname{sen} px)(\operatorname{sen} qy) e^{-\gamma z} \quad (4-114)$$

Esta es la solución buscada para los modos TM. Las constantes  $p$  y  $q$  se obtienen aplicando, respectivamente, las condiciones de frontera restantes (es decir,  $E_z = 0$  en  $x = a$  y  $y = b$ ). Por lo tanto, ignorando otra vez y por el momento al término  $e^{-\gamma z}$ :

$$E_z \Big|_{x=a} = 0 = A(\operatorname{sen} pa)(\operatorname{sen} qy) \Rightarrow pa = m\pi$$

por lo que 
$$p = \frac{m\pi}{a} \quad m = 1, 2, \dots \quad (4-115)$$

$$E_z \Big|_{y=b} = 0 = A(\operatorname{sen} px)(\operatorname{sen} qb) \Rightarrow qb = n\pi$$

por lo que 
$$q = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4-116)$$

Las relaciones (4-115) y (4-116) son idénticas a las encontradas para los valores de  $p$  y  $q$  en los modos TE de la sección anterior, y la relación (4-95) es la misma que se debe cumplir en ambos casos. Esto revela de inmediato que la frecuencia de corte de un modo  $\text{TM}_{mn}$  es exactamente igual a la del modo  $\text{TE}_{mn}$ , para valores idénticos de  $m$  y  $n$ . Por lo que se refiere a la constante de fase, cuando  $\gamma$  es puramente imaginaria y hay propagación dentro de la guía, la misma relación (4-95) indica que los modos  $\text{TE}_{mn}$  y

$TM_{mn}$  tienen el mismo valor para  $\beta$ . Si  $\beta$  es la misma, la velocidad de fase también es igual, a una frecuencia dada. La misma similitud se concluye para la longitud de onda en la guía ( $\lambda_g$ ), la longitud de onda de corte ( $\lambda_c$ ) y la velocidad de grupo ( $v_g$ ). Por lo tanto, para los modos  $TM_{mn}$  se aplican las mismas ecuaciones, que por comodidad se repiten a continuación:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad = (4-102)$$

O bien:

$$\beta_{mn} = \left(\frac{2\pi}{v}\right) \sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2} \quad = (4-104)$$

$$f_{c_{mn}} = \frac{v'}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad = (4-103)$$

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \end{aligned}$$

$$v_{p_{mn}} = v \left[ \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2}} \right] \quad = (4-105)$$

$$\lambda_{g_{mn}} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{v_{p_{mn}}}{f} \quad = (4-106)$$

$$\lambda_{c_{mn}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad = (4-107)$$

$$v_{g_{mn}} = v \sqrt{1 - (f_{c_{mn}}/f)^2} \quad = (4-110)$$

Es lógico que, aun cuando los parámetros anteriores son iguales para los modos  $TE_{mn}$  y  $TM_{mn}$ , sus distribuciones de campo difieren. La ec. (4-114) da la expresión matemática para la componente  $E_z$ . Derivando ésta con relación a  $x$  y  $y$ , y sustituyendo en las ecs. (4-58) y (4-59), se obtienen las componentes  $E_x$  y  $E_y$ . Finalmente, las ecs. (4-60) y (4-61) se pueden utilizar

para encontrar las dos componentes restantes,  $H_x$  y  $H_y$ . La solución completa fasorial para los campos de los modos  $TM_{mn}$  resulta ser entonces:

$$E_{x_{mn}} = \left[ \frac{-j A \beta \frac{m\pi}{a}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right] \left( \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$

$$E_{y_{mn}} = \left[ \frac{-j A \beta \frac{n\pi}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right] \left( \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \cos \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z} \quad (4-117)$$

$$E_{z_{mn}} = A \left( \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_{x_{mn}} = - \frac{\omega \epsilon}{\beta} E_{y_{mn}}$$

$$H_{y_{mn}} = \frac{\omega \epsilon}{\beta} E_{x_{mn}}$$

$$H_{z_{mn}} = 0 \quad (\text{condición para los modos } TM_{mn})$$

Debe notarse que si  $m$  o  $n$  valen cero, la expresión para  $E_{z_{mn}}$  en el conjunto de *ecs.* (4-117) se vuelve idéntica a cero. Esto haría imposible la existencia de una onda TM en la guía, y por ello se descartaron anticipadamente los valores de  $n = 0$  y  $m = 0$  en las *ecs.* (4-115) y (4-116). Por lo tanto, el modo TM más bajo que puede propagarse en una guía rectangular es el  $TM_{11}$ . En cambio, como ya se vió en la sección anterior para los modos TE,  $m$  o  $n$  sí pueden valer cero y los modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{01}$ ,  $TE_{20}$ , etc., sí existen. En la Fig. 4-13 se muestran los patrones de los campos eléctrico y magnético correspondientes a los modos  $TM_{11}$  y  $TM_{21}$ .

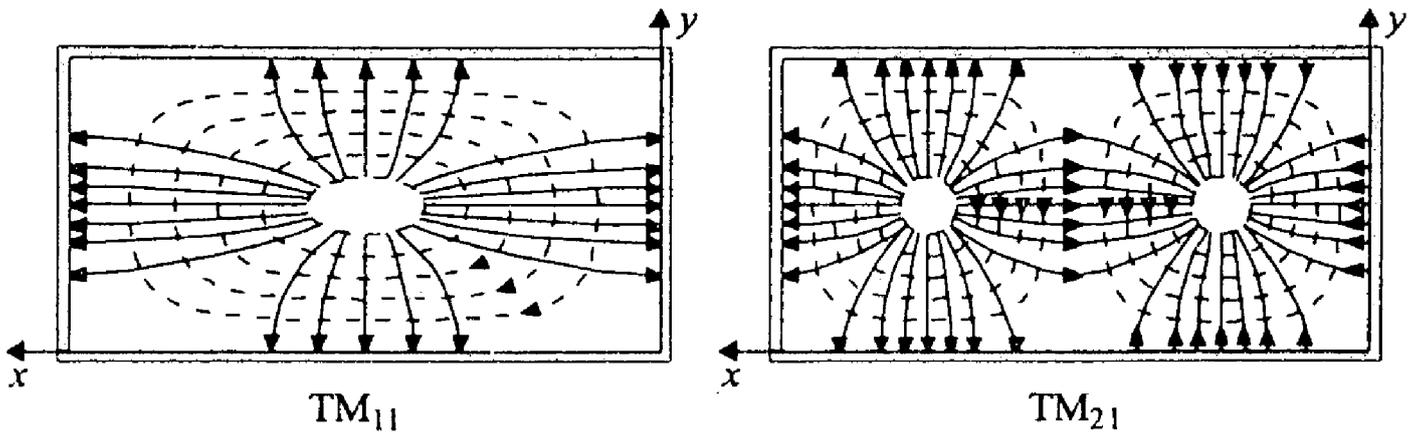


Fig. 4-13 Patrones de campo eléctrico (—) y campo magnético (- - -) de los modos de propagación  $TM_{11}$  y  $TM_{21}$  en una guía rectangular.

En cuanto a la impedancia de onda para estos modos, su variación con la frecuencia está dada por la ec. (4-91), haciendo  $\gamma = j\beta$  en el rango de propagación:

$$Z_{TM_{mn}} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\epsilon} \tag{4-118}$$

Y en términos de la frecuencia de corte, la misma impedancia puede calcularse como

$$Z_{TM_{mn}} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2} \tag{4-93}$$

La forma de su gráfica correspondiente, a partir de la frecuencia de corte para cada modo, es similar a la mostrada en la Fig. 4-10.

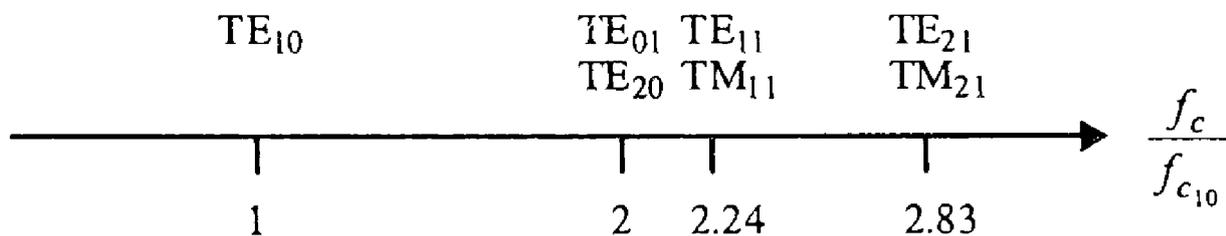
**Ejercicio 4-14** Considere una guía rectangular cualquiera cuyas dimensiones cumplen con la proporción  $a = 2b$  y está llena de aire. Encuentre la frecuencia de corte de los primeros siete modos que pueden propagarse en la guía, sean TE o TM. Normalice cada frecuencia de corte con relación a la más baja e indique cuál es la proporción del rango de frecuencias en el que únicamente se propaga el primer modo.

## Solución

La frecuencia de corte de ambos tipos de modos se calcula empleando la ec. (4-103):

Modo	$f_c$	frecuencia de corte normalizada con relación a la del modo $TE_{10}$
$TE_{10}$	$f_c = \frac{c}{2a} = (0.5) \frac{c}{a}$	1.00
$TE_{01}$ y $TE_{20}$	$f_c = \frac{c}{a} = (1) \frac{c}{a}$	2.00
$TE_{11}$ y $TM_{11}$	$f_c = (1.118) \frac{c}{a}$	2.24
$TE_{21}$ y $TM_{21}$	$f_c = (1.414) \frac{c}{a}$	2.83

En un eje de frecuencias de corte normalizadas, los resultados anteriores pueden representarse como sigue:



El primer modo de propagación es el  $TE_{10}$ , y éste es el único que se propaga en un rango de frecuencias de 2 : 1. Por ejemplo, si la frecuencia de corte de este primer modo fuese 1.5 GHz, la de los modos  $TE_{01}$  y  $TE_{20}$  sería de 3 GHz, y el ancho de banda con un solo modo presente sería igual a 1.5 GHz ( $1.5 \text{ GHz} < f < 3 \text{ GHz}$ ). A efectos de comparación, se recomienda repasar el Ejercicio 4-12, donde  $a = 2b$ .

### 4.8.3 El modo dominante y estándares de guías

En el ejercicio anterior se demostró que la frecuencia de corte más baja para una guía rectangular de dimensiones  $a = 2b$  corresponde al modo de propagación  $TE_{10}$ . En general, de acuerdo con la ec. (4-103), para toda guía que cumpla  $a > b$ , la frecuencia de corte más baja siempre se obtiene para  $m = 1$  con  $n = 0$  ( $TE_{10}$ ). Después sigue la de los modos para  $m = 2$  con  $n = 0$  ( $TE_{20}$ ) o  $m = 0$  con  $n = 1$  ( $TE_{01}$ ), o  $m = 1$  con  $n = 1$  ( $TE_{11}$  y  $TM_{11}$ ), dependiendo de las magnitudes relativas de  $a$  y  $b$ . O sea que siempre hay un rango de frecuencias en el que solamente se propaga un modo: el  $TE_{10}$ . Por tal razón, a este modo se le denomina *modo dominante*. La frecuencia de corte del modo dominante está dada, entonces, por la ecuación:

$$f_{c_{10}} = \frac{v}{2a} \quad (4-119)$$

y es independiente de la dimensión  $b$ .

En cualquier sistema de microondas, el número de modos que puede existir dentro de una guía rectangular depende de sus dimensiones  $a$  y  $b$ , del material que hay en su interior, y del dispositivo de excitación (fuente de microondas y frecuencia de operación) acoplado a la guía. Si la guía trabaja con varios modos a la vez, la potencia total se distribuye entre ellos, y al querer detectar dicha potencia al final de la línea, la operación se complica y encarece, debido a la instrumentación (sondas, detectores, etc.) que se requiere. Por ello, generalmente se prefiere trabajar una guía en un solo modo, es decir, en el modo dominante  $TE_{10}$ . Por lo que se refiere al dispositivo de excitación para iniciar la transmisión a lo largo de la guía, en general éste produce muchos modos simultáneamente, con potencias en distintas proporciones. Sin embargo, si la guía opera sólo en el modo  $TE_{10}$ , todos los demás modos superiores emitidos por la fuente de microondas son atenuados y no se propagan. Conviene entonces dedicar más atención al modo  $TE_{10}$  y examinar sus características más detalladamente.

Las guías rectangulares son muy útiles, porque tienen un ancho de banda muy grande dentro del cual sólo se propaga el modo dominante. Esto permite transmitir enormes cantidades de información a lo largo de la guía. Hay en el mercado un rango muy amplio de estándares, que tienen las dimensiones

adecuadas para trabajar en frecuencias desde los 300 MHz hasta los 300 GHz. En la Tabla 4-2 se muestran algunos de estos estándares.

**Tabla 4-2** Lista de algunos estándares para guías rectangulares y frecuencias de operación recomendadas en el modo dominante.

Designación		Dimensiones internas	Frecuencia de corte para el modo $TE_{10}$	Rango recomendado de frecuencias
EIA*	U.K.**	(a × b, cm)	(GHz)	(GHz)
WR 284	WG 10	7.214 × 3.404	2.080	2.60 a 3.95
WR 187	WG 12	4.755 × 2.215	3.155	3.95 a 5.85
WR 137	WG 14	3.485 × 1.580	4.285	5.85 a 8.20
WR 112	WG 15	2.850 × 1.262	5.26	7.05 a 10.0
WR 90	WG 16	2.286 × 1.016	6.56	8.2 a 12.4
WR 62	WG 18	1.580 × 0.7899	9.49	12.4 a 18.0
WR 42	WG 20	1.067 × 0.4318	14.08	18.0 a 26.5
WR 28	WG 22	0.7112 × 0.3556	21.1	26.5 a 40.0
WR 22	WG 23	0.569 × 0.2845	26.35	33.0 a 50.0

\* EIA = Electronic Industry Association, Estados Unidos.  
 \*\* U.K. = United Kingdom (Reino Unido).

Como puede apreciarse en la tabla, no se recomienda trabajar demasiado cerca de la frecuencia de corte del modo  $TE_{10}$ . Esto se debe a que la velocidad de fase cambia muy rápido cerca de dicha frecuencia. Además, es necesario mantener la operación de la guía por debajo de la frecuencia de corte del modo siguiente. En general, el rango de operación en la práctica comienza desde la frecuencia de corte del modo dominante más un 25%, aproximadamente, hasta la frecuencia de corte del modo siguiente menos un 25% (o sea, un 75% de la frecuencia de corte de ese modo).

**Ejercicio 4-15** Considere la guía estándar WG12 de la Tabla 4-2, llena de aire. Debajo de la frecuencia de corte, por ejemplo a 2.5 GHz, la propagación no es posible. ¿Cuánto vale la constante de atenuación  $\alpha$  a esta frecuencia, para el modo dominante?

### Solución

La constante  $\alpha$  puede obtenerse de la ec. (4-102) para cuando  $\gamma$  es puramente real:

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

Para el modo TE<sub>10</sub>, la ecuación anterior se reduce a:

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (2\pi)^2\mu\epsilon f^2}$$

Ahora bien, de acuerdo con la ec. (4-119):

$$f_{c_{10}} = \frac{v}{2a}$$

Por lo que

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi^2}{v^2} f_{c_{10}}^2 - 4\pi^2\mu\epsilon f^2}$$

y como  $\mu\epsilon = 1/v^2$ :

$$\alpha = \frac{2\pi}{v} \sqrt{f_{c_{10}}^2 - f^2}$$

La frecuencia de corte de la guía para el modo dominante es 3.155 GHz y  $v = c$ . Entonces:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{(3.155 \times 10^9)^2 - (2.5 \times 10^9)^2}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \sqrt{370.4} = 40.3 \text{ Np/m}$$

y empleando la ec. (2-18):

$$\alpha = 350 \text{ dB/m}$$

Esta atenuación es tan grande, que se demuestra que una onda a una frecuencia inferior a la de corte no puede llegar a ninguna parte en una línea práctica.

**Ejercicio 4-16** Para la misma guía del ejercicio anterior, grafique la velocidad de fase y la velocidad de grupo del modo dominante, en función de la frecuencia.

### Solución

La velocidad de fase se calcula empleando la ec. (4-105):

$$v_{p_{mn}} = v \left[ \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2}} \right]$$

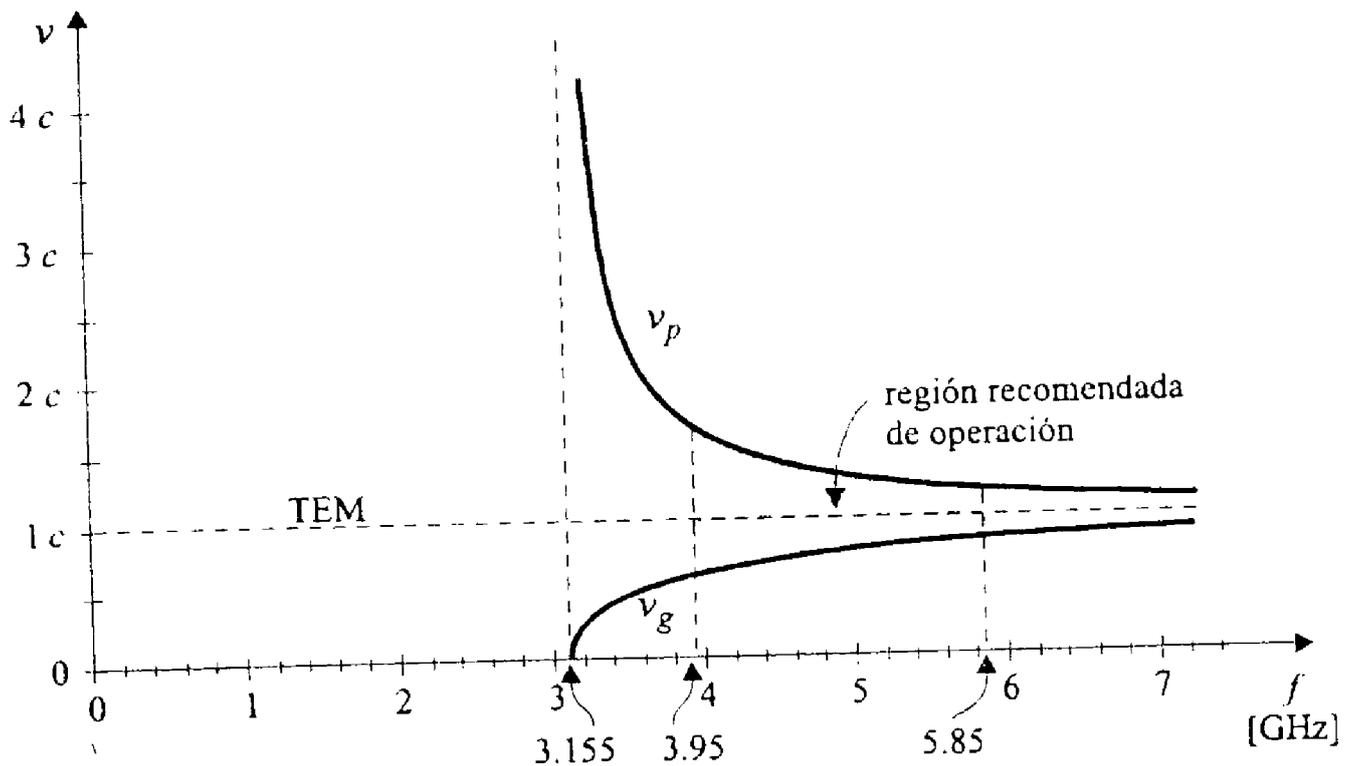
Para el modo dominante de la guía WG12, la frecuencia de corte es 3.155 GHz. Para la gráfica pedida, conviene comparar la velocidad de fase con relación a la velocidad  $v$ , que en este caso es igual a la de la luz. La ecuación anterior queda entonces como:

$$v_{p_{10}} = c \left[ \frac{f}{\sqrt{f^2 - (3.155 \times 10^9)^2}} \right]$$

Para calcular la velocidad de grupo, se emplea la ec. (4-110), con  $v = c$ :

$$v_{g_{10}} = c \sqrt{1 - (f_{c_{10}}/f)^2}$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores se obtienen las gráficas siguientes para el modo dominante  $TE_{10}$ :



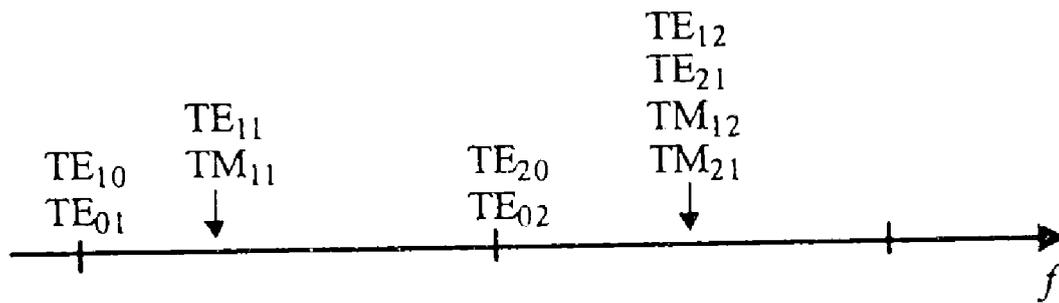
#### 4.8.4 Modos degenerados

A reserva de continuar estudiando las características del modo dominante  $TE_{10}$  en una guía rectangular, conviene efectuar un paréntesis para hacer mención en esta sección de la existencia de modos degenerados y la imposibilidad de que haya un modo dominante en determinados tipos de guías.

Considérese una guía cuadrada, en la que  $a = b$ . Una inspección rápida de la ec. (4-103) revela que la frecuencia de corte de los modos  $TE_{mn}$  siempre es la misma que la de los modos  $TE_{nm}$ . Esto impide que haya un modo dominante. De hecho, la distribución de los campos del modo  $TE_{mn}$  sólo difiere de la distribución de los campos del modo  $TE_{nm}$  por una simple rotación de  $90^\circ$  de la guía sobre su eje longitudinal, pues  $a$  toma el lugar de

$b$ , y viceversa. A los modos que tienen la misma frecuencia de corte se les llama *degenerados*, y no son deseables porque son susceptibles al acoplamiento de modos e interferencias.

El orden de aparición de los modos degenerados TE y TM de una guía cuadrada se muestra a continuación, para los primeros modos.



#### 4.8.5 Corrientes en las paredes

La distribución de las corrientes en las paredes interiores de una guía se puede obtener a partir del campo magnético en cada pared, utilizando sucesivamente la expresión

$$\mathbf{J}_s = -\mathbf{a}_n \times \mathbf{H} \quad (4-120)$$

en donde  $\mathbf{J}_s$  es la densidad pelicular de corriente en la superficie considerada de la guía,  $\mathbf{a}_n$  es un vector normal unitario que sale de esa superficie\*, y  $\mathbf{H}$  es el vector de campo magnético evaluado en la misma pared. Este método es el mismo para cada modo de propagación, pero como la expresión matemática de  $\mathbf{H}$  difiere en cada caso, obviamente la distribución de las corrientes en las paredes también es diferente para cada modo.

Es cierto que los conductores empleados para fabricar las paredes de una guía no son perfectos. Sin embargo, si se recuerda el concepto de la profundidad de penetración (ec. 2-2), es claro que a frecuencias mayores que 1 GHz, la penetración en una pared de cobre, por ejemplo, es del orden de micras y muchísimo menos que el valor de la longitud de onda. Bajo esta

\* En algunos textos, la ecuación se define como  $\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H}$ , pero el vector normal unitario cambia de dirección, hacia el interior de la guía. Obviamente, los resultados son los mismos.

consideración, es permisible aproximar la corriente en cada pared de la guía como una película ideal, cuya magnitud y dirección están dadas precisamente por la *ec.* (4-120).

El procedimiento a seguir se ilustrará a continuación, obteniendo la distribución de corrientes para el modo dominante  $TE_{10}$  de la guía rectangular. Considérese para ello la numeración de las paredes interiores mostrada en la Fig. 4-14.

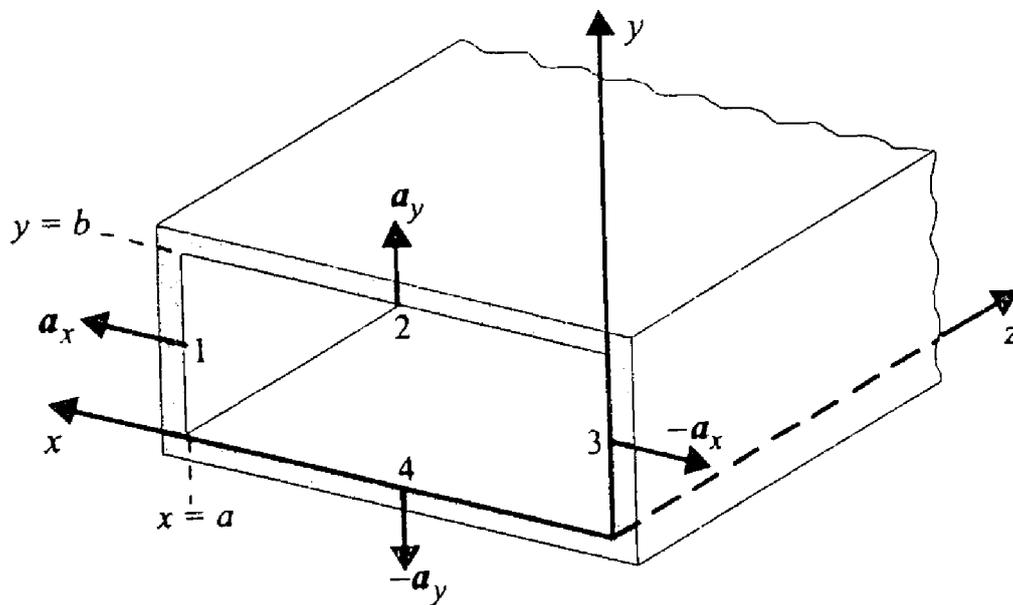


Fig. 4-14 Vectores normales unitarios en las cuatro paredes interiores de la guía.

El vector  $\mathbf{H}$  de los modos TE está dado por las *ecs.* (4-101). Para el modo dominante,  $m = 1$  y  $n = 0$ . Por lo tanto, suprimiendo la variación  $e^{-j\beta z}$ :

$$\mathbf{H} = \left[ \frac{j A_0 \beta a}{\pi} \right] \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_x + A_0 \left( \cos \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_z \quad (4-121)$$

Sustituyendo la *ec.* (4-121) y el vector normal unitario correspondiente a cada pared en la *ec.* (4-120), se obtiene:

Pared	$\mathbf{a}_n$	$\mathbf{J}_s = -\mathbf{a}_n \times \mathbf{H}$
1 ( $x = a$ )	$\mathbf{a}_x$	$-A_0 \mathbf{a}_y$
2 ( $y = b$ )	$\mathbf{a}_y$	$-A_0 \left( \cos \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_x + \left[ \frac{j A_0 \beta a}{\pi} \right] \left( \sin \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_z$
3 ( $x = 0$ )	$-\mathbf{a}_x$	$-A_0 \mathbf{a}_y$
4 ( $y = 0$ )	$-\mathbf{a}_y$	$A_0 \left( \cos \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_x - \left[ \frac{j A_0 \beta a}{\pi} \right] \left( \sin \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_z$

Esta distribución o patrón de corrientes se puede dibujar para un instante determinado, tal como se muestra en la Fig. 4-15. Sin embargo, no debe perderse de vista el hecho de que este patrón se desplaza o propaga como una onda en la dirección  $z$ . La dirección del flujo de corriente sobre cada pared siempre forma ángulos rectos con la dirección del campo magnético. Así, en las paredes laterales, la corriente es vertical; y en las paredes horizontales, tiene una orientación diagonal o recta, según la posición. Como el material conductor de la guía no es perfecto y presenta cierta resistencia,

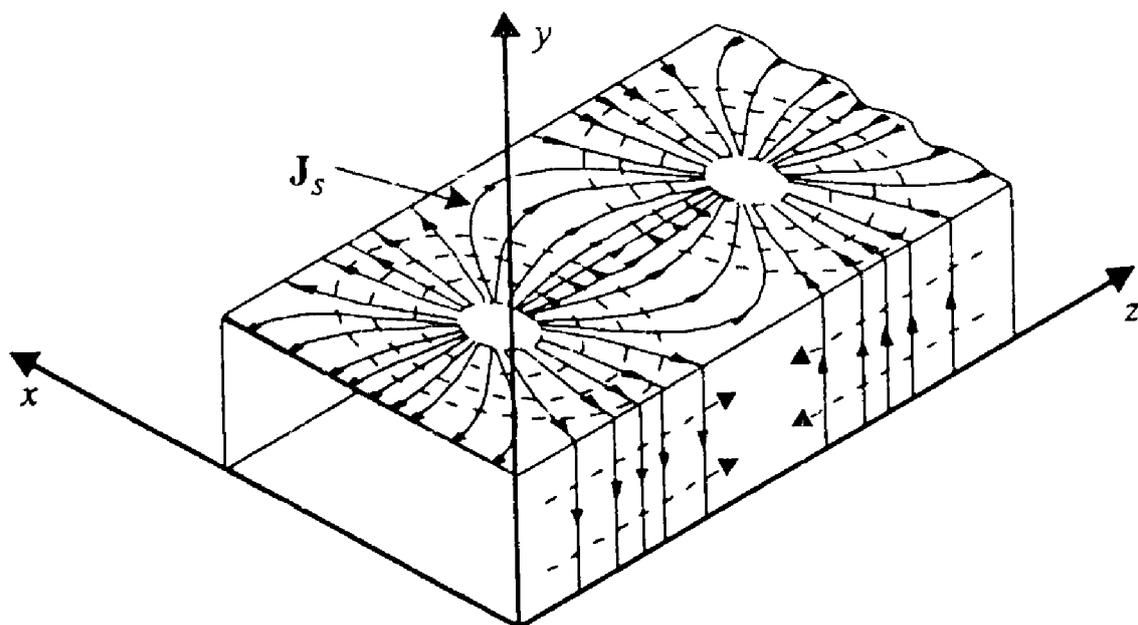
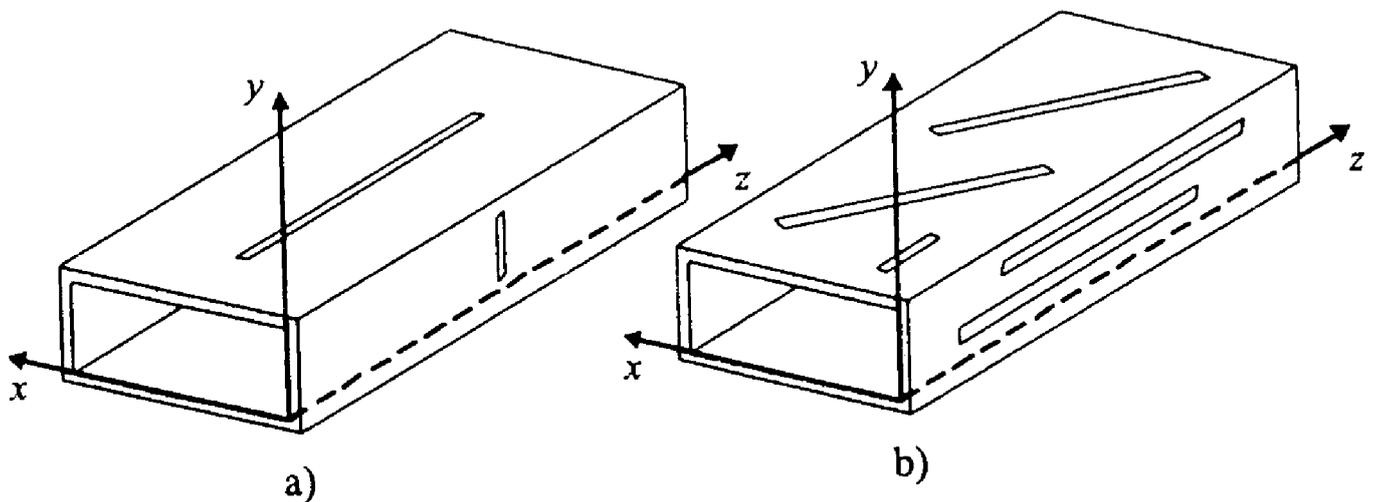


Fig. 4-15 Patrón de corrientes en las paredes interiores de una guía rectangular, para el modo dominante  $TE_{10}$ . (--- líneas de campo magnético en las paredes).

el flujo de la corriente superficial se traduce en potencia disipada, es decir, en atenuación. La trayectoria de la corriente parece estar interrumpida de la pared superior a la inferior, pero se complementa con una corriente de desplazamiento que va de arriba hacia abajo en las regiones centrales de la ilustración (véase la siguiente sección).

En algunos casos, puede ser necesario hacer pequeñas ranuras en la guía, con el fin de introducir una sonda y muestrear los campos en su interior. Estas ranuras deben ser angostas y paralelas a la dirección de la corriente, para que la distribución de los campos no se vea afectada dentro de la guía. Por tal razón, es importante conocer la distribución de las corrientes en las paredes.

En la Fig. 4-16 a) se ilustran dos ranuras posibles para detectar ondas estacionarias en la guía, produciendo una perturbación mínima de los campos del modo  $TE_{10}$ . En cambio, las ranuras mostradas en la Fig. 4-16 b) sí producirían perturbaciones significativas en el patrón de corrientes, provocando además radiación de potencia hacia el exterior\*.



**Fig. 4-16** a) Ranuras que producen perturbación mínima de los campos. b) Ranuras que producen perturbaciones significativas. Compárese cada ranura con la orientación de las corrientes de la Fig. 4-15.

\* Estas ranuras perturbadoras son la base para el diseño de antenas de ranura, también llamadas antenas ranuradas.

### 4.8.6 Potencia transmitida

La potencia que fluye a lo largo de la guía se puede calcular a partir del vector complejo de Poynting:

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (4-122)$$

en donde  $\mathbf{P}_d$  es el vector de Poynting y equivale a una densidad local de flujo de potencia en  $\text{W}/\text{m}^2$ ,  $\mathbf{E}$  es el fasor del campo eléctrico y  $\mathbf{H}^*$  es el conjugado del fasor del campo magnético. Al integrar esta densidad de flujo de potencia en toda la sección transversal de la guía, la potencia promedio que fluye por ella, en la dirección  $z$ , está dada por:

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \int_s \mathbf{P}_d \cdot d\mathbf{s} \right], \quad [\text{W}] \quad (4-123)$$

en donde  $d\mathbf{s}$  es el vector de la diferencial de superficie en la sección transversal y dirigido hacia afuera de dicha superficie (es decir, en la dirección de  $z$ ).

Para el caso del modo dominante, a partir de las ecs. (4-101), se tienen las únicas componentes de campo siguientes:

$$E_y = -\frac{\omega\mu}{\beta} H_x \quad (4-124)$$

$$H_x = \frac{jA_0\beta a}{\pi} \text{sen} \frac{\pi}{a} x \quad (4-125)$$

$$H_z = A_0 \cos \frac{\pi}{a} x \quad (4-126)$$

Estas tres ecuaciones demuestran que la distribución de los campos del modo dominante es muy sencilla, pues todo el campo eléctrico está orientado en la dirección  $y$ , no depende de la variable  $y$ , y su intensidad varía senoidalmente a lo largo del ancho de la guía (variable  $x$ ), de acuerdo con la ilustración de la Fig. 4-12. Por su parte, el campo magnético forma líneas cerradas en el plano  $x$ - $z$  y su intensidad tampoco depende de la variable  $y$ .

En la Fig. 4-17 se muestra un bosquejo de cómo estarían distribuidos los campos en el interior de la guía en un instante determinado. Desde luego, esta distribución se mueve o propaga a lo largo de la guía, en la dirección  $z$ , al igual que la distribución de corrientes de la Fig. 4-15 también se desplaza.

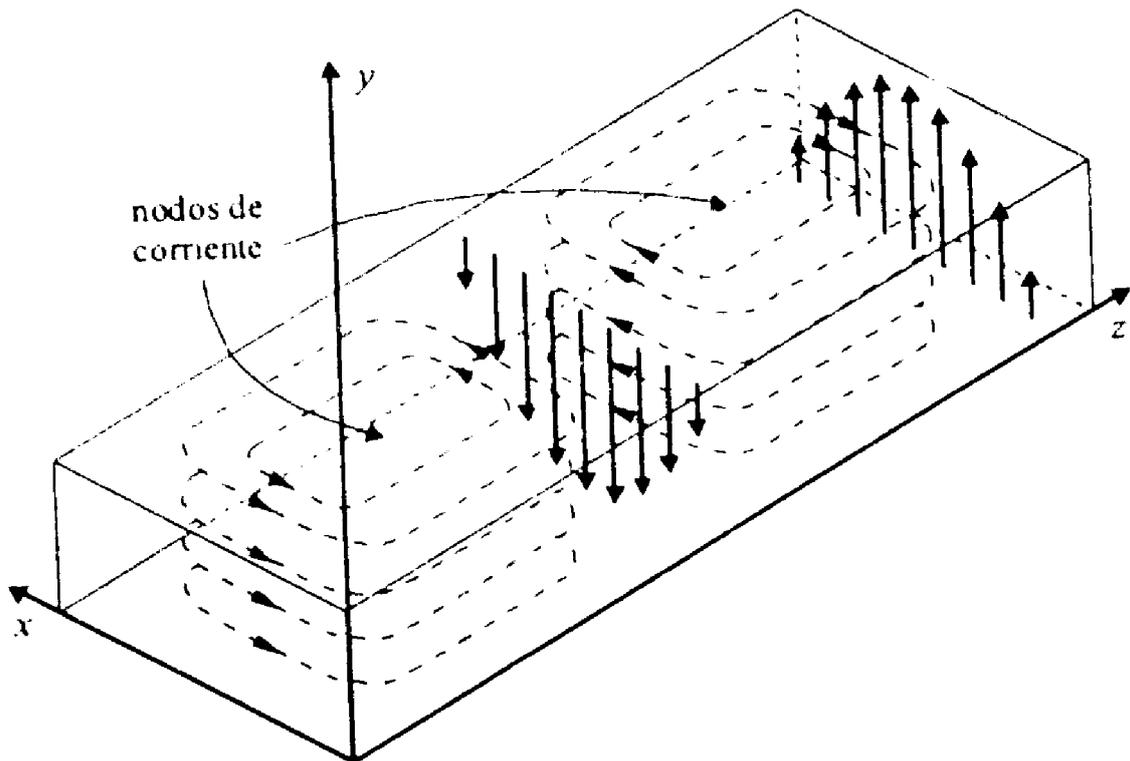


Fig. 4-17. Distribución de los campos del modo dominante en el interior de una guía rectangular. (— E, - - - H).

Comparando ambas figuras 4-15 y 4-17, un nodo de corriente coincide con la posición de un mínimo de la intensidad del campo eléctrico. Es precisamente en un punto mínimo en donde el campo eléctrico adquiere su máxima razón de cambio (proporcional a  $\partial D/\partial t$ ), y si se recuerdan las *ecs.* (1-4) y (2-3), se concluye que en ese punto mínimo (coincidente con el nodo de corriente) hay una corriente de desplazamiento que completa el circuito de la corriente de conducción en las paredes de la guía, situación que ya había sido mencionada en la sección anterior.

Si ahora deseamos calcular la potencia transmitida por el modo dominante, a partir de las *ecs.* (4-124), (4-125), (4-126) y (4-122), se observa que el vector de Poynting tiene dos componentes:

$$P_{d_x} = E_y H_z^* \quad (4-127)$$

$$P_{d_z} = -E_y H_x^* \quad (4-128)$$

La *ec.* (4-128) representa la componente de interés, es decir, la densidad del flujo axial de potencia; y por lo tanto, la potencia promedio transmitida en la dirección  $z$  se obtiene, a partir de la *ec.* (4-123) e integrando en toda la sección transversal de la guía, como:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^b \int_0^a (-E_y H_x^*) dx dy \right]$$

Sustituyendo las *ecs.* (4-124) y (4-125) en esta última ecuación, se tiene que:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^b \int_0^a \left( \frac{j\omega\mu A_0 a}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \right) \left( -\frac{jA_0\beta a}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \right) dx dy \right] \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\omega\mu\beta A_0^2 a^2}{\pi^2} \right) \int_0^b \int_0^a \left( \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{a} x \right) dx dy \\ &= \left( \frac{\omega\mu\beta A_0^2 a^2}{2\pi^2} \right) \left( \frac{ab}{2} \right) \end{aligned} \quad (4-129)$$

Esta última ecuación también se puede escribir en términos de la frecuencia de corte y la frecuencia de trabajo, sustituyendo la *ec.* (4-104) en el lugar de  $\beta$ :

$$\beta = \left( \frac{2\pi}{v} \right) \sqrt{f^2 - f_{c10}^2} \quad = (4-104)$$

$$\begin{aligned}
 P &= \left( \frac{\omega \mu A_0^2 a^2}{\pi \nu} \right) \left( \frac{ab}{2} \right) \sqrt{f^2 - f_{c_{10}}^2} \\
 &= \frac{2\pi f A_0^2 a^3 b \mu}{2\pi \nu} \left( \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{\mu \epsilon}} \right) \sqrt{f^2 - f_{c_{10}}^2} \\
 &= \frac{A_0^2 a^3 b \eta}{\nu^2} f \sqrt{f^2 - f_{c_{10}}^2} \quad (4-130)
 \end{aligned}$$

Nótese, a partir de la ec. (4-126), que  $A_0$  es la magnitud máxima del campo magnético  $H_z$  en la pared lateral de la guía (ya que  $x = 0$  y el coseno es igual a 1).

**Ejercicio 4-17** Considérese la guía rectangular estándar WG 14, cuyo rango de frecuencias de operación recomendado para el modo dominante es  $5.85 \text{ GHz} \leq f \leq 8.20 \text{ GHz}$ , y sus dimensiones internas son  $a = 3.485 \text{ cm}$  y  $b = 1.580 \text{ cm}$ . El dieléctrico dentro de la guía es aire y se desea transmitir el máximo de potencia posible a una frecuencia de 6 GHz. Si el aislamiento del aire, de acuerdo con sus condiciones, se rompe cuando la intensidad del campo eléctrico rebasa los 1.5 MV/m, ¿cuánto vale esa potencia máxima permisible a lo largo de la guía?

### Solución

De la ec. (4-124) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 |E_y|_{\substack{\text{máximo} \\ \text{permisible}}} &= \frac{A_0 a \omega \mu}{\pi} \left( \text{sen} \frac{\pi}{a} x \right)_{\text{máx.}} = 1.5 \times 10^6 \text{ V/m} \\
 \Rightarrow A_0 &= \frac{1.5 \times 10^6 \pi}{a \omega \mu}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $A_0$  en la ec. (4-129), se obtiene la máxima potencia permisible:

$$P_{\text{máx.}} = \left( \frac{\omega \mu \beta a^2}{2\pi^2} \right) \left( \frac{3 \times 10^6 \pi}{a \omega \mu} \right)^2 \left( \frac{ab}{2} \right) = \left( \frac{\beta ab}{4\omega \mu} \right) \underbrace{(1.5 \times 10^6)^2}_{|E|_{\text{máx.}}^2}$$

De acuerdo con la Tabla 4-2, la frecuencia de corte del modo dominante para la guía WG 14 es 4.285 GHz. La frecuencia de operación especificada es de 6 GHz, por lo que la constante de fase se calcula a partir de la ec. (4-104) como:

$$\begin{aligned} \beta_{10} &= \frac{2\pi}{c} \sqrt{f^2 - f_{c10}^2} \\ &= \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{6^2 - 4.285^2} \times 10^9 = 87.96 \text{ rad/m} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$P_{\text{máx.}} = \left( \frac{87.96 \times 3.485 \times 10^{-2} \times 1.580 \times 10^{-2}}{4 \times 2\pi \times 6 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}} \right) (2.25 \times 10^{12}) = 575 \text{ kW}$$

En la práctica, la guía se operaría por debajo de este valor teórico. En el caso de que se deseara transmitir más potencia, habría que utilizar una guía de mayores dimensiones transversales y una frecuencia más baja. La altura de la guía (dimensión  $b$ ) determina el valor exacto de  $|E|_{\text{máx.}}$  permisible antes de que se rompa el aislante del aire; y desde luego, este valor cambiaría si el dieléctrico fuese diferente al aire. Otra forma de aumentar la potencia es presurizando la guía, ya sea con aire o con algún gas como el freón, o incluso creando un vacío. Las características empleadas dependerán finalmente de la aplicación de la guía.

En la Tabla 4-3 se proporcionan los rangos recomendados para la potencia transmitida en los estándares descritos anteriormente en la Tabla 4-2, así como los niveles de atenuación en cada guía. A continuación se estudiará precisamente cómo calcular la atenuación en una guía rectangular.

Tabla 4-3 Potencia máxima de transmisión recomendada y niveles de atenuación en guías rectangulares.

Designación		Potencia máxima recomendada	Atenuación* a las frecuencias inferior y superior del rango recomendado en la Tabla 4-2
EU	Reino Unido	(kW)	(dB/100 m)
WR 284	WG 10	2,400	3.1 - 2.1 (Al)
WR 187	WG 12	1,000	5.8 - 4.0 (Al)
WR 137	WG 14	540	8.0 - 6.4 (Al)
WR 112	WG 15	350	11.5 - 9.0 (Al)
WR 90	WG 16	230	18.0 - 12.5 (Al)
WR 62	WG 18	120	20.1 - 17.6 (Al)
WR 42	WG 20	48	57.7 - 41.3 (Al)
WR 28	WG 22	25	71.8 - 49.2 (Ag)
WR 22	WG 23	15	101.7 - 68.5 (Ag)

\* Suponiendo paredes de aluminio (Al) o de plata (Ag) y aire como dieléctrico en el interior de la guía. Con paredes de cobre, la atenuación es diferente.

#### 4.8.7 Atenuación

En la Tabla 4-3 se observa algo muy interesante: a mayor frecuencia, menor atenuación, dentro del rango de operación de cada guía rectangular. Esto contrasta con las líneas bifilares y coaxiales, en las que la atenuación  $\alpha$  aumenta progresivamente con la frecuencia (por ejemplo, véanse los resultados del Ejercicio 2-4). En esta sección se verá el procedimiento para obtener las curvas de atenuación de las guías rectangulares, y se demostrará que, en efecto, la atenuación disminuye conforme la frecuencia aumenta, hasta cierto valor de frecuencia de trabajo, a partir del cual la atenuación comienza a ascender otra vez. De esta forma, se tiene una región de frecuencias donde la atenuación es mínima. En la misma Tabla 4-3, se nota que las guías que trabajan a frecuencias sumamente altas se fabrican con

paredes interiores de plata, a fin de reducir un poco las altas atenuaciones que se producen a estas frecuencias tan elevadas (compárese la conductividad del aluminio con la del cobre y la plata en la Tabla 2-1). Como la atenuación de estas últimas guías es excesiva, sólo se utilizan en tramos muy cortos. Asimismo, es de esperarse que las guías con paredes de cobre tengan atenuaciones menores que las hechas de aluminio, cuyos valores típicos (según la calidad del acabado en su fabricación) están en la Tabla 4-3.

Evidentemente, en el análisis para calcular la atenuación  $\alpha$  en la guía se debe considerar que los campos progresan atenuándose de acuerdo con un factor  $e^{-\alpha z}$ , además de que también están afectados por  $e^{-j\beta z}$ . Dicho de otra forma, ahora  $\gamma = \alpha + j\beta$ , puesto que los conductores de las paredes ya no se consideran perfectos ( $\alpha \neq 0$ ). Como la potencia transmitida,  $P$ , varía proporcionalmente al cuadrado de los campos, se tiene, ignorando la variación en fase:

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \quad (4-131)$$

en donde  $P_0$  es la potencia inicial.

Si se deriva la ec. (4-131) para despejar  $\alpha$ , se tiene:

$$\frac{dP}{dz} = P_0 (-2\alpha) e^{-2\alpha z} = (-2\alpha) P$$

$$\Rightarrow \alpha = \left( -\frac{1}{2P} \right) \left( \frac{dP}{dz} \right) \quad (4-132)$$

En la ec. (4-132),  $P$  es nuevamente la potencia transmitida a lo largo de la guía, a través del dieléctrico interior (generalmente aire), y la disminución  $-(dP/dz)$  es la potencia perdida o disipada en las paredes metálicas de la guía.

La potencia transmitida ya se obtuvo integrando el vector de Poynting en la sección 4.8.6, y resultó ser igual a:

$$P = \left( \frac{\omega \mu \beta A_0^2 a^2}{2\pi^2} \right) \left( \frac{ab}{2} \right) \quad = (4-129)$$

Por otra parte, la potencia perdida por efecto Joule en el interior de un conductor se calcula por medio de la expresión  $(R_s / 2) J^2$ . Esta relación es similar a la que se emplea en teoría general de circuitos concentrados, donde la potencia disipada es  $(R / 2) I^2$ . Como la guía tiene cuatro paredes, la potencia total perdida se obtiene haciendo una integral de contorno en la sección transversal:

$$-\frac{dP}{dz} = \left( \frac{R_s}{2} \right) \int_c J_s^2 dc \quad (4-133)$$

en donde  $R_s$  es la resistencia pelicular en cada superficie interior de la guía, dada por:

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c l} \quad (4-134)$$

En esta última ecuación,  $\sigma_c$  es la conductividad del material conductor y  $l$  es la profundidad de penetración dada por la ec. (2-2), a una determinada frecuencia. Sustituyendo la ec. (2-2) en la ec. (4-134), se tiene:

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma_c}}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma_c}} = \sqrt{\frac{\pi \mu}{\sigma_c}} \sqrt{f} \quad = (4-134)$$

Ahora bien,  $J_s$  es la densidad de corriente en la superficie de cada pared, con su dirección respectiva. Esta corriente ya se calculó en la sección 4.8.5 para el modo dominante (véase la Fig. 4-15). El procedimiento completo a seguir es muy laborioso, pero el lector interesado puede demostrar (véase el Problema 4.11.7) que al efectuar la integral de contorno de la ec. (4-133) con las densidades de corriente correspondientes a cada pared, combinar las ecs. (4-132), (4-129), (4-133) y (4-104), y después de largos y tediosos desarrollos algebraicos, se obtiene que, cuando el dieléctrico es aire:

$$\alpha_{10} = \frac{R_s}{\eta_0 b} \frac{\left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2 \right]}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2}} \quad [\text{Np/m}] \quad (4-135)$$

con  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  y  $f_{c_{10}} = c/2a$ , de acuerdo con la ec. (4-119).

En la práctica y en los catálogos de los fabricantes de guías de ondas es más común expresar la atenuación en dB/m. Por lo tanto, usando la relación (2-20), y para una guía rectangular con paredes de cobre, la ec. (4-135) se reduce a:

$$\alpha_{10} = \sqrt{\frac{\pi\mu_0\epsilon_0}{\sigma_c\mu_0}} \left( \frac{1}{b} \right) \frac{f^{1/2} \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2 \right]}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2}} \quad (8.686)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi \times 8.854 \times 10^{-12}}{5.8 \times 10^7}} \left( \frac{2b}{ab} \right) \left[ \frac{\frac{a}{2b} f^{1/2} + \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2 f^{1/2}}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2}} \right] \quad (8.686)$$

$$= 6.015 \times 10^{-9} \left( \frac{2}{a} \right) \left( f_{c_{10}}^{1/2} \right) \left[ \frac{\frac{a}{2b} \left( \frac{f}{f_{c_{10}}} \right)^{1/2} + \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^{3/2}}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2}} \right]$$

Y como  $f_{c_{10}}^{1/2} = \sqrt{c/2a}$ , finalmente se tiene que:

$$\alpha = \frac{1.47 \times 10^{-4}}{\sqrt{a^3}} \left[ \frac{\frac{a}{2b} \sqrt{\frac{f}{f_{c_{10}}}} + \sqrt{\left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2}} \right] \quad [\text{dB/m}] \quad (4-136)$$

**Ejercicio 4-18** Obtenga la gráfica de atenuación  $\alpha$ , en dB/m, en función de la frecuencia, para el modo dominante en las guías rectangulares WG12, WG16 y WG20. Considere que las paredes interiores son de cobre y que el dieléctrico es aire.

### Solución

Las dimensiones de las guías estipuladas y sus frecuencias de corte para el modo dominante  $TE_{10}$ , de acuerdo con la Tabla 4-2, son:

Guía	$a$ [cm]	$b$ [cm]	$f_{c_{10}}$ [GHz]
WG12	4.755	2.215	3.155
WG16	2.286	1.016	6.56
WG20	1.067	0.4318	14.08

Al sustituir estos valores en la ec. (4-136), obtenida para paredes de cobre y dieléctrico aire, se tiene:

$$\alpha_{\text{WG12}} = \frac{1.47 \times 10^{-4}}{0.0103687} \left[ \frac{1.073363 \sqrt{\frac{f}{3.155}} + \sqrt{\left(\frac{3.155}{f}\right)^3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3.155}{f}\right)^2}} \right] \quad \text{dB/m}$$

$$\alpha_{\text{WG16}} = \frac{1.47 \times 10^{-4}}{0.0034563} \left[ \frac{1.125 \sqrt{\frac{f}{6.56}} + \sqrt{\left(\frac{6.56}{f}\right)^3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{6.56}{f}\right)^2}} \right] \text{ dB/m}$$

$$\alpha_{\text{WG20}} = \frac{1.47 \times 10^{-4}}{0.0011018} \left[ \frac{1.235526 \sqrt{\frac{f}{14.08}} + \sqrt{\left(\frac{14.08}{f}\right)^3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{14.08}{f}\right)^2}} \right] \text{ dB/m}$$

Sustituyendo  $f$  en GHz en las tres ecuaciones anteriores, se obtienen las gráficas mostradas en la Fig. 4-18. Con el fin de compararlas, las tres curvas de atenuación están graficadas en el mismo par de ejes. Nótese que la escala de  $\alpha$  es logarítmica.

Se observa, en efecto, que cada guía tiene una región de frecuencias donde la atenuación es mínima. El rango recomendado de operación se muestra acotado, en concordancia con la Tabla 4-2. Nótese que los niveles de atenuación son ligeramente inferiores a los de la Tabla 4-3, ya que en ésta se consideran paredes de aluminio, cuya conductividad es menor que la del cobre.

#### 4.8.8 Excitación y extracción de los modos TE y TM

Como ya se ha expuesto en secciones anteriores, la potencia de una señal a lo largo de una guía rectangular se envía comúnmente empleando el modo dominante  $\text{TE}_{10}$ . Sin embargo, existen algunos sistemas en los que resulta útil excitar o extraer modos superiores de propagación. Por ejemplo, en ciertas estaciones terrenas para comunicaciones por satélite se usan antenas de corneta con aperturas múltiples\* en las que se combinan los modos  $\text{TE}_{10}$  y  $\text{TM}_{12}$ . Asimismo, hay estaciones de seguimiento o rastreo que utilizan el método de *monoimpulso multimodo*; éstas tienen un acoplador especial de

\* También se les llama radiadores de bocina de aberturas múltiples.

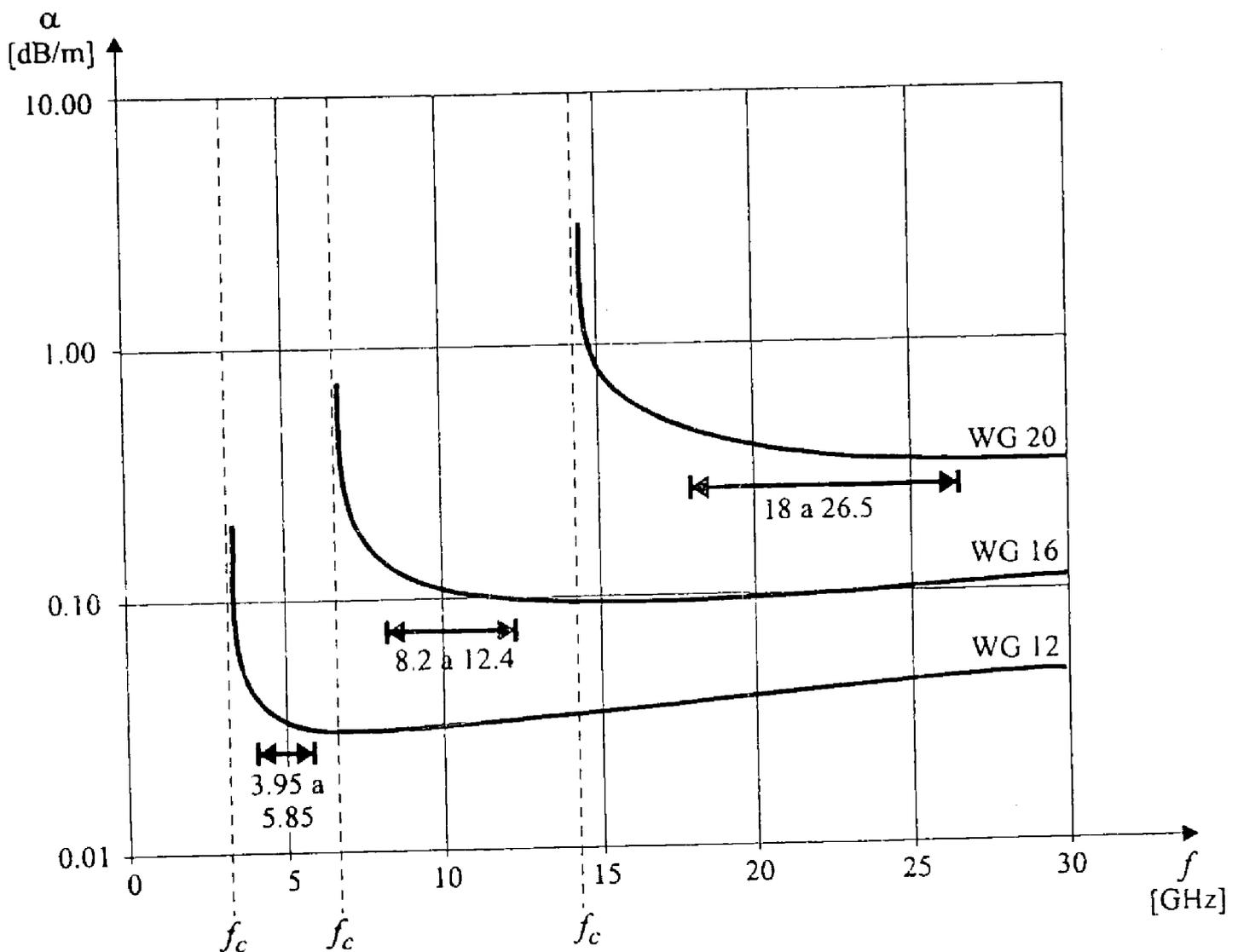


Fig. 4-18 Curvas de atenuación para el modo dominante en las guías rectangulares WG12, WG16 y WG20, con paredes de cobre y aire como dieléctrico.

microondas insertado en el alimentador de la antena. Cuando el eje del haz de la antena se desvía con relación a la dirección donde está el satélite, se producen modos superiores de propagación en la bocina o corneta del alimentador (por ejemplo, el  $TE_{20}$ ), mismos que son extraídos por el acoplador. Esta información se usa para calcular con precisión la posición del satélite.

Siempre que se quiera excitar o detectar cualquier modo, el método empleado debe maximizar la transferencia de potencia entre la fuente y la guía, o entre esta última y el receptor. En el caso de transmisión, se emplea una sonda coaxial para "lanzar" el modo deseado. En realidad, lo que se busca o intenta es que, en lo posible, la sonda produzca líneas de campo

eléctrico y magnético que sean paralelas a las líneas correspondientes de dicho modo. La sonda, que generalmente es un cable coaxial terminado en circuito abierto, con su conductor central extendido, se introduce en la guía por un pequeño orificio. El lector con conocimientos básicos sobre la teoría de antenas estará de acuerdo en que la sonda radia como si fuese una antena, produciendo sus propias líneas de campo eléctrico y magnético. Así, por ejemplo, en la Fig. 4-19 se muestra cómo excitar una guía para lanzar los modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{20}$  y  $TM_{11}$  en una guía rectangular. La posición de la sonda debe estar cerca del lugar donde el campo eléctrico del patrón de propagación es máximo, pero puede variarse ligeramente para mejorar el acoplamiento de impedancias. La extracción se realiza de una forma similar, insertando sondas coaxiales o "miniantenas receptoras" al final de la guía, para efectuar la conexión con los demás equipos del sistema.

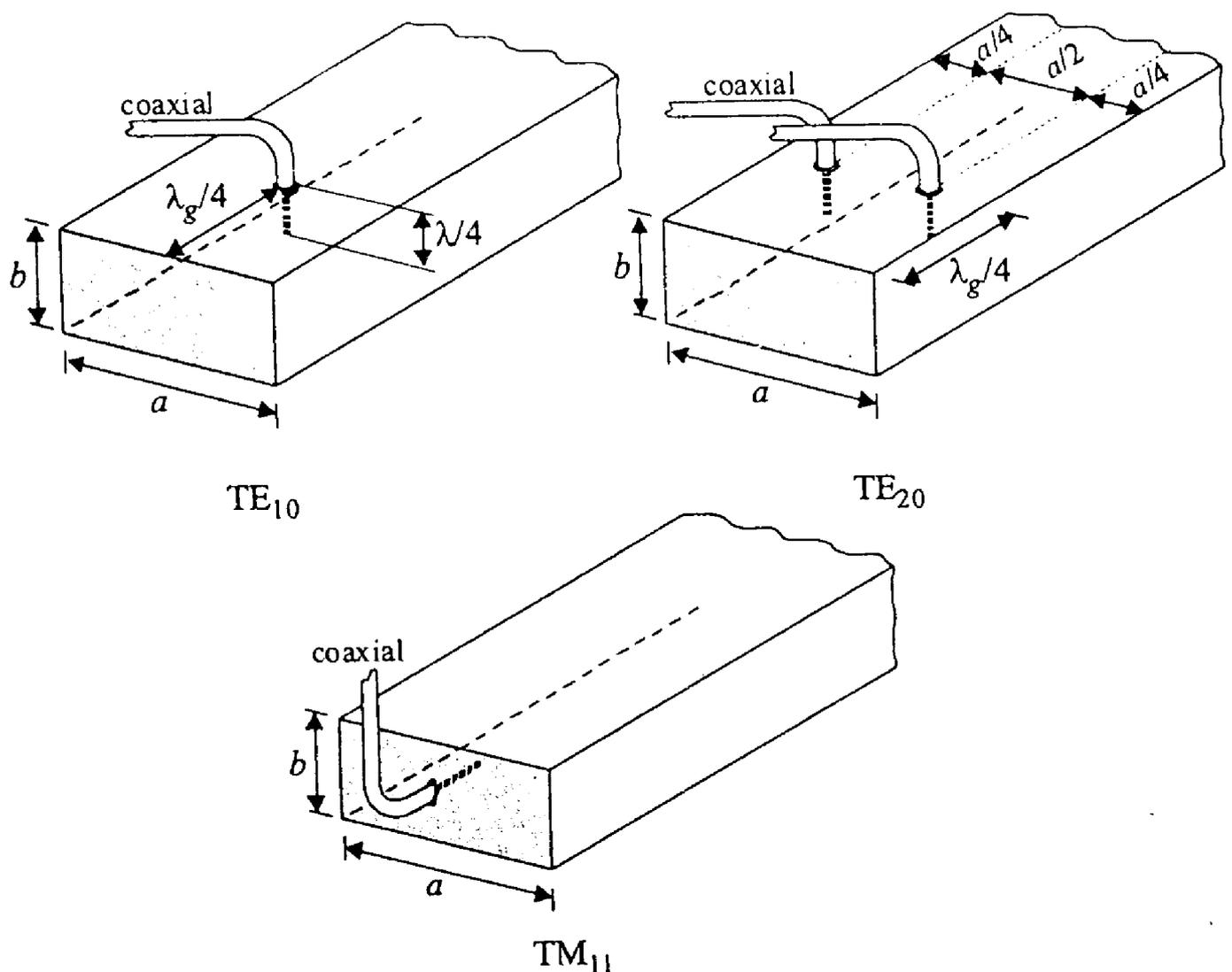


Fig. 4-19 Métodos de excitación para producir los modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{20}$  y  $TM_{11}$  en una guía rectangular.

Los conceptos teóricos sobre la reflexión y la propagación retardada de las ondas electromagnéticas sugiere colocar las sondas a una distancia de  $\lambda_g/4$  de donde comienza la guía, de tal forma que las ondas reflejadas en la pared inicial se sumen constructivamente con las ondas radiadas por la sonda en la dirección positiva de  $z$ . También se pueden utilizar sondas terminadas como "miniantenas de lazo" en lugar de la forma monopolo, cuidando su posición para que las líneas de campo coincidan en lo posible con las del modo deseado.

#### 4.8.9 Cavidades resonantes y factor de calidad

El fenómeno de resonancia se explicó en la sección 2.17, en donde también se mencionó que hay cavidades en forma de "cajas" para los sistemas de microondas. En efecto, en el caso de las guías de ondas, un resonador de cavidad —también llamado cavidad resonante o medidor de onda— es una región dieléctrica rodeada totalmente por paredes conductoras. Esta caja metálica es capaz de almacenar energía y es análoga a los circuitos resonantes descritos en la sección 2.17 para frecuencias más bajas. Los resonadores de cavidad son parte esencial en la mayoría de los sistemas de microondas y, entre otras aplicaciones, sirven para hacer medidores de frecuencia, filtros selectivos, osciladores y amplificadores de potencia. Tienen un factor de calidad  $Q$  muy alto, del orden de 5,000 a 10,000.

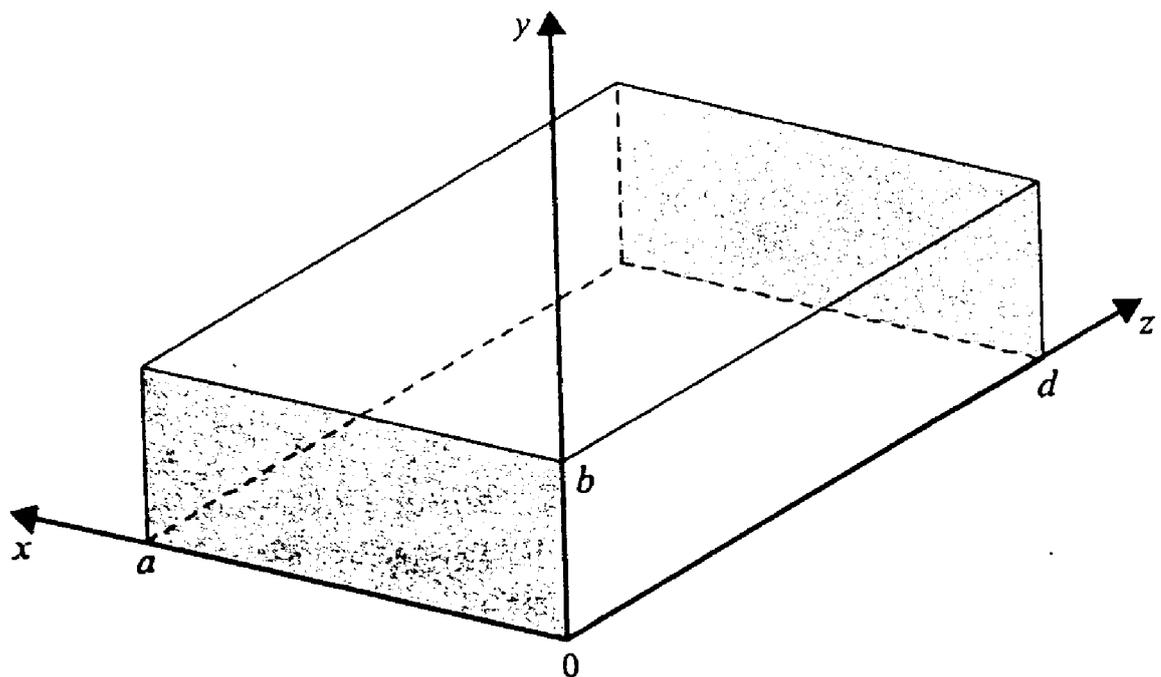


Fig. 4-20 Geometría de una cavidad resonante con guía de ondas rectangular.

En la Fig. 4-20 se muestra la geometría de una cavidad resonante rectangular. Consiste de un tramo de guía de ondas rectangular, con sección transversal  $a \times b$  y longitud  $d$  a lo largo del eje  $z$ . Las paredes en los planos  $z = 0$  y  $z = d$  están totalmente cerradas y hechas de placas conductoras. Es decir, la guía está cortocircuitada en ambos extremos. Desde luego, la "caja" por sí sola no puede hacer nada, a menos que se le entregue potencia electromagnética de alguna forma. Esto se realiza, tanto para la entrada como para la salida de las cavidades, por medio de pequeños orificios de acoplamiento o por sondas que se introducen dentro de la caja, en forma análoga a lo mostrado en la sección 4.8.8 (Fig. 4-19), para excitar y/o extraer los modos de propagación deseados. Es obvio que las ondas, una vez dentro de la cavidad, rebotarán una y otra vez al chocar con las paredes metálicas que cortocircuitan a la guía en ambos extremos. La superposición de las ondas incidentes con las ondas reflejadas produce una onda estacionaria a lo largo del eje  $z$ .

Considérese que se tiene una cavidad rectangular cuyo rango de frecuencias de trabajo permite sólo la existencia del modo dominante  $TE_{10}$ . Por lo tanto, a partir de las ecs. (4-124), (4-125) y (4-126), se tiene:

$$E_y = \left( \frac{-\omega\mu}{\beta} \right) \left( \frac{jA\beta a}{\pi} \right) \left( \text{sen} \frac{\pi}{a} x \right) = -\frac{ja\omega\mu}{\pi} A \text{sen} \frac{\pi}{a} x \quad (4-137)$$

$$H_x = \frac{ja\beta}{\pi} A \text{sen} \frac{\pi}{a} x \quad (4-138)$$

$$H_z = A \cos \frac{\pi}{a} x \quad (4-139)$$

Las expresiones anteriores se obtuvieron considerando la propagación de la onda a lo largo del eje  $z$  y se omitió el término  $e^{-j\beta z}$  que indica el defasamiento. Sin embargo, si tomamos ahora el caso de la cavidad de la Fig. 4-20, dichas expresiones deben complementarse con la onda reflejada, en forma similar a lo que se estudió en el capítulo 2 sobre las ondas estacionarias de voltaje y de corriente, de modo que:

$$E_y = -\frac{ja\omega\mu}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \left[ A e^{-j\beta z} + B e^{j\beta z} \right] \quad (4-140)$$

$$H_x = \frac{ja\beta}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \left[ A e^{-j\beta z} - B e^{j\beta z} \right] \quad (4-141)$$

$$H_z = \cos \frac{\pi}{a} x \left[ A e^{-j\beta z} + B e^{j\beta z} \right] \quad (4-142)$$

Como  $E_y$  es tangencial a las paredes en  $z = 0$  y  $z = d$ , entonces debe valer cero. La primera condición en  $z = 0$ , sustituida en la ec. (4-140), lleva a que:

$$0 = A e^{-j\beta z} + B e^{j\beta z}$$

O sea que  $A = -B$  y, usando la relación de Euler, los campos  $E_y$ ,  $H_x$  y  $H_z$  adoptan la forma siguiente:

$$E_y = -\frac{2Aa\omega\mu}{\pi} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \right) (\operatorname{sen} \beta z) \quad (4-143)$$

$$H_x = j \frac{2Aa\beta}{\pi} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \right) (\cos \beta z) \quad (4-144)$$

$$H_z = -j2A \left( \cos \frac{\pi}{a} x \right) (\operatorname{sen} \beta z) \quad (4-145)$$

La segunda condición de frontera en  $z = d$ , sustituida en la ec. (4-143), conlleva a los valores que puede tener la longitud  $d$  de la cavidad:

$$0 = \operatorname{sen} \beta z = \operatorname{sen} \beta d$$

$$\Rightarrow d = \tilde{n} \frac{\pi}{\beta} \quad (\tilde{n} = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-146)$$

y como  $\lambda_g$ , dada por la ec. (4-106), es igual a  $2\pi/\beta$ , la longitud  $d$  también se puede especificar como:

$$d = \tilde{n} \frac{\lambda_g}{2} \quad (\tilde{n} = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-147)$$

Ahora bien, como en la cavidad se manejan tres variables de longitud ( $a$ ,  $b$  y  $d$ ), cada modo que se forma en el interior se designa con el subíndice triple  $m\tilde{n}\tilde{n}$  y se denomina *modo de resonancia*. A los modos de resonancia también se les refiere como *modos propios* y, en general, la notación queda como  $TE_{m\tilde{n}\tilde{n}}$  o  $TM_{m\tilde{n}\tilde{n}}$ . Para el modo dominante bajo estudio,  $m = 1, n = 0$  y  $\tilde{n} = 1$  para el modo de resonancia de orden más bajo en la cavidad, de acuerdo con la ec. (4-146). Veamos cómo obtener las *frecuencias de resonancia* de los distintos modos  $TE_{10\tilde{n}}$ .

De la ec. (4-108) se tiene que:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{c_{10}}^2}} \quad (4-148)$$

Combinando las ecs. (4-147) y (4-148), para cualquier valor de  $\tilde{n}$ , se obtiene:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \frac{\tilde{n}}{2d} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{c_{10}}^2}}$$

y como  $\lambda = c/f$ , la longitud  $d$  de la cavidad puede ser:

$$d_{m\tilde{n}\tilde{n}} = \frac{\tilde{n}}{2} \left[ \left( \frac{f}{c} \right)^2 - \left( \frac{1}{\lambda_{c_{10}}} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4-149)$$

Ahora bien, de la misma ec. (4-148), se puede despejar  $1/\lambda$ :

$$\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_{c_{10}}^2}}$$

de modo que:

$$\lambda_{mn\tilde{n}} = \left[ \left( \frac{\tilde{n}}{2d} \right)^2 + \left( \frac{1}{\lambda_{c_{10}}} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4-150)$$

y como  $\lambda = c/f$ , la frecuencia de resonancia, a la que puede funcionar la cavidad como tal, es:

$$f_{mn\tilde{n}} = c \sqrt{\left( \frac{\tilde{n}}{2d} \right)^2 + \left( \frac{1}{\lambda_{c_{10}}} \right)^2} \quad (4-151)$$

La primera frecuencia de resonancia se denomina *frecuencia fundamental*, y para el modo dominante  $TE_{10}$  se obtiene con  $\tilde{n} = 1$ :

$$f_{101} = c \sqrt{\left( \frac{1}{2d} \right)^2 + \left( \frac{1}{\lambda_{c_{10}}} \right)^2} \quad (4-152)$$

Por último, para concluir esta breve sección, presentaremos una expresión para calcular el factor de calidad  $Q$  a la frecuencia de resonancia. El procedimiento matemático para su deducción es bastante laborioso y se omitirá aquí, pues hay que calcular la energía almacenada y la energía perdida (tomando en cuenta la resistencia de las paredes), para sustituirlas en la relación que lo define:

$$Q = \omega \frac{\text{energía almacenada}}{\text{energía perdida por segundo}}$$

La ecuación en cuestión, para el modo propio  $TE_{101}$ , es de la forma:

$$Q \Big|_{TE_{101}} = \frac{\pi\eta_0}{2R_s} \left[ \frac{b(a^2 + d^2)^{3/2}}{ad(a^2 + d^2) + 2b(a^3 + d^3)} \right] \quad (4-153)$$

en donde  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , la resistencia pelicular  $R_s = \sqrt{\omega\mu/2\sigma}$ , y  $\sigma$  es la conductividad del metal empleado.

Típicamente, se pueden obtener valores de  $Q$  entre 5,000 y 10,000.

**Ejercicio 4-19** Considere una cavidad rectangular de cobre hecha con las dimensiones transversales del estándar de guía de ondas WG16 de la Tabla 4-2. Calcule la longitud mínima que dicha cavidad debe tener para que resuene a 10 GHz. También obtenga el factor  $Q$ .

*Solución*

$$a = 2.286 \text{ cm} \quad b = 1.016 \text{ cm} \quad f_{c_{10}} = 6.56 \text{ GHz}$$

La frecuencia de 10 GHz queda dentro del rango recomendado para operar únicamente en el modo dominante  $TE_{10}$ , y a partir de la ec. (4-149) se obtiene el valor mínimo de  $d$ , con  $\tilde{n} = 1$ :

$$\begin{aligned} d_{101} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{10 \times 10^9}{3 \times 10^8} \right)^2 - \left( \frac{6.56 \times 10^9}{3 \times 10^8} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1,111 - 478}} = 1.99 \text{ cm} \end{aligned}$$

Para calcular el factor de calidad  $Q$  de esta cavidad, primero es necesario conocer el valor de la resistencia  $R_s$  del cobre a 10 GHz:

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 10^{10} \times 4\pi \times 10^{-7}}{2 \times 5.8 \times 10^7}} = 2.6 \times 10^{-2} \ \Omega$$

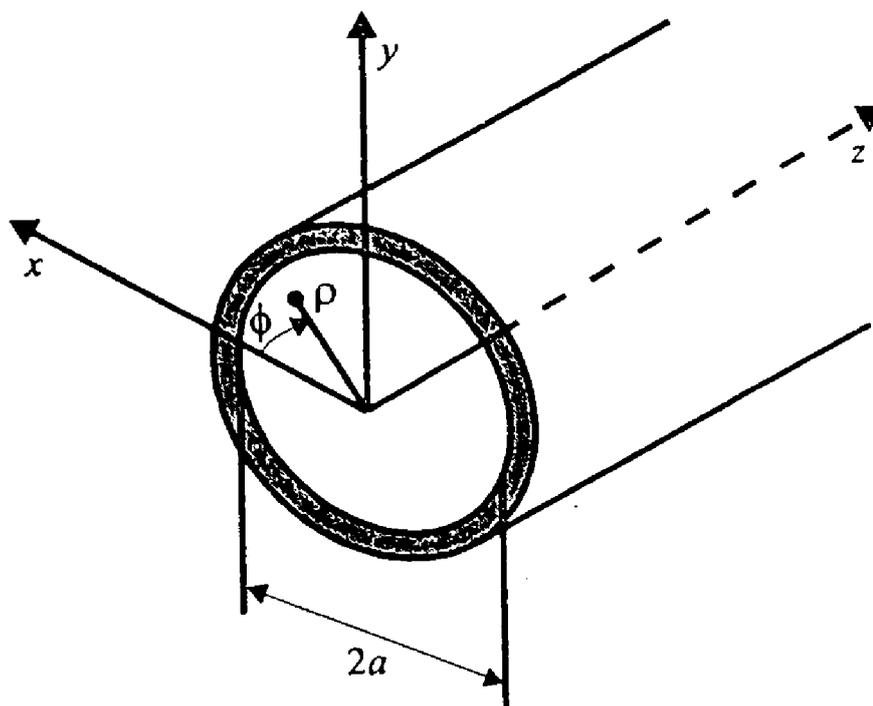
Finalmente, usando la *ec. (4-153)*:

$$Q = \frac{\pi \times 120 \pi}{2 \times 2.6 \times 10^{-2}} \left[ \frac{0.01016 (0.02286^2 + 0.0199^2)^{3/2}}{(0.02286)(0.0199)(0.02286^2 + 0.0199^2) + 2(0.01016)(0.02286^3 + 0.0199^3)} \right]$$

$$\approx 7,800$$

### 4.9 Guías circulares

Las guías circulares tienen aplicaciones muy específicas e importantes. En particular, son útiles en los sistemas de radar que necesitan una antena giratoria y en la fabricación de muchos dispositivos de microondas que requieren de una unión que gire libremente, tales como atenuadores y cambiadores de fase de alta precisión (véase la sección 5.5).



**Fig. 4-21** Guía de ondas circular y sistema de coordenadas polares.

Para analizar las propiedades de transmisión de una guía de ondas circular, conviene utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas. En la Fig. 4-21 se muestra la geometría de la guía, cuyo radio interno es  $a$  y transmite potencia en la dirección  $z$ .

En las secciones 4.3 y 4.4 se desarrolló la teoría general de los modos TE y TM. Las ecuaciones generales que se obtuvieron fueron:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0 \quad = (4-56)$$

para los modos TE

$$y \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0 \quad = (4-57)$$

para los modos TM

Ahora es necesario trabajar con ecuaciones similares a las ecuaciones (4-56) y (4-57), pero en coordenadas polares. Después de resolverlas y aplicar las condiciones de frontera correspondientes a la geometría circular, se obtendrán las distribuciones de campo en el interior de la guía. De la Fig. 4-21, inmediatamente se ve que  $E_\phi$  deberá valer cero en la frontera, es decir, cuando  $\rho = a$  y para toda  $\phi$ , suponiendo que el conductor sea perfecto. Asimismo, para los modos TE,  $E_z = 0$  en todos los puntos interiores; y para los modos TM,  $E_z \neq 0$ , con excepción de la frontera, donde  $E_z = 0$  para toda  $\phi$ , puesto que no puede haber componente tangencial de campo eléctrico en el conductor perfecto.

Siguiendo un procedimiento matemático similar al de las secciones 4.3 y 4.4, sólo que con coordenadas cilíndricas, se puede demostrar que las ecuaciones diferenciales finales que hay que resolver para la guía circular son:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0 \quad (4-154)$$

para los modos TE

$$y \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0 \quad (4-155)$$

para los modos TM

Estas ecuaciones pueden ser resueltas por el método de separación de variables. La solución general contiene funciones de Bessel de primera y segunda clase, de orden  $m$ :  $J_m(h\rho)$  y  $N_m(h\rho)$ . A la función Bessel de segunda clase también se le conoce como función Neumann, y por ello se denota con la letra  $N$ . Dicha solución general es:

$$\Psi = \underbrace{[AJ_m(h\rho) + BN_m(h\rho)]}_{f_1(\rho)} \underbrace{[C \cos m\phi + D \sin m\phi]}_{f_2(\phi)} e^{-\gamma z} \quad (4-156)$$

en donde  $\Psi$  puede ser  $H_z$  o  $E_z$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son constantes y:

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (4-157)$$

Sin embargo, la función Neumann tiene una singularidad en  $\rho = 0$ , es decir, tiende a menos infinito cuando su argumento tiende a cero. Como sería imposible tener un campo de magnitud infinita en el centro de la guía, donde  $\rho = 0$ , esto quiere decir que la constante  $B$  en la *ec.* (4-156) debe considerarse igual a cero para toda  $m$ . Para otro tipo de problema, por ejemplo si hubiese una barra metálica axial, la función Neumann sí podría ser empleada en la solución general, pues  $\rho = 0$  no sería un punto de campo. Por otra parte, la constante  $m$  deber ser un número entero, ya que la geometría circular del problema exige que cada vez que  $\phi$  se incremente en  $2\pi$ , se vuelva a obtener el mismo valor para el campo. Esta condición de periodicidad conduce a elegir las funciones  $\cos m\phi$  y  $\sin m\phi$  indicadas en la solución general dada por la *ec.* (4-156). Pero no es necesario usar las dos funciones; cualquiera de ellas es suficiente, según la referencia que se elija para el ángulo  $\phi = 0^\circ$ . Como se acostumbra utilizar la función  $\cos m\phi$ , la solución final adopta la forma siguiente, ignorando por el momento el término  $e^{-\gamma z}$ :

$$\Psi = A_0 [J_m(h\rho) \cos m\phi] \quad (4-158)$$

en donde  $A_0$  es una constante.

Las condiciones de frontera del problema impondrán los valores que pueda tener  $h$ , según se trate de modos de propagación TE o TM. Cada valor de  $h$ , a su vez, definirá el valor de la constante de propagación, de acuerdo con la *ec.* (4-157).

Una vez conocida  $H_z$  (para los modos TE) o  $E_z$  (para los modos TM), las demás componentes de campo se obtienen a partir de las mismas ecuaciones de Maxwell, con  $\gamma = j\beta$ , como:

$$E_\rho = \frac{1}{h^2} \left[ -j\beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - j \frac{\omega\mu}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right] \quad (4-159)$$

$$E_\phi = \frac{1}{h^2} \left[ j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - j \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad (4-160)$$

$$H_\rho = \frac{1}{h^2} \left[ -j\beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + j \frac{\omega\varepsilon}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad (4-161)$$

$$H_\phi = \frac{1}{h^2} \left[ -j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - j \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right] \quad (4-162)$$

Recuérdese que  $E_z = 0$  para los modos TE y  $H_z = 0$  para los modos TM, de manera que las ecs. (4-159) – (4-162) se simplifican acordemente.

#### 4.9.1 Los modos TE

La componente de campo  $H_z$  de los modos TE se obtiene sustituyendo a  $\Psi$  por  $H_z$  en la ec. (4-158):

$$H_z = A_0 J_m(h\rho) \cos m\phi \quad (4-163)$$

De la ec. (4-160), considerando que  $E_z = 0$  para los modos TE, se obtiene la siguiente condición de frontera en  $\rho = a$ :

$$E_\phi \Big|_{\rho=a} = \frac{1}{h^2} \left[ j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]_{\rho=a} = 0$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0 \quad (4-164)$$

Si ahora la ec. (4-163) es derivada con relación a  $\rho$ , se tiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \rho} = A_0 h J'_m(h\rho) \cos m\phi$$

De modo que, como en general  $A_0 h \cos m\phi \neq 0$ , en la frontera debe cumplirse lo siguiente:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \left[ 0 = J'_m(h\rho) \right]_{\rho=a} \quad (4-165)$$

Las primeras cuatro funciones de Bessel de primera clase se muestran en la Fig. 4-22. La naturaleza oscilatoria de estas funciones permite tabular los

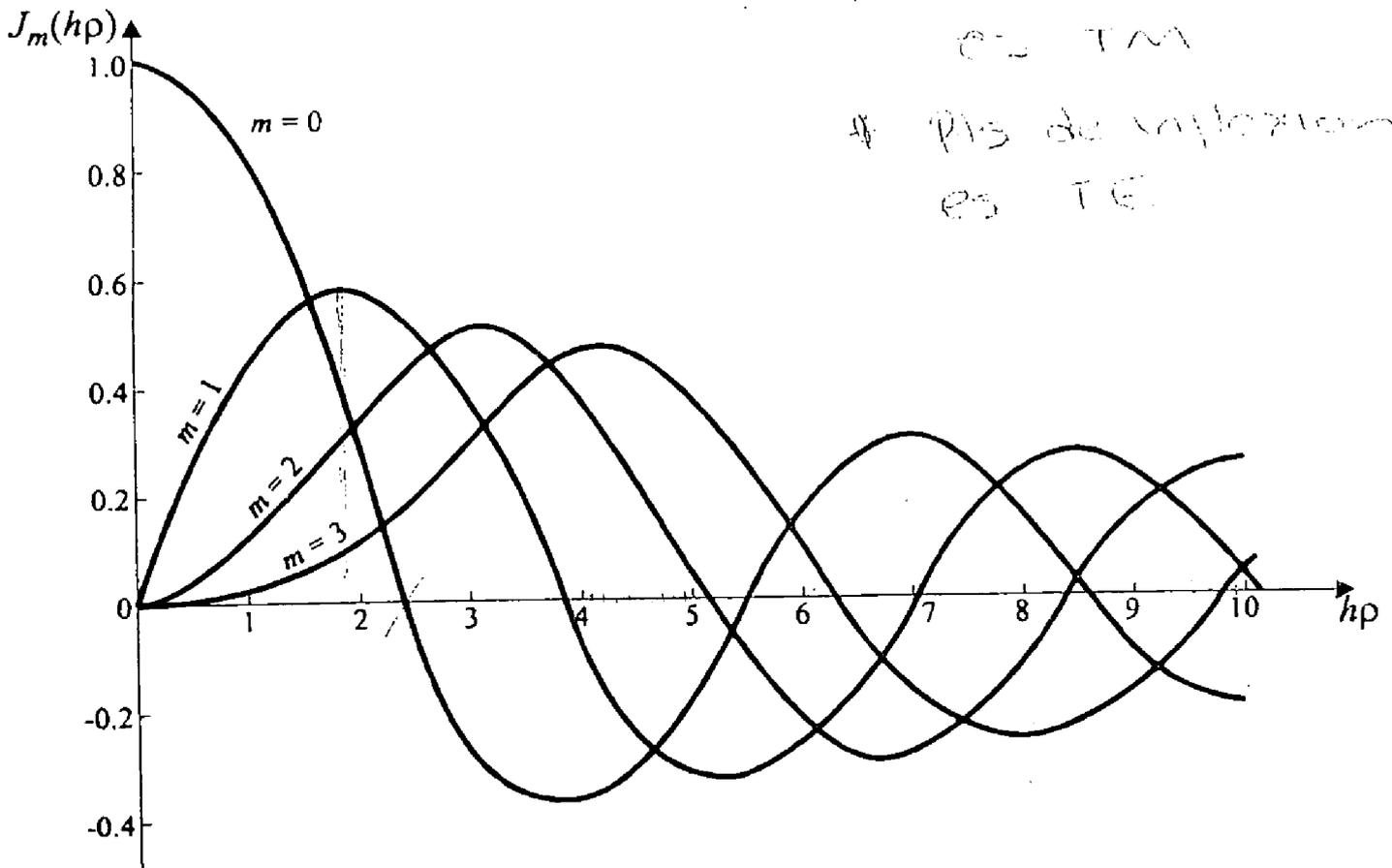


Fig. 4-22 Funciones Bessel de primera clase,  $J_m(h\rho)$ .

argumentos para los cuales valen cero, es decir, cuando se cruza el eje de las abscisas. Así, por ejemplo, la función  $J_0(h\rho)$  tiene el valor cero cuando  $h\rho = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$ . Estas raíces ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) dan origen a la nomenclatura de cada uno de los modos de propagación en la guía. Por comodidad, en la Tabla 4-4 se incluyen las primeras raíces de las primeras tres funciones de Bessel.

**Tabla 4-4** Raíces  $(h\rho)_{mn}$  para las cuales  $J_m(h\rho) = 0$ .

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...
$m = 0$	2.405	5.520	8.654	...
$m = 1$	3.832	7.016	10.173	...
$m = 2$	5.136	8.417	11.620	...
$\vdots 3$	6.45	9.76	$\vdots$	$\ddots$

Las raíces de la Tabla 4-4 nos servirán en la siguiente sección, al estudiar los modos TM. Por lo pronto, regresemos a la condición dada por la ec. (4-165) para los modos TE.

Por definición, la derivada de cada función  $J_m(h\rho)$  vale cero en sus puntos máximos y mínimos, descartando discontinuidades como la de  $J_0(h\rho)$  en  $h\rho = 0$ . De manera que, por ejemplo y haciendo referencia a la Fig. 4-22,  $J'_1(h\rho) = 0$  cuando  $h\rho = 1.841, 5.331, 8.536, \dots$ . Cada una de estas raíces está asociada con un modo de propagación  $mn$  determinado. Así, por ejemplo,  $n = 1$  para la primera raíz en 1.841,  $n = 2$  para la segunda raíz en 5.331, y así sucesivamente. Luego, la combinación de  $J'_1(h\rho) = 0$  [ $m = 1$ ] con la raíz 5.331 [ $n = 2$ ] está asociada con el modo  $TE_{12}$ . En la Tabla 4-5 se proporcionan las primeras raíces de las derivadas de las primeras tres funciones de Bessel.

Si las raíces  $(h\rho)_{mn}$  para las cuales  $J'_m(h\rho) = 0$  son designadas con la nomenclatura  $s_{mn}$ , entonces la ec. (4-165) nos indica que:

$$ha = s_{mn}$$

**Tabla 4-5** Raíces  $(h\rho)_{mn}$  para las cuales  $J'_m(h\rho) = 0$ .

TE

	n = 1	n = 2	n = 3	...
m = 0	3.832	7.016	10.173	...
m = 1	1.841	5.331	8.536	...
m = 2	3.054	6.706	9.969	...
⋮ 3	4.20	8:	⋮	⋮

$$\Rightarrow h = \frac{s_{mn}}{a} \quad \text{para los modos TE}_{mn} \quad (4-166)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ec. (4-166) en la ec. (4-157), se obtiene que la constante de propagación para los modos  $\text{TE}_{mn}$  en la guía circular cumple con:

$$\gamma^2 = h^2 - \omega^2 \mu \epsilon = \left( \frac{s_{mn}}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad (4-167)$$

Siguiendo ahora un criterio similar al que se aplicó al estudiar las guías rectangulares en la sección 4.8, se deduce que habrá propagación en la guía a partir de la frecuencia en la que  $\gamma$  sea imaginaria pura. Dicha *frecuencia de corte* se obtiene igualando la ec. (4-167) con cero:

$$\omega_{c_{mn}}^2 \mu \epsilon = \left( \frac{s_{mn}}{a} \right)^2 \Rightarrow \omega_{c_{mn}} = \frac{s_{mn}}{a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

Como  $\omega = 2\pi f$  y  $1/\sqrt{\mu \epsilon}$  es la velocidad  $v$  de la onda, la expresión anterior puede escribirse también como:

$$f_{c_{mn}} = \frac{s_{mn} v}{2\pi a} \quad (4-168)$$

En cuanto a la constante de fase de cada modo  $mn$ , en función de la frecuencia, también se obtiene de la ec. (4-167):

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{s_{mn}}{a}\right)^2} = j\sqrt{(2\pi)^2 f^2\mu\epsilon - \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^2 f_{c_{mn}}^2}$$

$$\Rightarrow \beta_{mn} = \frac{2\pi}{\nu} \sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2} \quad (4-169)$$

El valor de la frecuencia de corte más baja se deduce fácilmente de la ec. (4-168) y la Tabla 4-5. El valor mínimo de  $s_{mn}$  en dicha tabla es 1.841 y corresponde a  $m = 1$  y  $n = 1$ . De allí que el primer modo TE que se propaga en la guía es el  $TE_{11}$ , y su frecuencia de corte es igual a:

$$f_{c_{11}} = \frac{1.841\nu}{2\pi a} = 0.293 \frac{\nu}{a} \quad (4-170)$$

Para concluir nuestro estudio de los modos TE ( $E_z = 0$ ), recordemos que la componente  $H_z$  está dada por la ec. (4-163). Las demás componentes de los campos eléctrico y magnético se obtienen a partir de las ecs. (4-159) – (4-162), realizando las derivadas parciales correspondientes:

$$E_z = 0 \quad (\text{modos TE})$$

$$H_z = A_0 J_m(h\rho) \cos m\phi \quad (4-163)$$

---

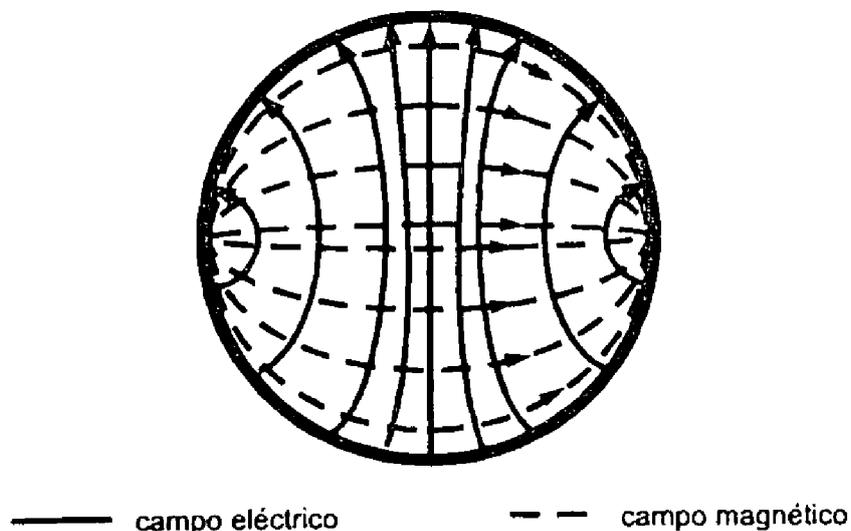

$$E_\rho = \frac{j\omega\mu m}{h^2\rho} A_0 J_m(h\rho) \sin m\phi \quad (4-171)$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{h} A_0 J'_m(h\rho) \cos m\phi \quad (4-172)$$

$$H_\rho = -\frac{j\beta}{h} A_0 J'_m(h\rho) \cos m\phi = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_\phi \quad (4-173)$$

$$H_{\phi} = \frac{j\beta m}{h^2 \rho} A_0 J_m(h\rho) \text{sen } m\phi = \frac{\beta}{\omega\mu} E_{\rho} \quad (4-174)$$

En la Fig. 4-23 se muestra el patrón de los campos transversales del modo  $TE_{11}$  ( $m = 1, n = 1, h = s_{11}/a$ ). En la siguiente sección se demostrará que este modo es el dominante en una guía circular, y si su patrón se compara con el de la Fig. 4-12, se observa que los patrones de la distribución de los campos de los modos dominantes en la guía rectangular y la circular son muy similares, particularmente en el centro de ambas guías. En realidad, con un poco de imaginación, el patrón del modo  $TE_{11}$  (dominante) se podría deducir gráficamente, degenerando o alterando poco a poco la geometría de la guía rectangular para transformarla en circular, respetando las condiciones de frontera en la superficie interior (conductor perfecto). Esta similitud de patrones hace posible que el modo dominante de una guía rectangular pueda generar o “lanzar” al modo dominante dentro de una guía circular, y viceversa, mediante una estructura o unión de transición geométrica que generalmente se denomina *transformador de modos*. Esta estructura que transforma al modo dominante  $TE_{10}$  de la guía rectangular en el modo dominante  $TE_{11}$  de la circular, y viceversa, se emplea en la fabricación de diversos dispositivos de microondas, tales como los atenuadores de rotación que serán vistos en la sección 5.5.1 (véase la Fig. 5-12).



**Fig. 4-23** Campos transversales del modo de propagación  $TE_{11}$  en una guía circular.

## 4.9.2 Los modos TM

En este caso,  $H_z = 0$  y  $E_z$  está dada por la ec. (4-158):

$$E_z = B_0 J_m(h\rho) \cos m\phi \quad (4-175)$$

Ahora la condición de frontera que debe cumplirse es simplemente:

$$E_z \Big|_{\rho=a} = 0 \quad (4-176)$$

De manera que, por observación de la ec. (4-175), se deduce que:

$$E_z \Big|_{\rho=a} = \left[ 0 = J_m(h\rho) \Big|_{\rho=a} \right] \quad (4-177)$$

Siguiendo un razonamiento análogo al que se hizo para los modos TE en la sección anterior, y designando como  $t_{mn}$  a las raíces  $(h\rho)_{mn}$  para las cuales  $J_m(h\rho) = 0$  dadas en la Tabla 4-4, se tiene:

$$ha = t_{mn}$$

$$\Rightarrow h = \frac{t_{mn}}{a} \quad \text{para los modos TM}_{mn} \quad (4-178)$$

$$y \quad \gamma^2 = \left( \frac{t_{mn}}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad (4-179)$$

La frecuencia de corte a partir de la cual hay propagación de estos modos  $\text{TM}_{mn}$  está dada, por lo tanto, por una expresión similar a la ec. (4-168), pero con  $t_{mn}$  en lugar de  $s_{mn}$ :

$$f_{c_{mn}} = \frac{t_{mn} v}{2\pi a} \quad (4-180)$$

y la constante de fase se calcula también con la misma ec. (4-169) de los modos TE, sustituyendo la frecuencia de corte adecuada.

Nuevamente, las demás componentes de los campos eléctrico y magnético se obtienen a partir de las *ecs.* (4-159) – (4-162), realizando las derivadas parciales correspondientes sobre la función  $E_z$  dada por la *ec.* (4-175) y haciendo  $H_z = 0$ :

$$H_z = 0 \quad (\text{modos TM})$$

$$E_z = B_0 J_m(h\rho) \cos m\phi \quad = (4-175)$$

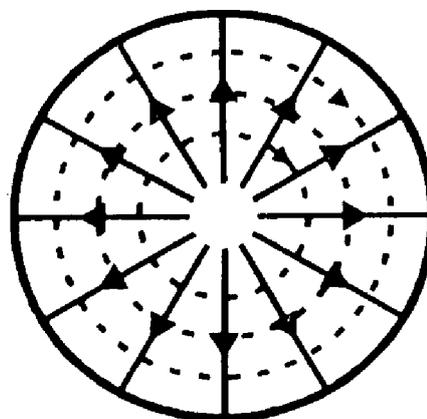
$$E_\rho = -\frac{j\beta}{h} B_0 J'_m(h\rho) \cos m\phi \quad (4-181)$$

$$E_\phi = \frac{j\beta m}{h^2 \rho} B_0 J_m(h\rho) \text{sen } m\phi \quad (4-182)$$

$$H_\rho = -\frac{j\omega\epsilon m}{h^2 \rho} B_0 J_m(h\rho) \text{sen } m\phi = -\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_\phi \quad (4-183)$$

$$H_\phi = -\frac{j\omega\epsilon}{h} B_0 J'_m(h\rho) \cos m\phi = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_\rho \quad (4-184)$$

Como ejemplo, en la Fig. 4-24 se muestra el patrón de los campos transversales del modo  $TM_{01}$  ( $m = 0, n = 1, h = t_{01}/a$ ). Este modo posee



— campo eléctrico      - - - campo magnético

**Fig. 4-24** Campos transversales del modo de propagación  $TM_{01}$  en una guía circular.

simetría circular y resulta útil, por ejemplo, en el diseño de uniones giratorias para los sistemas de radar (véase la Fig. 4-25).

A partir de la Tabla 4-4 y la ec. (4-180), se nota que la frecuencia de corte más baja para un modo TM se obtiene con  $t_{01} = 2.405$  y es igual a:

$$f_{c_{01}} = \frac{2.405 v}{2\pi a} = 0.383 \frac{v}{a} \quad (4-185)$$

Al comparar la ec. (4-185) con la ec. (4-170), se observa que la frecuencia de corte del primer modo TE ( $TE_{11}$ ) es menor que la del primer modo TM ( $TM_{01}$ ). Por lo tanto, el modo  $TE_{11}$  es el *modo dominante* en una guía circular.

**Ejercicio 4-20** Se tiene una guía de ondas circular rellena de poliestireno ( $\epsilon_r = 2.56$ ). El radio interior es igual a 2 cm y la frecuencia de trabajo es de 3.2 GHz. Encuentre los valores de las siguientes características del modo dominante en la guía: a) la frecuencia de corte, b) la longitud de onda característica en el material de propagación, suponiendo que éste fuese ilimitado, c) la longitud de onda en la guía, d) la constante de fase, e) la impedancia de la onda, f) el ancho de banda teórico para que sólo se propague el modo dominante, g) la velocidad de fase, y h) la expresión completa del campo eléctrico en función del espacio y el tiempo.

### Solución

a) El modo dominante es el  $TE_{11}$ . De la ec. (4-170):

$$f_c \Big|_{TE_{11}} = 0.293 \frac{v}{a} = \frac{0.293 c}{a \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{0.293 \times 3 \times 10^8}{0.02 \sqrt{2.56}} = 2.75 \text{ GHz}$$

b) La longitud de onda característica es:

$$\lambda_{\text{característica}} = \frac{\lambda_{\text{vacío}}}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{3.2 \times 10^9 \sqrt{2.56}} = 0.058 \text{ m}$$

c) De las ecuaciones generales (4-84) y (4-88) vistas para los modos TE y TM en la sección 4.6:

$$v_p = \frac{c}{\lambda} \lambda_g \Rightarrow \lambda_g = \frac{\lambda}{c} v_p = \frac{\lambda}{c} \frac{c}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

en donde aquí  $\lambda$  es la longitud de onda característica en el medio de propagación. De modo que:

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} = \frac{0.058}{\sqrt{1 - (2.75/3.2)^2}} = 0.114587 \text{ m}$$

d) De la ec. (4-169):

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{2\pi}{c/\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{f^2 - f_{c_{11}}^2} = \frac{2\pi \times 1.6}{3 \times 10^8} \sqrt{(3.2 \times 10^9)^2 - (2.75 \times 10^9)^2} \\ &= 54.83 \text{ rad/m} \end{aligned}$$

O bien:

$$\beta_{11} = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{0.114587} = 54.83 \text{ rad/m}$$

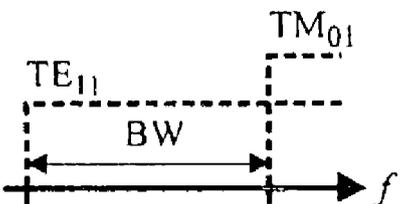
e) De la teoría general vista en la sección 4.7 sobre las impedancias de los modos TE y TM y de la ec. (4-92):

$$\begin{aligned} Z_{TE_{11}} &= \frac{\eta}{\sqrt{1 - (f_{c_{11}}/f)^2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - (2.75/3.2)^2}} \\ &= \frac{235.62}{0.5113} = 460.8 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

Asimismo, la impedancia pedida se puede calcular usando las ecs. (4-171) y (4-174):

$$Z_{TE_{11}} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \frac{\omega\mu}{\beta_{11}} = \frac{2\pi \times 3.2 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{54.83} = 460.8 \quad \Omega$$

f) Para que sólo se propague el modo dominante es necesario que la frecuencia de trabajo sea inferior a la del modo siguiente. Después del modo  $TE_{11}$  aparece el modo  $TM_{01}$ . El ancho de banda teórico, sin considerar márgenes de operación, será entonces igual a:

$$BW = f_c \Big|_{TM_{01}} - f_c \Big|_{TE_{11}}$$


La frecuencia de corte del modo  $TM_{01}$  se obtiene de la ec. (4-180):

$$f_c \Big|_{TM_{01}} = \frac{t_{01} v}{2\pi a} = \frac{2.405 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{2.56} \times 2\pi \times 0.02} = 3.59 \quad \text{GHz}$$

$$BW = 3.59 - 2.75 = 0.84 \quad \text{GHz}$$

g) La velocidad de fase, por definición, es:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

Por lo tanto:

$$v_{p_{11}} = \frac{2\pi f}{\beta_{11}} = \frac{2\pi \times 3.2 \times 10^9}{54.83} = 3.67 \times 10^8 \quad \text{m/s} > c$$

O bien:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda_g} = f\lambda_g$$

$$v_{p_{11}} = 3.2 \times 10^9 \times 0.114587 = 3.67 \times 10^8 \text{ m/s}$$

h) De las ecs. (4-171) y (4-172):

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho + E_\phi \mathbf{a}_\phi + \underbrace{0}_{\tilde{E}_z}$$

$$\mathbf{E} = \left[ \frac{j\omega\mu m}{h^2\rho} A_0 J_m(h\rho) \sin m\phi \right] \mathbf{a}_\rho + \left[ \frac{j\omega\mu}{h} A_0 J'_m(h\rho) \cos m\phi \right] \mathbf{a}_\phi$$

Empleando la ec. (4-166) con  $m = 1$  y  $n = 1$ :

$$h = s_{11}/a = 1.841/0.02 = 92$$

$$\mathbf{E} = \frac{j\omega\mu A_0}{h} \left[ \frac{J_1(92\rho)}{h\rho} \sin \phi \mathbf{a}_\rho + J'_1(92\rho) \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right]$$

Y tomando en cuenta la propagación de la onda en la dirección  $z$ :

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \frac{j\omega\mu A_0}{h} \left[ \frac{J_1(92\rho)}{h\rho} \sin \phi \mathbf{a}_\rho + J'_1(92\rho) \cos \phi \mathbf{a}_\phi \right] \left[ e^{-j\beta z} \right]$$

Finalmente, el campo instantáneo pedido se obtiene realizando la operación siguiente:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\rho, \phi, z, t) = \text{Re} \left[ \mathbf{E}(\rho, \phi, z) e^{j\omega t} \right]$$

con  $h = 92$  y  $f = 3.2$  GHz.

**Ejercicio 4-21** Si en el ejercicio anterior el dieléctrico en el interior de la guía fuese aire, ¿cuánto valdría el ancho de banda teórico con propagación exclusiva en el modo dominante?

*Solución*

La frecuencia de corte del modo dominante  $TE_{11}$  se calcula nuevamente con la ec. (4-170), pero ahora  $v = c$ :

$$f_c \Big|_{TE_{11}} = 0.293 \frac{c}{a} = \frac{0.293 \times 3 \times 10^8}{0.02} = 4.395 \text{ GHz}$$

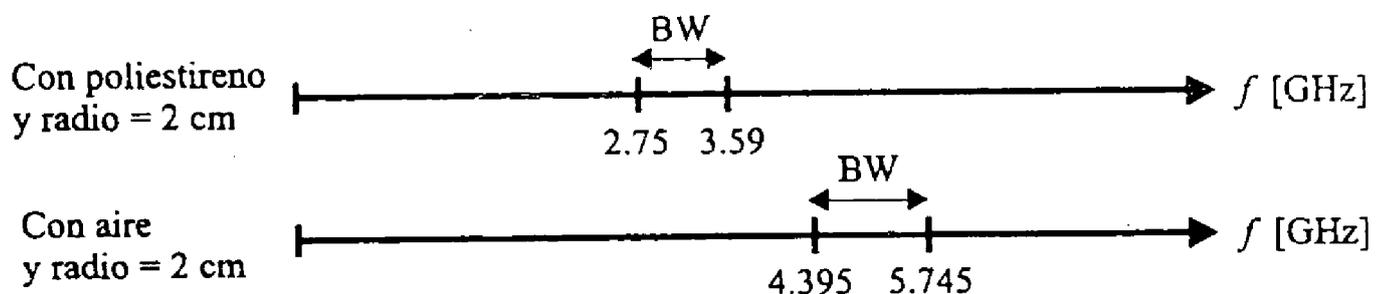
Igualmente, la frecuencia de corte del modo siguiente es, de acuerdo con la ec. (4-180):

$$f_c \Big|_{TM_{01}} = \frac{t_{01} c}{2\pi a} = 5.745 \text{ GHz}$$

De manera que el ancho de banda, con aire en el interior de la guía, es:

$$BW = 5.745 - 4.395 = 1.35 \text{ GHz}$$

Resulta interesante comparar este resultado con el del ejercicio anterior:



**Ejercicio 4-22** Diseñe una guía circular que esté rellena con un material dieléctrico sin pérdidas y cuya permitividad relativa sea igual a 3. En la guía sólo debe existir el modo dominante dentro de un ancho de banda de 1.25 GHz. En su diseño, debe especificar: a) el radio interior de la guía, y b) las frecuencias extremas del ancho de banda de operación.

*Solución*

El procedimiento a seguir es similar al de los dos ejercicios anteriores, pero "al revés". De las ecs. (4-170) y (4-180), se debe obligar que:

$$f_c \Big|_{\text{TM}_{01}} - f_c \Big|_{\text{TE}_{11}} = \frac{t_{01} v}{2\pi a} - 0.293 \frac{v}{a} = 1.25 \text{ GHz}$$

Es decir:

$$\frac{2.405 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{3} \times 2\pi \times a} - \frac{0.293 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{3} a} = 1.25 \times 10^9$$

Ahora, sólo falta despejar el radio  $a$ :

$$1.25 \times \sqrt{3} a \times 10^9 = (1.1483 - 0.879) \times 10^8$$

$$\Rightarrow a = 1.24 \text{ cm}$$

Las frecuencias extremas son:

$$f_{\text{sup.}} = f_c \Big|_{\text{TM}_{01}} = \frac{2.405 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{3} \times 2\pi \times 0.0124} = 5.35 \text{ GHz}$$

$$f_{\text{inf.}} = f_c \Big|_{\text{TE}_{11}} = \frac{0.293 \times 3 \times 10^8}{\sqrt{3} \times 0.0124} = 4.09 \text{ GHz}$$

Ignorando las omisiones de milésimas en los cálculos anteriores, se verifica que el ancho de banda es el especificado:

$$\text{BW} = 5.35 - 4.09 \doteq 1.25 \text{ GHz}$$

**Ejercicio 4-23** Calcule la frecuencia de corte de los primeros seis modos que se propagan en una guía circular, para los casos en que su radio vale 1 cm, 2 cm y 3 cm. Suponga que en el interior de la guía hay aire.

### Solución

La frecuencia de corte de los modos TE y TM está dada, respectivamente, por las ecs. (4-168) y (4-180):

$$f_{c_{mn}} = \frac{s_{mn} c}{2\pi a} \quad = (4-168)$$

$$\Rightarrow a f_{c_{mn}} = \frac{s_{mn} c}{2\pi} = 47.75 \times 10^6 \times s_{mn} \quad (\text{modos TE})$$

$$f_{c_{mn}} = \frac{t_{mn} c}{2\pi a} \quad = (4-180)$$

$$\Rightarrow a f_{c_{mn}} = \frac{t_{mn} c}{2\pi} = 47.75 \times 10^6 \times t_{mn} \quad (\text{modos TM})$$

De estos resultados, se observa que los seis valores más bajos de  $s_{mn}$  y  $t_{mn}$ , en conjunto, determinan las primeras seis frecuencias de corte. De las Tablas 4-4 y 4-5 y de la Fig. 4-22, se obtienen los valores siguientes:

$$\begin{array}{lll} s_{11} = 1.841 & t_{01} = 2.405 & s_{21} = 3.054 \\ s_{01} = 3.832 & t_{11} = 3.832 & t_{31} = 4.20 \end{array}$$

Por lo tanto, las seis primeras frecuencias de corte, en función del radio  $a$  son:

Modo	$f_c$
TE <sub>11</sub>	$8.79 \times 10^7 / a$
TM <sub>01</sub>	$11.48 \times 10^7 / a$
TE <sub>21</sub>	$14.58 \times 10^7 / a$
TE <sub>01</sub>	$18.30 \times 10^7 / a$
TM <sub>11</sub>	$18.30 \times 10^7 / a$
TE <sub>31</sub>	$20.05 \times 10^7 / a$

El resto de la solución consiste en sustituir  $a = 1$  cm, 2 cm y 3 cm:

Modo	$f_c$ [GHz]		
	$a = 1$ cm	$a = 2$ cm	$a = 3$ cm
TE <sub>11</sub>	8.79	4.395	2.93
TM <sub>01</sub>	11.48	5.74	3.83
TE <sub>21</sub>	14.58	7.29	4.86
TE <sub>01</sub>	18.3	9.15	6.1
TM <sub>11</sub>	18.3	9.15	6.1
TE <sub>31</sub>	20.05	10.02	6.68

Nótese que los modos TE<sub>01</sub> y TM<sub>11</sub> tienen la misma frecuencia de corte y, por lo tanto, son modos degenerados.

### 4.9.3 Estándares de guías y aplicaciones

Al igual que en el caso de las guías rectangulares, cuyos estándares fueron presentados en la sección 4.8.3 (Tabla 4-2), también existe una variedad de estándares de guías circulares. En el sistema de designación EIA (Electronic Industry Association, Estados Unidos), las guías se clasifican con la sigla WC seguidas de un número; así, por ejemplo, las guías WC269 y WC205 tienen, respectivamente, un rango recomendado de frecuencias de 3.7 a 4.2 GHz y de 5.9 a 6.425 GHz. Estas frecuencias corresponden a la banda C; el límite inferior es mayor que la frecuencia de corte del modo dominante TE<sub>11</sub>, y el límite superior es menor que la frecuencia de corte del modo siguiente o TM<sub>01</sub>. Por otro lado, en el sistema IEC (International Electrotechnical Commission) las guías se clasifican con la letra C seguida de un número diferente al de su equivalente en el sistema EIA. En la Tabla 4-6 se proporcionan los datos de algunos de estos estándares, incluyendo la frecuencia de corte de los modos extremos del rango teórico de operación y los niveles teóricos de atenuación del modo dominante a una cierta frecuencia de referencia.

Tabla 4-6 Lista de algunos estándares para guías circulares (sistema IEC), sus frecuencias de corte y niveles teóricos de atenuación.

Designación	Radio (mm)	Frecuencia de corte (GHz)		$f$ (GHz)	Atenuación (dB/m)
		TE <sub>11</sub>	TM <sub>01</sub>		
C30	35.7	2.46	3.21	2.95	0.0184
C35	30.5	2.88	3.76	3.45	0.0233
C40	26.0	3.38	4.41	4.06	0.0297
C48	22.2	3.95	5.16	4.74	0.0375
C56	19.0	4.61	6.02	5.53	0.0473
C65	16.3	5.40	7.05	6.48	0.0599
C76	13.9	6.32	8.26	7.59	0.0759
C89	11.9	7.37	9.63	8.85	0.0956
C140	7.54	11.6	15.2	13.98	0.1893
C290	3.56	24.6	32.2	29.54	0.5834

De los datos del texto y de la Tabla 4-6 se observa que, por ejemplo, la guía C40 es el equivalente de la guía WC269, y la C65 es equivalente a la WC205. En términos de la frecuencia de trabajo, la nomenclatura del sistema IEC es más práctica que la del sistema EIA, ya que, por ejemplo y observando las frecuencias de corte de la misma Tabla 4-6, la guía C40 se usa en "frecuencias cercanas" a los 4.0 GHz y la guía C65 se emplea en "frecuencias cercanas" a los 6.5 GHz.

En la instalación de sistemas de microondas, la guía circular es útil en tramos verticales largos, además de que por ella es posible transmitir dos modos dominantes TE<sub>11</sub> simultáneamente, con polarización cruzada. Dicha facilidad de enviar por la misma guía informaciones diferentes en el mismo rango de frecuencias se debe a su propia geometría circular o propiedad de *degeneración*. Esto se puede comprender por observación de la Fig. 4-23, ya que el patrón del modo dominante se puede orientar en cualquier dirección, rotándolo sobre el eje  $z$  de la guía. De esta forma, dos modos dominantes

pueden transmitirse al mismo tiempo, con sus líneas de campo eléctrico orientadas con una diferencia de  $90^\circ$  geométricos entre sí.

La guía circular también puede emplearse en la construcción de uniones giratorias asociadas con las antenas de los radares; en la Fig. 4-25 se muestra un boceto de este tipo de uniones. Tales dispositivos pueden girar a cientos de revoluciones por minuto (varias vueltas por segundo), según su diseño y aplicación, y las pérdidas que introducen son bajas, inclusive hasta del orden de 0.15 dB. En este caso, el modo que se propaga dentro de la sección circular es el  $TM_{01}$ , ya que es precisamente su patrón con simetría circular

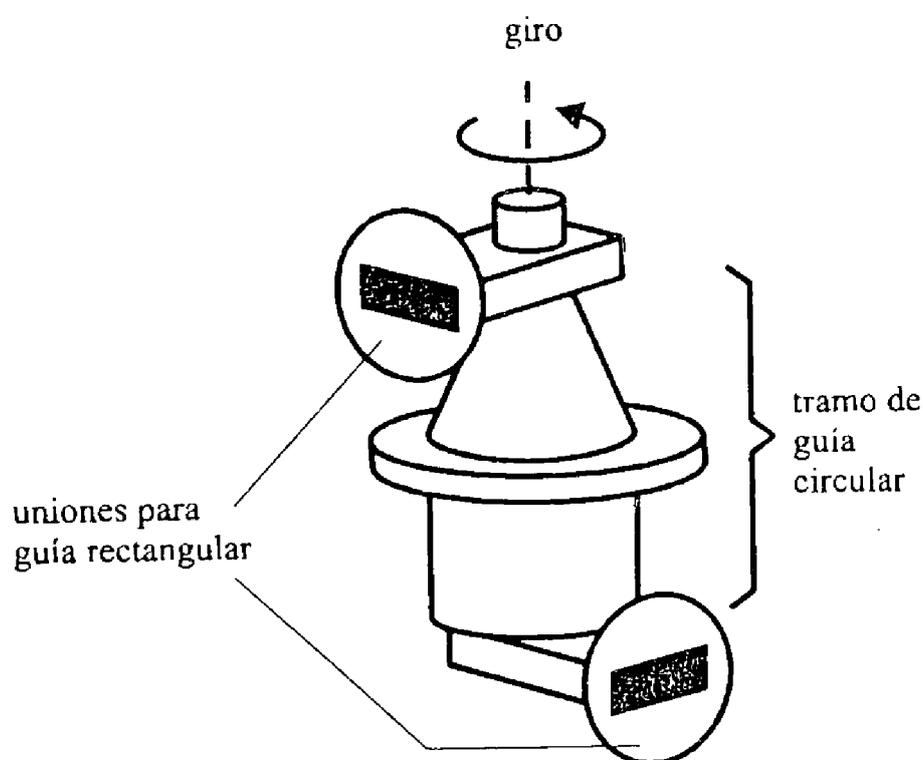
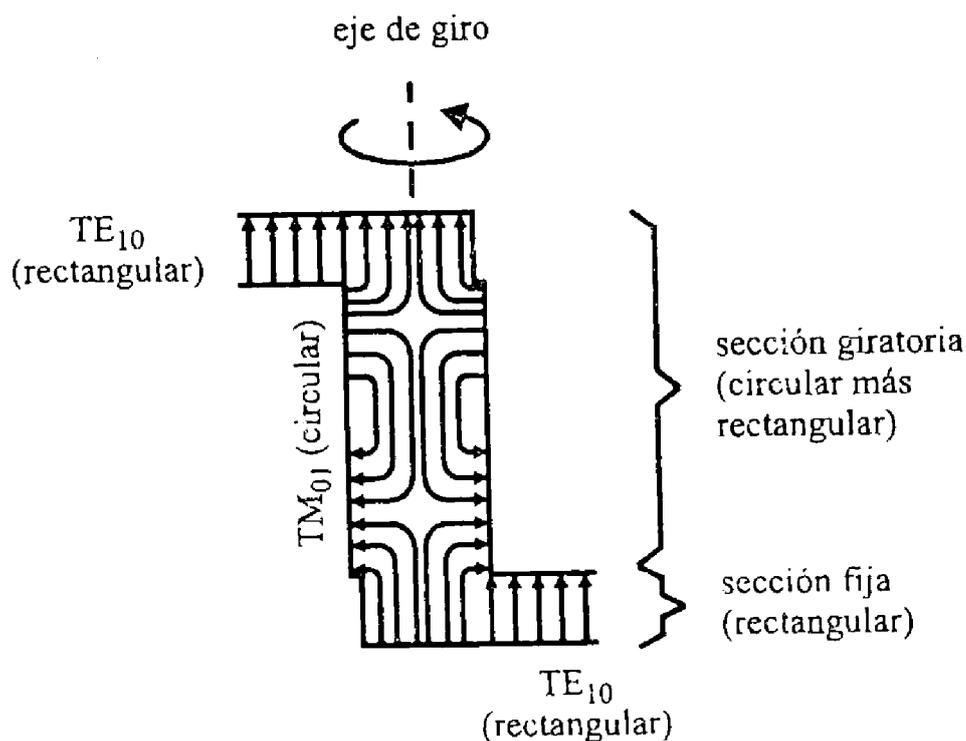


Fig. 4-25 Unión giratoria de microondas.

(Fig. 4-24) el que se desea aprovechar. Las uniones de entrada y salida del dispositivo transforman al modo  $TE_{10}$  de la guía rectangular en el modo  $TM_{01}$  dentro de la sección de guía circular, y viceversa. En la Fig. 4-26 se indica cómo el modo  $TE_{10}$  “lanza” al modo  $TM_{01}$  en la sección circular giratoria; si el lector imagina una revolución de dicha sección, notará que se forma el patrón radial de líneas de campo eléctrico de la Fig. 4-24. En la misma Fig. 4-26 se muestra cómo el modo  $TM_{01}$  se transforma en el modo  $TE_{01}$  en la guía rectangular de salida. Las reflexiones en las uniones se

reducen colocando irises en las secciones rectangulares (véase la sección 5.4.1) y el modo dominante  $TE_{11}$  se suprime en la sección circular con anillos metálicos en su interior. Otra ventaja de usar el modo  $TM_{01}$  en estas uniones giratorias es que, debido a la simetría circular de su patrón, la longitud de la fase eléctrica de la señal es independiente del ángulo de rotación.



**Fig. 4-26** Boceto que ilustra la transformación de las líneas de campo eléctrico de los modos en una unión giratoria.

Vale la pena efectuar aquí un breve paréntesis, con el fin de hacer notar que las guías de ondas y sus dispositivos asociados también tienen aplicaciones muy importantes en otras ramas, por ejemplo la medicina. Así, existen diseños de uniones giratorias parecidas a la de la Fig. 4-25, para conectar la salida de magnetrones o klistrones de alta potencia con aceleradores lineales, que son empleados para tratar el cáncer con electrones o rayos X.

Otras aplicaciones de las guías circulares en el campo de las telecomunicaciones incluyen la fabricación de cambiadores de fase, atenuadores de alta precisión y otros dispositivos de microondas, que serán estudiados en el capítulo 5, así como la transmisión con polarización circu-

lar, a diferencia de la polarización lineal descrita hasta ahora. También son útiles para alimentar antenas de corneta cónicas, que radian con el modo dominante  $TE_{11}$  en el plano de la apertura. Sin embargo, el patrón de radiación que se obtiene no es simétrico, a pesar de la simetría circular de la corneta. En un satélite que requiera cobertura global, por ejemplo, esta falta de simetría puede ser una desventaja, y una manera de resolver el problema es usar una corneta corrugada, con salientes en su interior (Fig. 4-27). El resultado es una antena que opera en *modo híbrido*, el cual consiste en una combinación no lineal de modos TE y TM y que mejora la simetría del patrón de radiación, además de reducir los lóbulos laterales.

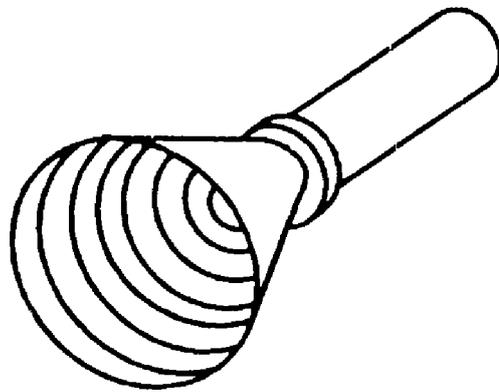


Fig. 4-27 Antena de corneta corrugada o acanalada, alimentada por una guía circular.

Por su parte, las guías rectangulares vistas en la sección 4.8 son útiles para alimentar antenas de corneta con apertura rectangular, normalmente del tipo piramidal.

A pesar de todas las cualidades anteriores y su facilidad de fabricación, las guías circulares tienen algunos “defectos”. Uno de ellos es que su ancho de banda en el modo dominante (1.3:1) es menor que el de una guía rectangular de similar dimensión transversal (2:1), razón por la cual esta última se prefiere para transmitir grandes cantidades de información. Para la guía circular, el ancho de banda relativo entre los dos primeros modos es fijo, pues sólo depende del radio  $a$  (véase el Ejercicio 4-23). En cambio, para la rectangular y tal como se vio en la sección 4.8, dicho ancho de banda relativo

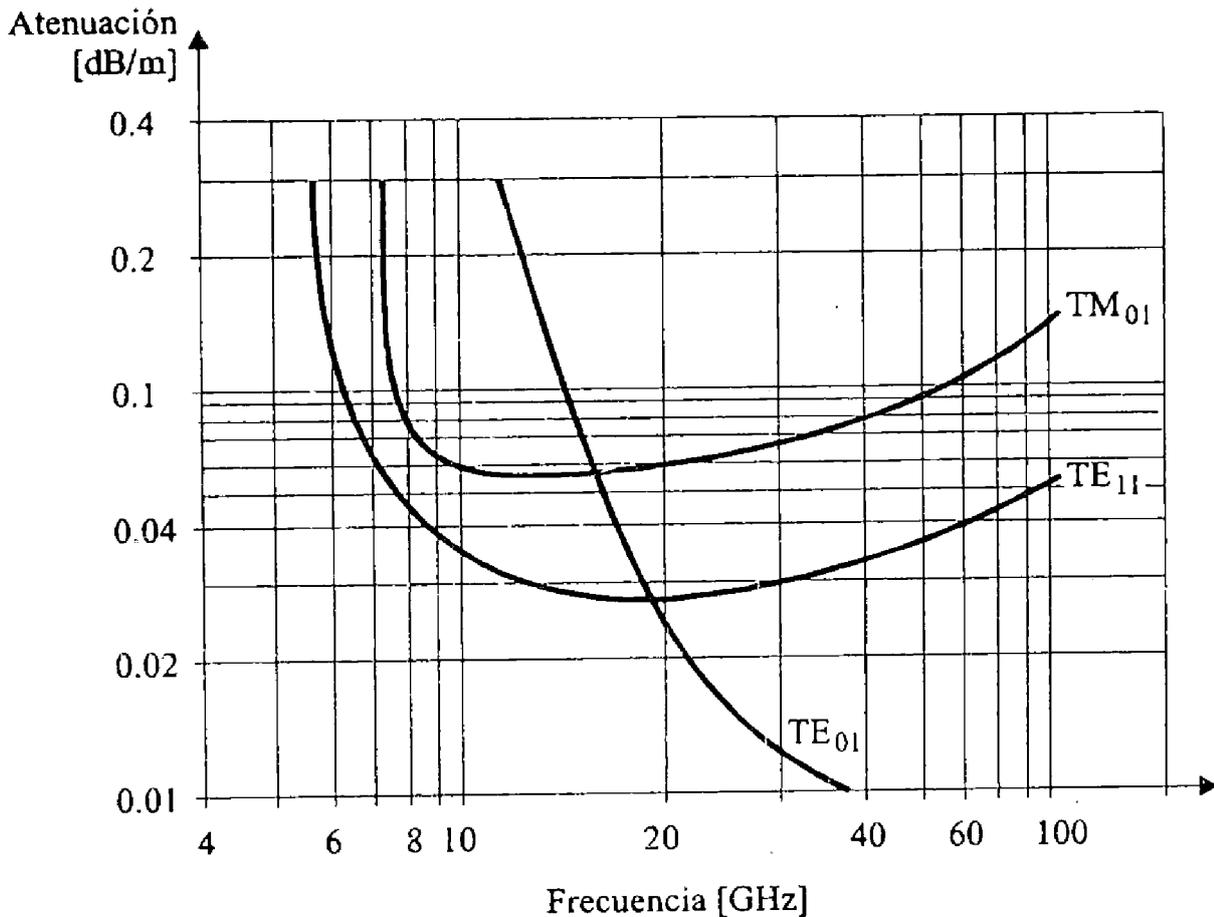
es variable y función del cociente  $a/b$ ; es de 2:1 cuando  $a/b \geq 2$  y se reduce si  $a/b < 2$ .

Otro inconveniente de la guía circular es que, cuando transmite con polarización lineal (Fig. 4-23), la dirección de ésta puede ser girada por imperfecciones en el acabado de la superficie interior de la guía, lo cual produce pérdidas por polarización cruzada. En cambio, la geometría transversal de una guía rectangular no permite desviaciones de la polarización, y ésta es otra razón por la cual se le prefiere en muchos sistemas de transmisión. Una manera de evitar la desviación de la polarización que ocurre en la guía circular es usar una guía con sección transversal elíptica (véase la sección 4.10).

#### 4.9.4 Potencia transmitida y atenuación

Para el modo dominante  $TE_{11}$ , el valor máximo del campo eléctrico ocurre en el centro de la guía. La potencia máxima transmitida puede calcularse por medio de la integración del vector de Poynting, en forma análoga a como se mostró para la guía rectangular en la sección 4.8.6, con sus componentes de campo adecuadas. Sin embargo, el procedimiento es muy laborioso, debido a la necesidad de integrar ahora funciones de Bessel; por lo tanto, dicha evaluación para la guía circular se omitirá aquí y solamente se comentará que una guía de radio  $a$  puede transmitir más potencia que una guía rectangular, cuya base también valga  $a$ . En cuanto a la atenuación producida por la guía circular, ésta es menor que la de la rectangular a una determinada frecuencia de corte, pero a costa de que la circular equivalente es más grande y pesada.

En la Fig. 4-28 se muestran las curvas típicas de atenuación para los modos  $TE_{11}$ ,  $TM_{01}$  y  $TE_{01}$  en una guía de radio igual a 1.5 cm, cubierta con una película de plata en su interior. Para otros valores de  $a$  y tipo de metal en el interior (por ejemplo, cobre), las curvas se desplazan vertical y horizontalmente, pero su forma es muy similar. Nótese que la atenuación de los modos  $TE_{11}$  y  $TM_{01}$  tiene un valor mínimo a una cierta frecuencia y después crece, análogamente a lo encontrado para las guías rectangulares (véase la Fig. 4-18). Pero, en cambio, la atenuación del modo  $TE_{01}$  decrece indefinidamente conforme la frecuencia aumenta; este hecho convierte a dicho modo en una opción interesante para los sistemas de transmisión de larga distancia.



**Fig. 4-28** Curvas típicas de atenuación en una guía circular de radio interior  $a = 1.5$  cm, para los modos de propagación  $TE_{11}$ ,  $TM_{01}$  y  $TE_{01}$ .

En realidad, la característica anterior de que la atenuación disminuya monótonicamente con la frecuencia se ha encontrado para todos los modos  $TE_{0n}$  cuando la geometría transversal de la guía es circular y, en consecuencia, es un área de estudio que ha recibido mucho interés en las últimas décadas, en especial a frecuencias con longitud de onda milimétrica, del orden de 50 GHz. Ya se han logrado atenuaciones del orden de 2 dB/Km, que son comparables a las de muchas fibras ópticas que operan en la primera ventana (véanse los capítulos 7 y 8). Sin embargo, su uso extensivo aún no es posible, ya que existen varios problemas, como la forma de excitar la guía y de conservar el modo  $TE_{0n}$ , suprimiendo otros modos indeseables, a un costo razonable; por ejemplo, para que exista el modo  $TE_{01}$ , es necesario usar frecuencias en las que también se propagan los modos  $TE_{11}$ ,  $TM_{01}$ ,  $TE_{21}$  y  $TM_{11}$  (véase el Ejercicio 4-23). Si la guía fuese ideal y perfecta, no habría problema; pero las curvaturas e irregularidades geométricas en el

acabado de fabricación de la guía pueden provocar acoplamientos de energía de los modos indeseables con el  $TE_{01}$ , que resulta en dispersión y distorsión de la señal deseada, así como mayor atenuación cuando parte de la potencia del modo  $TE_{01}$  se transforma en otros modos.

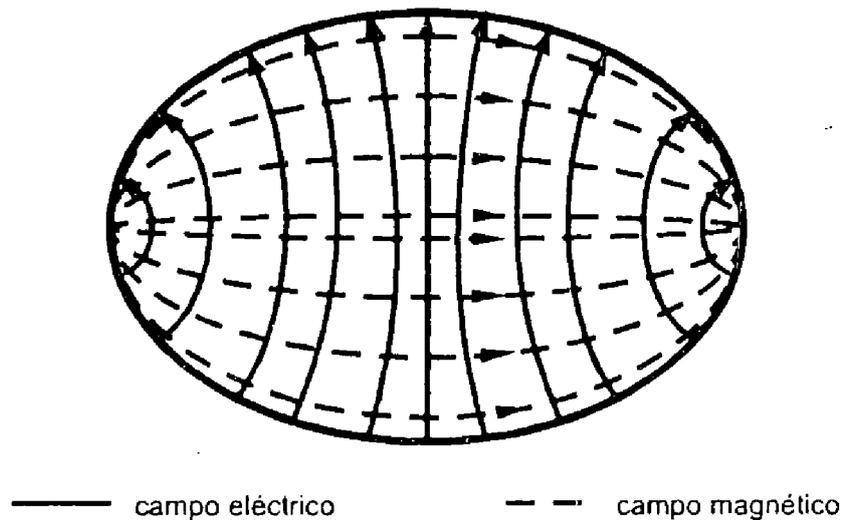
La razón por la cual el modo  $TE_{01}$  (y de hecho, todos los modos  $TE_{0n}$ ) presente una atenuación que disminuye progresivamente con la frecuencia, se puede explicar físicamente por su distribución de corrientes en las paredes interiores de la guía. Estas corrientes tienen un patrón circunferencial, mientras que los otros modos tienen corrientes longitudinales, paralelas a la dirección axial. El conocimiento de estas diferencias permite, a la vez, idear métodos para suprimir los modos indeseables en la guía, de tal forma que sólo se propague el modo  $TE_{01}$ . Para esto, en lugar de que la guía sea lisa en su interior, su superficie se puede aproximar por una hélice metálica muy cerrada, sostenida por un dieléctrico rígido, y con un barniz aislante entre espira y espira; con esto, se impide que los modos indeseables —cuyas corrientes deben ser longitudinales— se propaguen, y sólo se transmite el modo  $TE_{01}$ .

Gracias al descubrimiento anterior, en los años 70 se pensó utilizar guías circulares “helicoidales” que transmitiesen en el modo  $TE_{01}$  en los enlaces de larga distancia, pero los logros obtenidos casi inmediatamente con las fibras ópticas de baja atenuación y menor costo, hicieron que dichos proyectos fuesen abandonados, al menos por lo pronto.

## 4.10 Guías elípticas

En párrafos anteriores se vio que la guía circular presenta el inconveniente de que, debido a su simetría de revolución, la dirección de la polarización mostrada en la Fig. 4-23 para el modo dominante puede girar indeseablemente, puesto que no hay ninguna dirección obligada o privilegiada desde el punto de vista geométrico. Dicha dirección depende del patrón de líneas de campo de la sonda que excite al modo en la guía y de las imperfecciones que ésta pueda tener. Por tal razón, en muchos sistemas de transmisión, se prefiere utilizar guías elípticas en lugar de circulares.

En una guía elíptica, la dirección de la polarización ya no puede girar, pues la asimetría de su sección transversal obliga a la polarización a conservar una dirección fija (Fig. 4-29), ya sea paralela al eje mayor o al eje menor de la elipse; en general, se prefiere usar la dirección paralela al eje menor, tal



**Fig. 4-29** Campos transversales del modo dominante de propagación en una guía elíptica.

como se muestra en la figura. Nótese que la guía elíptica puede ser considerada como el paso intermedio de la transición de una guía circular a una guía rectangular.

La guía elíptica más popular es del tipo flexible corrugado, desde hace unos 30 años. Es fácil de instalar, porque no necesita transiciones para realizar curvaturas o dobleces, y su atenuación es menor que la de una guía rectangular de dimensiones transversales similares. Por ejemplo, a 6 GHz (banda C), la guía elíptica WE61 tiene una atenuación aproximada de 4 dB/100 m, en comparación con la guía WR137 (véanse las Tablas 4-2 y 4-3) que sufre una atenuación de 7 a 8 dB en una longitud similar. En la Tabla 4-7 se incluyen algunos otros estándares de guías elípticas.

La guía elíptica de cobre corrugado se usa como conducto para alimentar antenas de microondas en el rango aproximado de frecuencias de 2 a 20 GHz. También hay guías lisas semirrígidas, fabricadas con aluminio puro, que pueden ser dobladas y soportan condiciones ambientales muy adversas; se emplean, por ejemplo, en los radares de embarcaciones militares o de vigilancia costera.

Tal como se indicó en la Fig. 4-29, el modo dominante en una guía elíptica tiene un patrón transversal de líneas de campo eléctrico muy parecido al de los modos dominantes de las guías rectangular ( $TE_{10}$ ) y circular ( $TE_{11}$ ). Este modo dominante se designa como  $TE_{C11}$ . Su frecuencia de corte

**Tabla 4-7** Lista de algunos estándares de guías elípticas (sistema ELA) y su rango recomendado de frecuencias de operación.

Designación	Frecuencias de operación (GHz)
WE 37	3.4 - 4.2
WE 44	4.2 - 5.0
WE 56	5.4 - 6.5
WE 61	5.6 - 6.425
WE 71	7.1 - 8.6
WE 107	8.5 - 11.7
WE 122	12.2 - 13.2

depende del cociente entre los dos ejes de su sección transversal elíptica, que generalmente es de 0.52, y en su deducción matemática es necesario emplear funciones de Mathieu. El lector interesado en profundizar sobre este tema puede consultar el libro de Marcuvitz o los artículos técnicos mencionados en la sección de Referencias e identificables fácilmente por su título.

## 4.11 Problemas

**4.11.1** Se tienen dos placas paralelas de cobre, separadas 3 cm entre sí. Diga qué modos se propagan a 2 GHz y a 9 GHz. En ambos casos, para los modos que se propaguen, obtenga la constante de fase, la velocidad de fase, la velocidad de grupo y la impedancia de onda a las frecuencias especificadas. Considere que el dieléctrico entre las dos placas es aire. [2 GHz: TEM / 9 GHz: TEM, TE<sub>1</sub> y TM<sub>1</sub>].

**4.11.2** Repita el problema anterior empleando cuarzo como dieléctrico. [2 GHz: TEM / 9 GHz: TEM, TE<sub>1</sub>, TM<sub>1</sub>, TE<sub>2</sub>, TM<sub>2</sub>, TE<sub>3</sub> y TM<sub>3</sub>].

**4.11.3** Se tiene una guía de ondas rectangular del estándar WG16, con aire en su interior. Esta guía es útil para radares militares que funcionan en <sup>para 2.84</sup>

la banda X. Considere sus dimensiones interiores como  $a = 2.29$  cm y  $b = 1.02$  cm. Se desea que la guía transmita solamente en el modo dominante y que la frecuencia de trabajo tenga un valor de cuando menos 25% arriba de la frecuencia de corte del modo dominante, pero que tampoco sea mayor que el 95% de la siguiente frecuencia de corte. ¿Cuál es el rango permisible de frecuencias de trabajo? [ $8.188$  GHz  $< f < 12.445$  GHz].

**4.11.4** Una guía de ondas rectangular tiene dimensiones transversales interiores de 3 cm x 2 cm. El dieléctrico es aire y la frecuencia de trabajo es de 10 GHz. a) Diga cuántos modos se propagan a esa frecuencia, cuáles son y cuánto vale su frecuencia de corte correspondiente. b) Conocida la frecuencia de corte del modo dominante de esta guía rectangular, encuentre el diámetro interior que debería tener una guía circular con aire como dieléctrico, de tal manera que la frecuencia de corte del modo dominante de esta segunda guía sea igual a la del dominante de la rectangular. c) Calcule el valor de la impedancia de onda para el modo dominante en ambos casos, a la frecuencia de operación de 10 GHz. [a) 7 modos:  $TE_{10}$  ( $f_c = 5$  GHz),  $TE_{01}$  ( $f_c = 7.5$  GHz),  $TM_{01}$  ( $f_c = 7.5$  GHz),  $TE_{11}$  ( $f_c = 9$  GHz),  $TM_{11}$  ( $f_c = 9$  GHz),  $TE_{20}$  ( $f_c = 10$  GHz) y  $TM_{20}$  ( $f_c = 10$  GHz). b) diámetro = 3.516 cm. c)  $Z = 435 \Omega$  (rectangular),  $Z = 435 \Omega$  (circular)].

**4.11.5** Considere una guía rectangular del estándar WG18 y que transmite a 15 GHz. Si el dieléctrico en su interior es aire, ¿cuánto valen la longitud de onda en la guía, la constante de fase, la velocidad de fase y la velocidad de grupo? [ $\lambda_g = 2.58$  cm,  $\beta = 243.2$  rad/m,  $v_p = 3.87 \times 10^8$  m/s,  $v_g = 2.32 \times 10^8$  m/s].

**4.11.6** Suponga que, por alguna razón, la guía rectangular del ejercicio anterior se debe rellenar con polietileno. Calcule la frecuencia de corte del modo dominante y multiplíquela por 1.2. Esta será la frecuencia de operación. Verifique primero que dicha frecuencia de operación sea inferior a la frecuencia de corte de cualquier otro modo superior; después calcule la longitud de onda en la guía, la constante de fase, la velocidad de fase y la velocidad de grupo. [ $f_{\text{operación}} = 7.578$  GHz,  $\lambda_g = 4.76$  cm,  $\beta = 131.9$  rad/m,  $v_p = 3.61 \times 10^8$  m/s,  $v_g = 1.1 \times 10^8$  m/s].

**4.11.7** Efectúe las operaciones necesarias para demostrar la validez de la ec. (4-135), que define al coeficiente de atenuación para el modo dominante en una guía rectangular con aire en su interior.

**4.11.8** El diámetro interno de una guía circular es de 6 cm. Determine cuál es el rango teórico de frecuencias en el que se puede transmitir sólo con el modo dominante. También calcule el valor de la impedancia de onda de este modo, evaluada en la frecuencia central del rango encontrado. Considere que dentro de la guía hay aire. [ $2.93 \text{ GHz} \leq f < 3.826 \text{ GHz}$ ,  $Z = 757 \Omega$ ].

**4.11.9** Diseñe una guía circular, con aire en su interior, que transmita al modo dominante exclusivamente en el rango de frecuencias de 6 a 10 GHz. [ $11.48 \text{ mm} < a < 14.65 \text{ mm}$ ].

**4.11.10** El diámetro interno de una guía circular rellena con polipropileno es de 5 cm. Determine el rango de frecuencias permisible para transmitir sólo en el modo dominante. De ese rango, elija la frecuencia central y calcule la constante de fase, la velocidad de fase y la impedancia de onda. [ $2.34 \text{ GHz} < f < 3.06 \text{ GHz}$ ,  $\beta = 42.3 \text{ rad/m}$ ,  $v_p = 4 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $Z = 504 \Omega$ ].

**4.11.11** La base, altura y longitud de un resonador rectangular miden, respectivamente, 3.53 cm, 2.88 cm y 5 cm. Calcule las dos primeras frecuencias de resonancia. [ $5.2 \text{ GHz}$ ,  $6 \text{ GHz}$ ].

# Algunos componentes fundamentales de los sistemas de guías de ondas

---

En este capítulo se estudiarán algunos de los componentes más importantes empleados en sistemas de microondas, tales como acopladores de impedancias, cambiadores de fase y atenuadores. Sin embargo, antes de entrar en materia, tal vez sea útil hacer un breve resumen, a modo de revisión y comparación, sobre los cables coaxiales y las guías de ondas.

## 5.1 Comparación entre una línea coaxial y una guía de ondas

En base a lo estudiado en los capítulos anteriores, el parámetro más importante que distingue a las líneas de dos conductores con relación a las guías huecas o guías de ondas es el rango de frecuencias en el que pueden operar satisfactoriamente, transmitiendo en su modo dominante de propagación respectivo. El mismo rango determina el ancho de banda de la línea y, en consecuencia, su capacidad para transmitir información. Desde luego, tal como también se ha visto, existen otros aspectos importantes que complementan la descripción funcional de la línea, como son la potencia máxima que puede transmitir, la atenuación que se produce en la señal y la misma facilidad o no de construirla económicamente. Ya que dentro de las líneas de dos conductores, el cable coaxial es el más popular en los sistemas

de banda ancha, a continuación se comparará con la guía de ondas rectangular, que a su vez es mucho más común que la circular.

### ***Modo de propagación***

a) Cable coaxial.- Puede transmitir una onda TEM desde la frecuencia cero hasta una frecuencia de corte muy alta, en la que se inicia la aparición de modos superiores de propagación. Generalmente, este cable se usa a frecuencias inferiores a dicha frecuencia de corte. El rango de operación en el modo dominante TEM es suficiente para transmitir varios canales de televisión o datos a varios megabits por segundo. Entre otros usos, es común su empleo en sistemas comerciales de distribución de televisión por cable, circuito cerrado en edificios, y conexiones entre aparatos electrónicos y de computación (véase la sección 3.3).

b) Guía de ondas rectangular.- A frecuencias bajas, esta estructura no puede transmitir nada, pues todos los modos posibles de propagación son evanescentes. Para una guía de dimensiones prácticas, es preciso usar frecuencias altas, a partir de la frecuencia de corte del modo dominante ( $TE_{10}$ ) y hasta un poco antes de alcanzar la frecuencia de corte del modo siguiente. Esta operación monomodo se puede obtener en un rango de frecuencias muy ancho (véase la Tabla 4-2) y su capacidad de transmisión de información es mucho mayor que la de un cable coaxial.

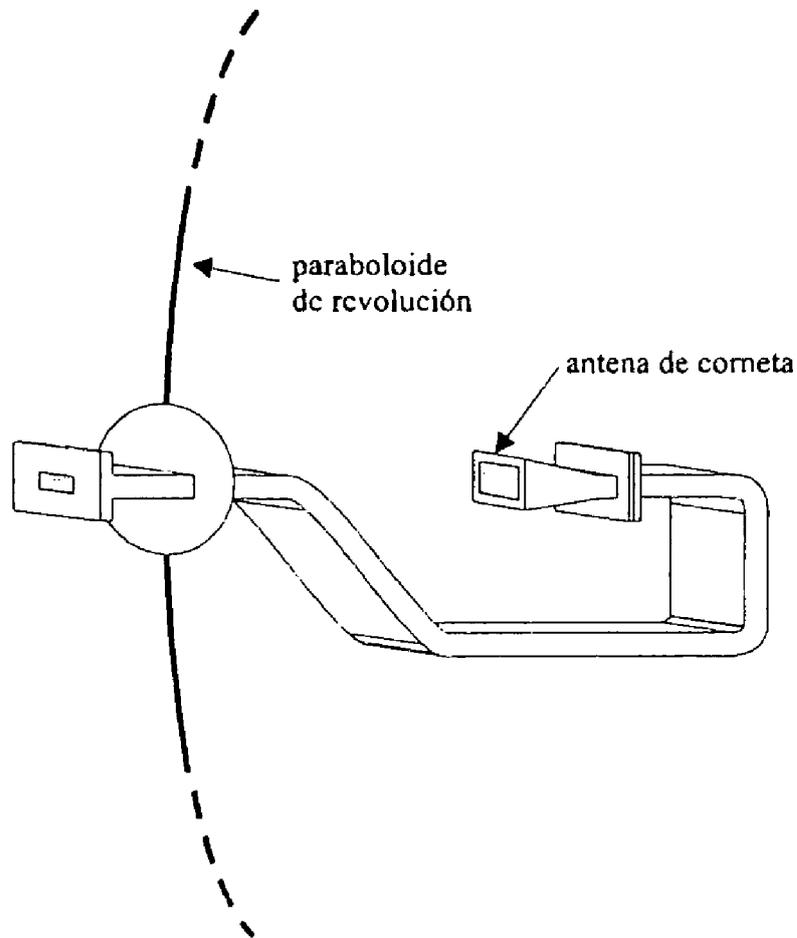
En lo que se refiere a enlaces cortos, la guía de ondas es muy importante para alimentar sistemas de microondas terrestres (Fig. 5-1), estaciones terrenas transmisoras y receptoras, satélites de comunicación y radares, entre otras aplicaciones (sección 4.8).

### ***Atenuación***

a) Cable coaxial.- Su coeficiente de atenuación aumenta continuamente con la frecuencia.

b) Guía de ondas rectangular.- Su coeficiente de atenuación es mínimo en un cierto rango de frecuencias.

En términos generales, las guías de ondas presentan menos atenuación que un cable coaxial, suponiendo que las dos opciones fuesen posibles a

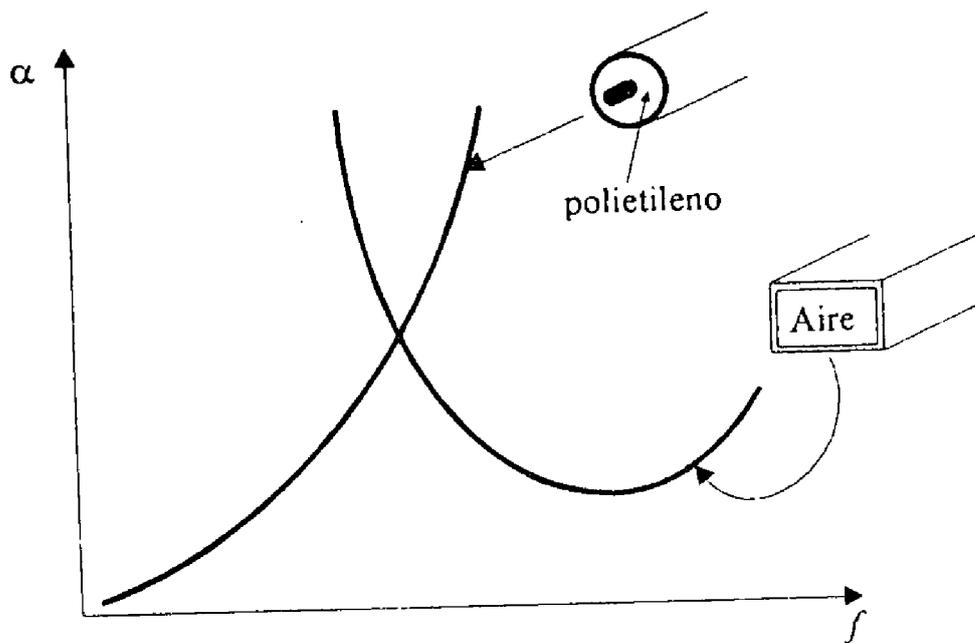


**Fig. 5-1** Tramo de guía rectangular con secciones dobladas, empleado para alimentar la antena de corneta de un plato parabólico. El bloqueo producido por la corneta y su soporte se elimina si la configuración del plato parabólico es del tipo "off-set" o de alimentación descentrada.

una frecuencia dada de trabajo. Tal como se mencionó en la sección 3.3, una parte de la atenuación en un cable se debe a las pérdidas producidas por el dieléctrico que le da soporte al conductor interno. En una guía, el dieléctrico por lo general es aire y no se tiene este problema. Sin embargo, en este último caso, la atenuación es muy alta cerca de la frecuencia de corte. En la Fig. 5-2 se muestran comparativamente las curvas típicas de operación de un cable coaxial y una guía rectangular, tanto en lo que se refiere a su rango de frecuencias como a la atenuación que presentan.

### **Dispersión**

a) Cable coaxial.- Como la onda de propagación dominante es TEM y la velocidad de fase es prácticamente independiente de la frecuencia (*ec. 2-26*), dentro del rango de operación, la dispersión de las componentes de una señal modulada es insignificante.



**Fig. 5-2** Comparación aproximada del rango de frecuencias y la atenuación típicos de un cable coaxial y una guía rectangular.

b) Guía de ondas rectangular.- En este caso, la velocidad de fase sí es dependiente de la frecuencia (*ec. 4-105*) y las bandas laterales de una señal modulada sufren retrasos que se traducen en dispersión y distorsión de la señal recuperada.

### **Potencia máxima de transmisión**

Tanto en el caso de un cable coaxial como en el de una guía, el factor que limita la potencia máxima que se puede transmitir es el dieléctrico, cuyo aislamiento no debe romperse al aplicar los campos eléctricos asociados con la potencia. Si el nivel máximo permisible del campo eléctrico es superado, ocurrirá el "rompimiento" del aislante. En la sección 4.8.6 se mencionó que una forma de aumentar el aislamiento y la capacidad de transmisión de potencia en una guía es presurizándola con nitrógeno seco (a unas 3 atmósferas) o algún otro gas.

En términos generales, una guía puede transmitir más potencia que un cable coaxial. Esto resulta de particular utilidad para enlaces inalámbricos alimentados por guías, como es el caso de las antenas de los radares de largo alcance.

## 5.2 Ondas estacionarias en guías de ondas

En el caso de las guías huecas es posible analizar ciertas características de transmisión en base a la teoría de circuitos, de modo similar al análisis de una línea de dos conductores. En efecto, dentro de una guía puede haber reflexiones y ondas estacionarias. Estas se pueden reducir empleando técnicas de acoplamiento con elementos que presenten cierta impedancia (o admitancia), al igual que como se vio en el caso de las líneas usando "stubs". La carta de Smith también puede emplearse en estos casos. Los elementos que se usan para el acoplamiento de impedancias serán descritos en la sección 5.4; por ahora, procederemos a definir la terminología equivalente de líneas de transmisión aplicada a circuitos de guías de ondas.

Supóngase que una especie de tornillo o miniposte metálico se encuentra en el interior de una guía rectangular, tal como se muestra en la Fig. 5-3. Para efecto del análisis que procederá, conviene elegir la posición del obstáculo en  $z = 0$ . El poste se interpone al paso libre de las ondas electromagnéticas desde la base de la guía hasta una cierta altura.

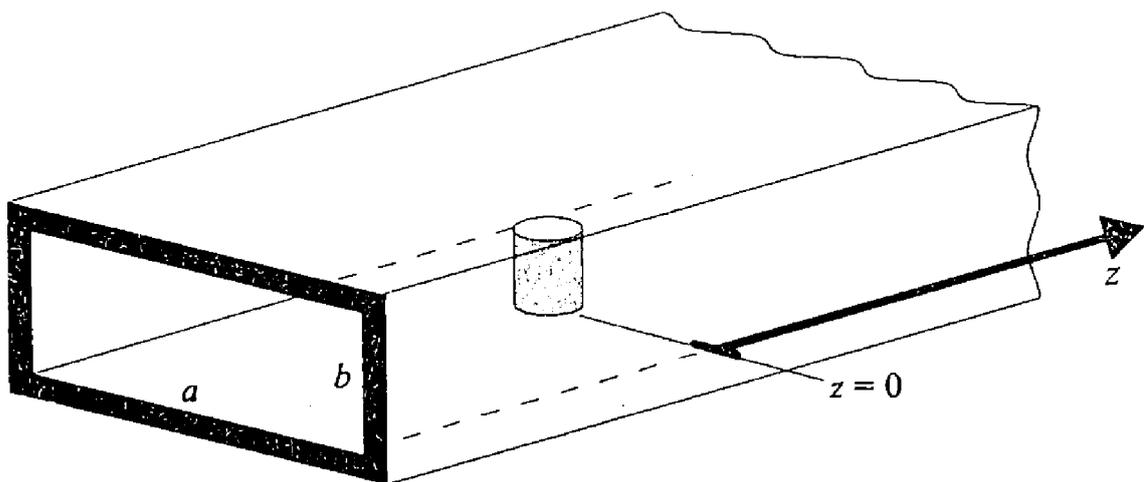


Fig. 5-3 Posición de un poste en el interior de una guía rectangular.

Las componentes  $E_y$  y  $H_x$  del modo dominante de propagación en la guía están dadas por las ecs. (4-124) y (4-125). Si se considera que estos campos viajan en la dirección positiva de  $z$ , de izquierda a derecha, hacia el obstáculo

(éste también podría ser una carga al final de la guía), y si se bautizan por lo tanto como “incidentes”, sus expresiones matemáticas correspondientes, a partir de la ec. (4-124), quedan de la forma:

$$E_y = E_i \left[ \text{sen} \frac{\pi x}{a} \right] e^{-j\beta z} \quad (5-1)$$

$$y \quad H_x = -E_i \left[ \frac{\beta}{\omega\mu} \text{sen} \frac{\pi x}{a} \right] e^{-j\beta z} \quad (5-2)$$

Tal como se vio en la sección 4.8.6, estas dos componentes transversales son las únicas que se requieren para calcular el flujo de potencia a lo largo de la guía. Si en el origen elegido hay un obstáculo o una carga, se intuye que habrá una onda “reflejada”, viajando en el sentido negativo de  $z$ , cuyas componentes transversales serían:

$$E_y = E_r \left[ \text{sen} \frac{\pi x}{a} \right] e^{j\beta z} \quad (5-3)$$

$$y \quad H_x = E_r \left[ \frac{\beta}{\omega\mu} \text{sen} \frac{\pi x}{a} \right] e^{j\beta z} \quad (5-4)$$

Las direcciones del campo magnético en las ecs. (5-2) y (5-4) son opuestas, ya que los flujos de potencia hacia la derecha y hacia la izquierda también son opuestos. Por tanto, en la ec. (5-4) se ha omitido el signo menos.

La suma de las ecs. (5-1) y (5-3) representa al campo eléctrico transversal total de la onda estacionaria en la guía:

$$E_y = \left[ \text{sen} \frac{\pi x}{a} \right] \left[ E_i e^{-j\beta z} + E_r e^{j\beta z} \right] \quad (5-5)$$

De igual forma, el campo magnético transversal total en cualquier punto a la izquierda del obstáculo está dado por la suma de las ecs. (5-2) y (5-4):

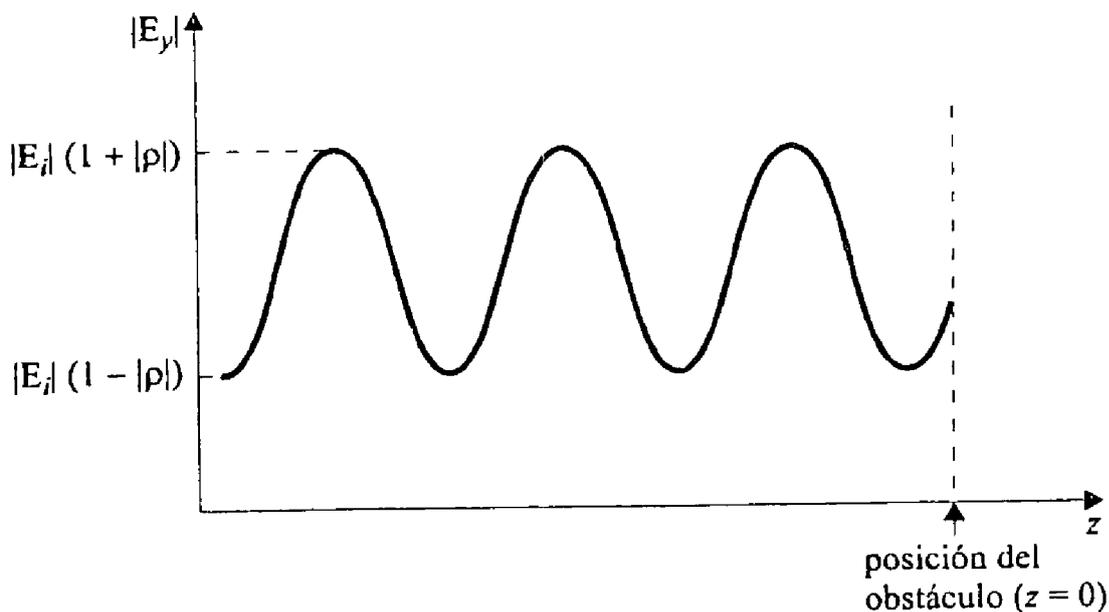
$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} \left[ \text{sen } \frac{\pi x}{a} \right] \left[ E_i e^{-j\beta z} - E_r e^{j\beta z} \right] \quad (5-6)$$

Estas dos últimas ecuaciones son similares a las que se obtuvieron para las ondas de voltaje y corriente en una línea en el capítulo 2. Si al campo eléctrico se le da el equivalente de voltaje, y al campo magnético el equivalente de corriente, se aprecia que la ec. (5-5) es equivalente a la ec. (2-29) y, acordemente, la ec. (5-6) es equivalente a la ec. (2-30).

Ahora bien, usando un procedimiento algebraico similar al de la sección 2.9, la magnitud del campo eléctrico transversal total para un valor de  $x$  constante, a partir de la ec. (5-5), sería proporcional a:

$$\begin{aligned} |E_y| &\propto |E_i e^{-j\beta z} + E_r e^{j\beta z}| \\ &= |E_i| \left[ 1 + |\rho|^2 - 2|\rho| \cos(2\beta z + \theta) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5-7)$$

en donde  $|\rho|$  y  $\theta$  son, respectivamente, la magnitud y la fase del coeficiente de reflexión de campos eléctricos en  $z = 0$ . La gráfica de esta onda estacionaria sería como se indica en la Fig. 5-4 (compárese con la Fig. 2-24).



**Fig. 5-4** Patrón de la onda estacionaria de campo eléctrico en el interior de una guía.

La intensidad del campo eléctrico de esta onda estacionaria podría medirse deslizando una pequeña sonda a lo largo de la guía, en forma similar a como se explicó para el cable coaxial rígido (Fig. 2-25). Sin embargo, no debe olvidarse que la ranura seleccionada para deslizar dicha sonda no debe interferir con la distribución de corrientes en las paredes de la guía, de acuerdo con lo estudiado en la sección 4.8.5. De allí que, si se observa la Fig. 4-16, una ranura conveniente sería a lo largo del centro de la pared superior, en donde la corriente tiene la misma dirección que la elegida para la ranura, cumpliéndose a la vez que  $x = \text{constante}$ . Como generalmente se usa un detector de onda estacionaria, es preciso definir aquí también una relación de onda estacionaria de campos eléctricos, similar al *VSWR* definido en el caso de las líneas. Si esta relación se designa como *ROE* (relación de onda estacionaria), a partir de la ec. (5-7) y la Fig. 5-3 se tiene que:

$$ROE = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = \frac{|E_y|_{\text{máx}}}{|E_y|_{\text{mín}}} \quad (5-8)$$

Evidentemente, con el mismo detector se pueden obtener las posiciones de los valores máximos y mínimos de la Fig. 5-4, con respecto a la posición del obstáculo. Como las mediciones son más precisas a cierta distancia del obstáculo, la curva obtenida se puede extrapolar fácilmente hasta llegar a la posición del obstáculo o carga.

### \* 5.3 La matriz de dispersión *importante*

En esta sección se verá cómo es posible modelar mediante un sencillo sistema de ecuaciones las propiedades de transmisión y reflexión de un obstáculo dentro de una guía, tal como el caso del poste visto en la sección anterior. Para esto, conviene trazar dos planos de referencia antes y después del obstáculo, que por lo pronto será representado por una pequeña caja equivalente a cierta discontinuidad (Fig. 5-5).

Haciendo referencia a la Fig. 5-5, la onda total que se refleje hacia la izquierda del plano 1, cuya magnitud es denotada por  $b_1$ , dependerá de las magnitudes  $a_1$  y  $a_2$  de las ondas incidentes, afectadas por un coeficiente o parámetro  $S_{ij}$ , de modo que para este sistema de dos puertos se puede escribir la ecuación lineal siguiente:

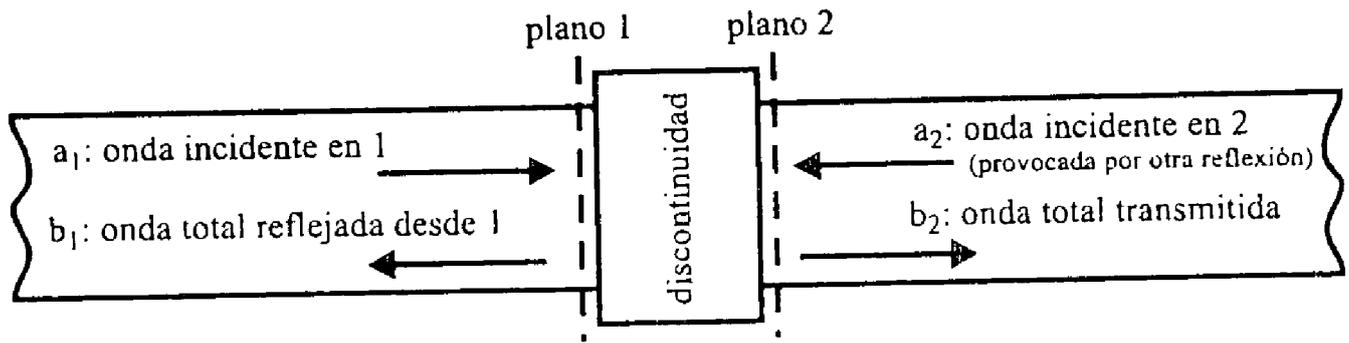


Fig. 5-5 Planos transversales de referencia antes y después de una discontinuidad a lo largo de una guía de ondas. En el caso más general, se consideran ondas incidentes y reflejadas en ambos lados.

$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \quad (5-9)$$

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, la magnitud  $b_2$  de la onda total transmitida dependerá de las magnitudes de las mismas dos ondas incidentes, pero afectadas por sus respectivos parámetros  $S_{ij}$ , de manera que esto permite plantear una segunda ecuación lineal:

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \quad (5-10)$$

A los parámetros  $S_{ij}$  se les da el nombre de *parámetros de dispersión*, y las ecuaciones (5-9) y (5-10) se pueden combinar en forma matricial, en donde la matriz  $[S]$  se denomina, consecuentemente, como *matriz de dispersión*:

$$\begin{bmatrix} \text{onda reflejada } b_1 \\ \text{onda transmitida } b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{onda incidente } a_1 \\ \text{onda incidente } a_2 \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

Nótese que si la guía está terminada en una carga no reflejante, entonces  $a_2 = 0$ . La matriz de dispersión se puede obtener en base a mediciones, relacionando la magnitud de cada onda con la potencia que transporta. Este método permite usar los conceptos de líneas de transmisión, trabajando con “voltajes” y “corrientes” equivalentes, en lugar de campos.

El mismo desarrollo anterior puede ser extendido para obtener la matriz de dispersión de un circuito o red de microondas de  $n$  puertos. La matriz resultante, de orden  $n \times n$ , sería:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

Los elementos de la diagonal de la matriz de dispersión son coeficientes de reflexión y los demás elementos son coeficientes de transmisión. Cuando pueda aplicarse la reciprocidad, entonces  $S_{ij} = S_{ji}$ . Las ferritas, por ejemplo, son medios no recíprocos debido a sus propiedades magnéticas.

Como se dijo antes, los elementos de la matriz se pueden obtener por medición. Esto se logra conectando un generador acoplado a uno de los  $n$  puertos, con los demás puertos conectados a cargas acopladas, y así alternadamente. Los coeficientes de reflexión y de transmisión que se midan en los distintos puertos serán los elementos de la matriz.

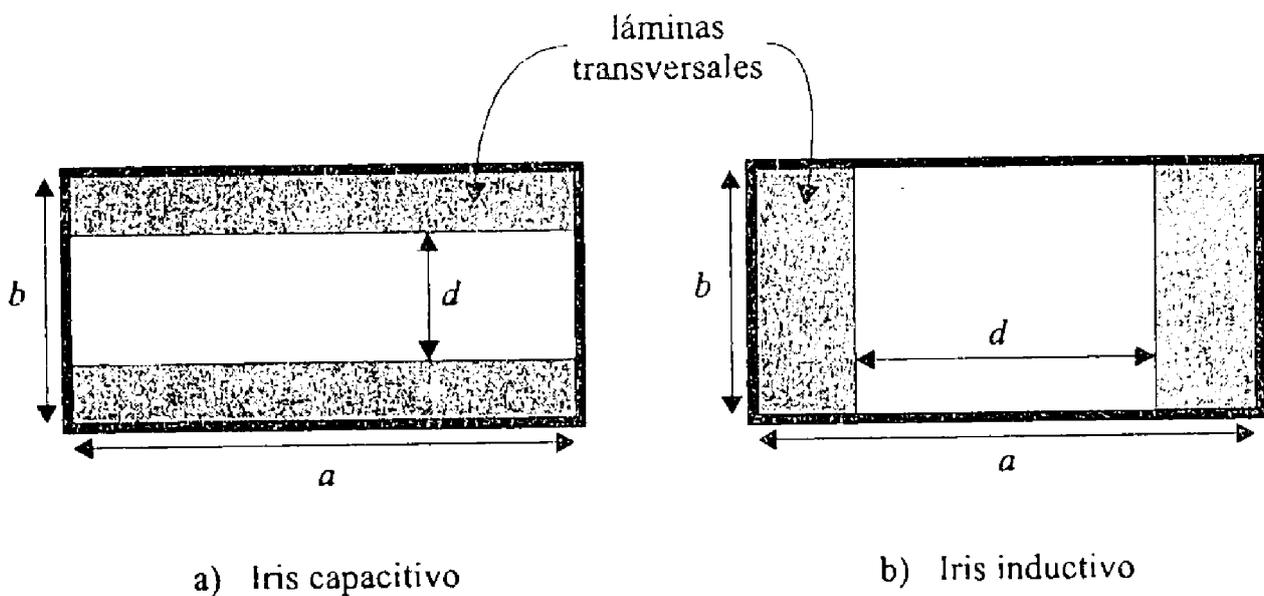
La matriz de dispersión, junto con sus propiedades, es una herramienta matemática muy útil para analizar redes de microondas en cascada, así como para diseñar filtros, ecualizadores, amplificadores y otros dispositivos. En el caso de los filtros, por ejemplo, se emplean varias cavidades en cascada, acopladas entre sí por discontinuidades físicas, mismas que perturban las líneas de campo dentro de la estructura; dichas discontinuidades son equivalentes a añadir reactancias en paralelo, inductivas o capacitivas, y se efectúan con diafragmas llamados irises (Fig. 5-6), o con postes de longitud variable similares a los de la Fig. 5-3. El estudio detallado de estos y otros temas le corresponde a un curso avanzado de microondas.

## 5.4 Acoplamiento de impedancias

En muchas situaciones es necesario realizar un acoplamiento de impedancias en guías de ondas, de manera similar a como se hace con las líneas de dos conductores. Es decir, con el fin de reducir el  $VSWR$  o  $ROE$  (dado por la ec. 5-8) y obtener un valor cercano a la unidad, se introducen

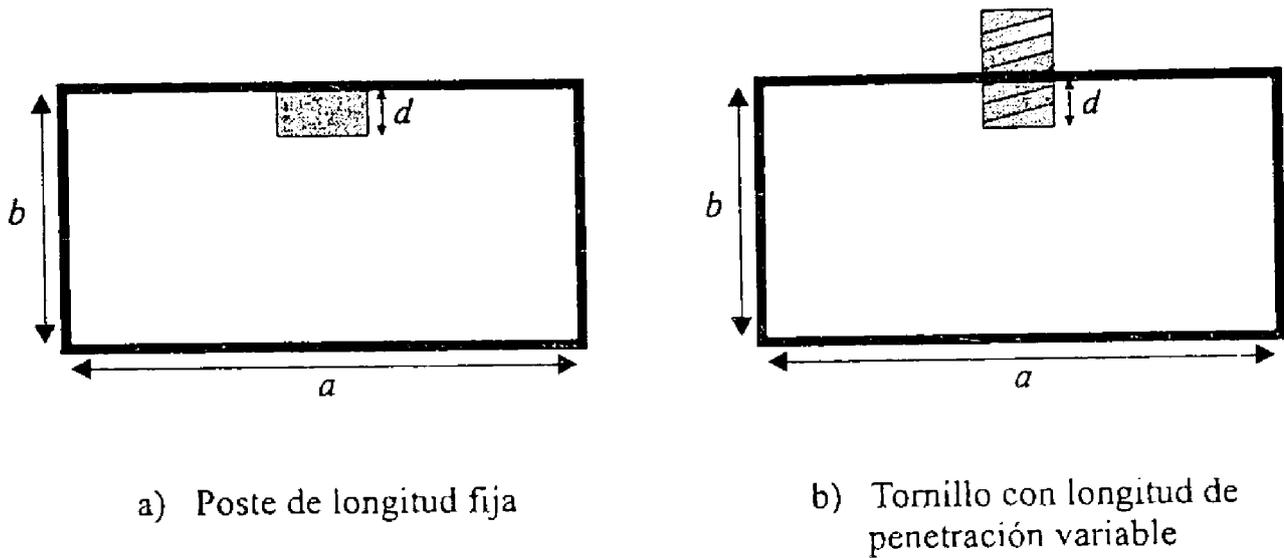
en la guía admitancias en paralelo, así como en las líneas de dos conductores se añaden "stubs" en paralelo.

Las admitancias en paralelo que se usan en las guías de ondas son realizables por medio de diafragmas o láminas delgadas llamadas irises, que producen una especie de ventana en el interior de la guía en cuestión (Fig. 5-6). Otra forma de lograr producir dichas admitancias es introduciendo postes o tornillos (Fig. 5-7).



**Fig. 5-6** Un iris se forma con dos láminas transversales a la guía. La susceptancia equivalente que se obtiene depende de las dimensiones de la guía y de la distancia  $d$  entre las láminas. El grosor de éstas debe ser pequeño con relación a la longitud de onda de trabajo.

Sin duda, el lector intuye que estas discontinuidades físicas deben satisfacer las condiciones de frontera electromagnéticas en sus superficies. Aun cuando se esté transmitiendo en el modo dominante  $TE_{10}$ , estas condiciones de frontera adicionales requieren la presencia de modos de propagación superiores, lo cual complica enormemente el análisis matemático del problema. Afortunadamente, dichos modos superiores son evanescentes cuando la guía trabaja en el modo dominante, están localizados muy cerca de la discontinuidad, y a cierta distancia de ésta se hallan altamente atenuados. El lector interesado en profundizar sobre la deducción de las fórmulas para calcular las susceptancias equivalentes de los irises y postes,



**Fig. 5-7** La susceptancia equivalente de un poste depende de su penetración  $d$  en la guía y de las dimensiones de ésta. Un tornillo permite obtener muchas susceptancias diferentes, según su grosor y la penetración  $d$  que tenga.

puede consultar el libro de Collin o algunos de los artículos técnicos citados en la sección final de referencias.

### 5.4.1 El iris

En el caso de un iris como el de la Fig. 5-6 a, la expresión aproximada (con un 5% de error) para calcular la susceptancia capacitiva normalizada que produce es:

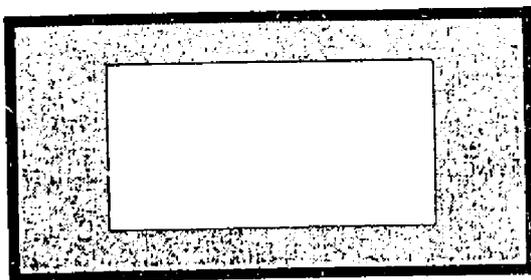
$$b_c = \frac{B_c}{Y_{10}} = \frac{4b}{\lambda_g} \ln \left[ \csc \left( \frac{\pi d}{2b} \right) \right] \quad (5-13)$$

en donde  $Y_{10}$  es la admitancia característica del modo dominante  $TE_{10}$  (es decir, recíproco de  $Z_{TE_{10}}$ , dado por la ec. 4-92) y  $\lambda_g$  es la longitud de onda en la guía dada por la ec. (4-109).

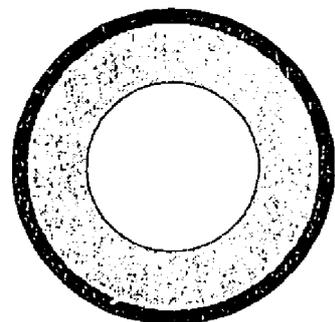
Cuando las láminas del iris están colocadas como se muestra en la Fig. 5-6 b, la expresión aproximada para la susceptancia inductiva normalizada correspondiente es:

$$b_i = \frac{B_i}{Y_{10}} = -\frac{\lambda_g}{a} \cot^2 \left( \frac{\pi d}{2a} \right) \quad (5-14)$$

Los diafragmas bajo estudio deben colocarse cerca de las fuentes que producen las ondas reflejadas. El iris inductivo tiene ciertas ventajas sobre el capacitivo en aplicaciones de transmisión de muy alta potencia. Obviamente, también es posible combinar los efectos de los dos iris para formar un *iris resonante* (Fig. 5-8 a). En el caso de las guías circulares, se utiliza un iris circular (Fig. 5-8 b), cuya susceptancia es inductiva. Nótese que los términos iris y ventana se emplean indistintamente para designar estas estructuras de variación de impedancias. También pueden emplearse iris asimétricos (con una sola lámina en alguno de los lados), o bien estructuras en forma de caballete, como la mostrada en la Fig. 1.4 b. Puede haber muchas otras configuraciones útiles, de acuerdo con ciertas aplicaciones particulares. Muy frecuentemente, y debido a la dificultad en resolver el problema electromagnético resultante, la información que se tiene sobre los valores de las admitancias de estos obstáculos es obtenida en forma experimental, a partir de mediciones de las ondas estacionarias.



a) Iris resonante



b) Iris inductivo en una guía circular

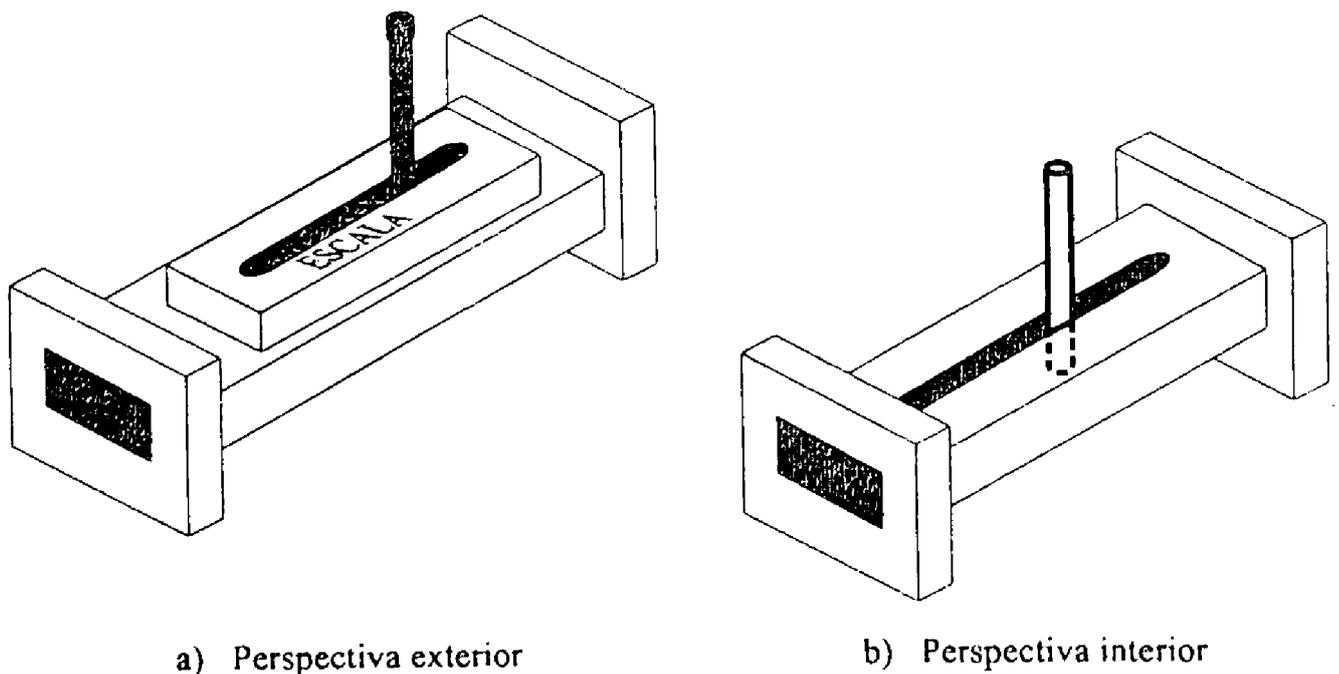
**Fig. 5-8** Geometría de una ventana resonante para guía de ondas rectangular y de un iris para guía circular.

## \*5.4.2 El poste

El obstáculo mostrado en las Figs. 5-3 y 5-7a es capacitivo cuando la penetración es pequeña. Si su altura se incrementa poco a poco, se llega a un punto donde ocurre la resonancia. Esta se obtiene cuando  $d \approx 0.8b$  y su efecto es similar al de un circuito  $L-C$  en serie, conectado en paralelo a través de la guía. Si la penetración o altura del poste se incrementa aún más, la susceptancia se vuelve inductiva.

El diámetro de un poste es de sólo una fracción de la longitud de onda y la susceptancia que produce se puede ajustar fácilmente al usar un tornillo de penetración variable (Fig. 5-7 b). Este tipo de acoplamiento de impedancias es análogo al de usar un sintonizador, equilibrador o "stub" en una línea de dos conductores, tal como se vio en la sección 2.16.3.

Si en lugar de usar un poste o tornillo con posición fija sobre la guía, se tiene la libertad de moverlo a lo largo de una ranura, entonces se puede obtener un rango más amplio de susceptancias. La posición del tornillo y su penetración (Fig. 5-9) determinarán el tipo de reflexión, en amplitud y fase, que permita cancelar la reflexión originalmente existente en la guía. A este acoplador se le da el nombre de *sintonizador deslizante*. La variación en



**Fig. 5-9** Sintonizador con tornillo deslizante para el acoplamiento de impedancias.

fase se produce cambiando la posición del poste a lo largo de una ranura central sobre el lado ancho de la guía.

También es posible usar sintonizadores de banda ancha, que consisten de dos o más tornillos con posición fija y penetración variable. Esto sería análogo a usar dos o más "stubs" en una línea de dos conductores. Generalmente se usan sintonizadores con tres tornillos, pero también los hay con cuatro o cinco. Las correcciones necesarias de admitancia para acoplar la guía se logran mediante una combinación adecuada de las inserciones de los postes (Fig. 5-10).

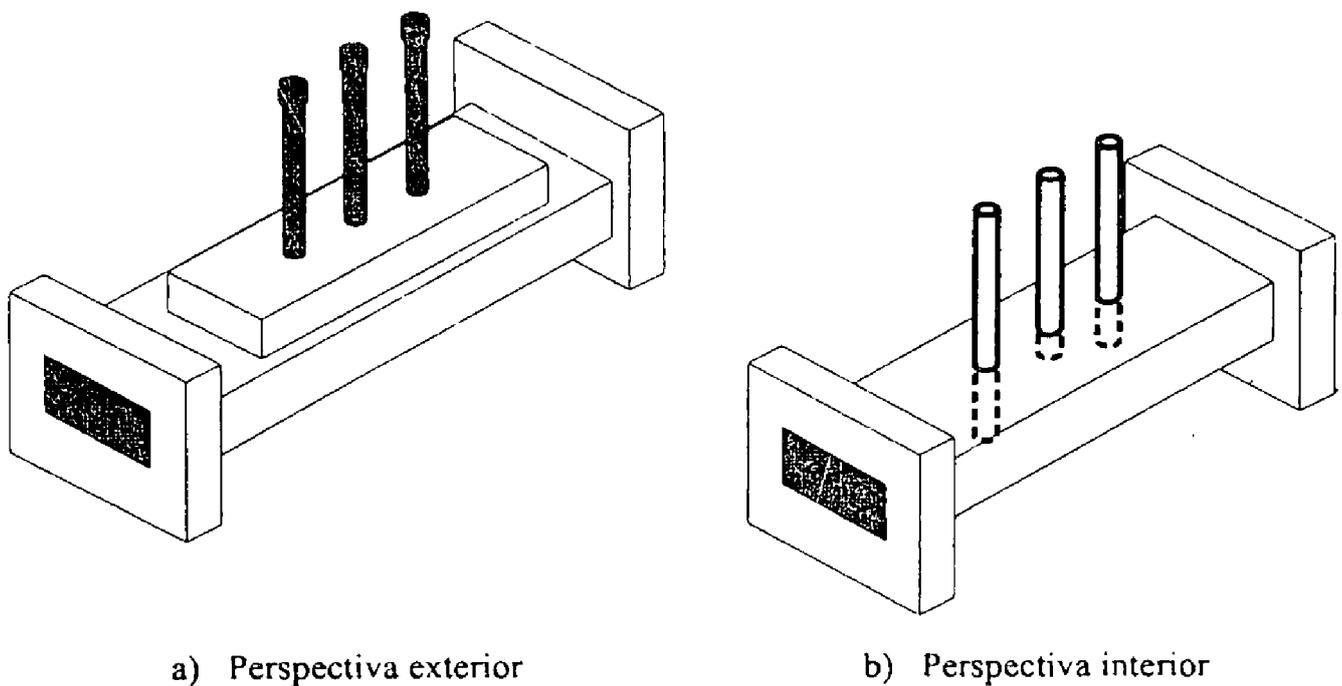


Fig. 5-10 Sintonizador con tres tornillos o postes de posición fija y penetración variable.

## 5.5 Algunos otros componentes y dispositivos de microondas

Aunque no es posible, por las características de nuestro texto, presentar toda la gama de elementos que se utilizan para el diseño y la operación de sistemas de microondas, en esta sección describiremos algunos de los más comunes e importantes, como los atenuadores, la "T mágica" y los cambiadores de fase. Los acopladores de impedancia ya fueron descritos en la sección anterior.

### 5.5.1 Atenuadores

En ciertas aplicaciones es necesario reducir el nivel de la potencia que entra a algún dispositivo activo de microondas. Por ejemplo, en muchos casos, los amplificadores de los satélites de comunicaciones no deben operar en su punto de saturación. Para mover el punto de operación de cada amplificador, se coloca un atenuador de señal antes de la amplificación; la posición del atenuador es variable, de ajuste fino o “por pasos”, y el nivel de atenuación que se obtiene depende de dicha posición dentro de la guía. Otro ejemplo de aplicación de los atenuadores, junto con los cambiadores de fase (sección 5.5.2), es la construcción de arreglos de antenas que produzcan un determinado patrón de radiación, orientado en cierta dirección de interés; el ángulo de orientación del haz queda determinado por las fases relativas entre los elementos del arreglo, y la forma del patrón de radiación depende de las amplitudes relativas de las ondas radiadas por dichos elementos.

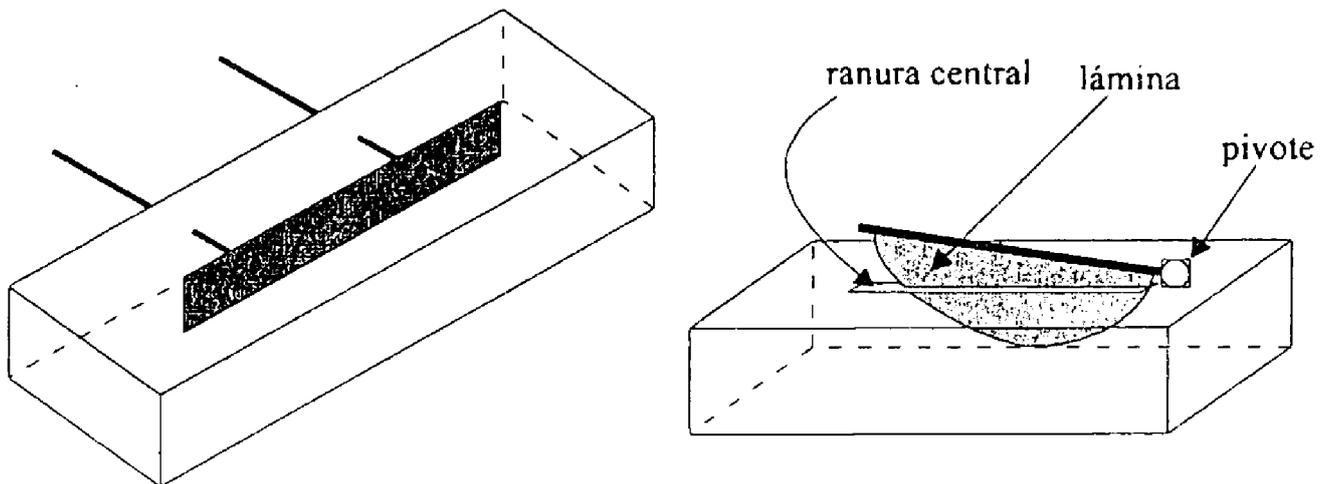
El atenuador ideal es una red de dos puertos sin cambio de fase y su matriz de dispersión, de la *ec. (5-12)*, es:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\alpha} \\ e^{-\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

en donde  $\alpha$  es el coeficiente de atenuación.

La mayor parte de los atenuadores usan una lámina metálica delgada, en forma de navaja o aspa plana, que se inserta en la guía con una posición paralela a los puntos de máxima intensidad de campo eléctrico (Fig. 5-11a). La lámina absorbe potencia en distintos niveles, según su posición dentro de la guía, misma que puede ser controlada empujando o jalando las barras de soporte que penetran por una de las paredes laterales. Cuando el aspa coincide con la pared lateral, en donde el campo eléctrico es mínimo, la potencia absorbida es mínima o cero; en cambio, si se le coloca en el centro de la guía, donde la intensidad del campo eléctrico es máxima, la potencia que se absorbe también es máxima.

Otra forma de atenuar la señal es mediante una lámina que entra y sale por una ranura longitudinal y central hecha en la pared superior de la guía (Fig. 5-11 b). Aquí, la posición de la lámina con relación a la pared de la guía es



a) Atenuador de deslizamiento lateral

b) Atenuador de aleteo

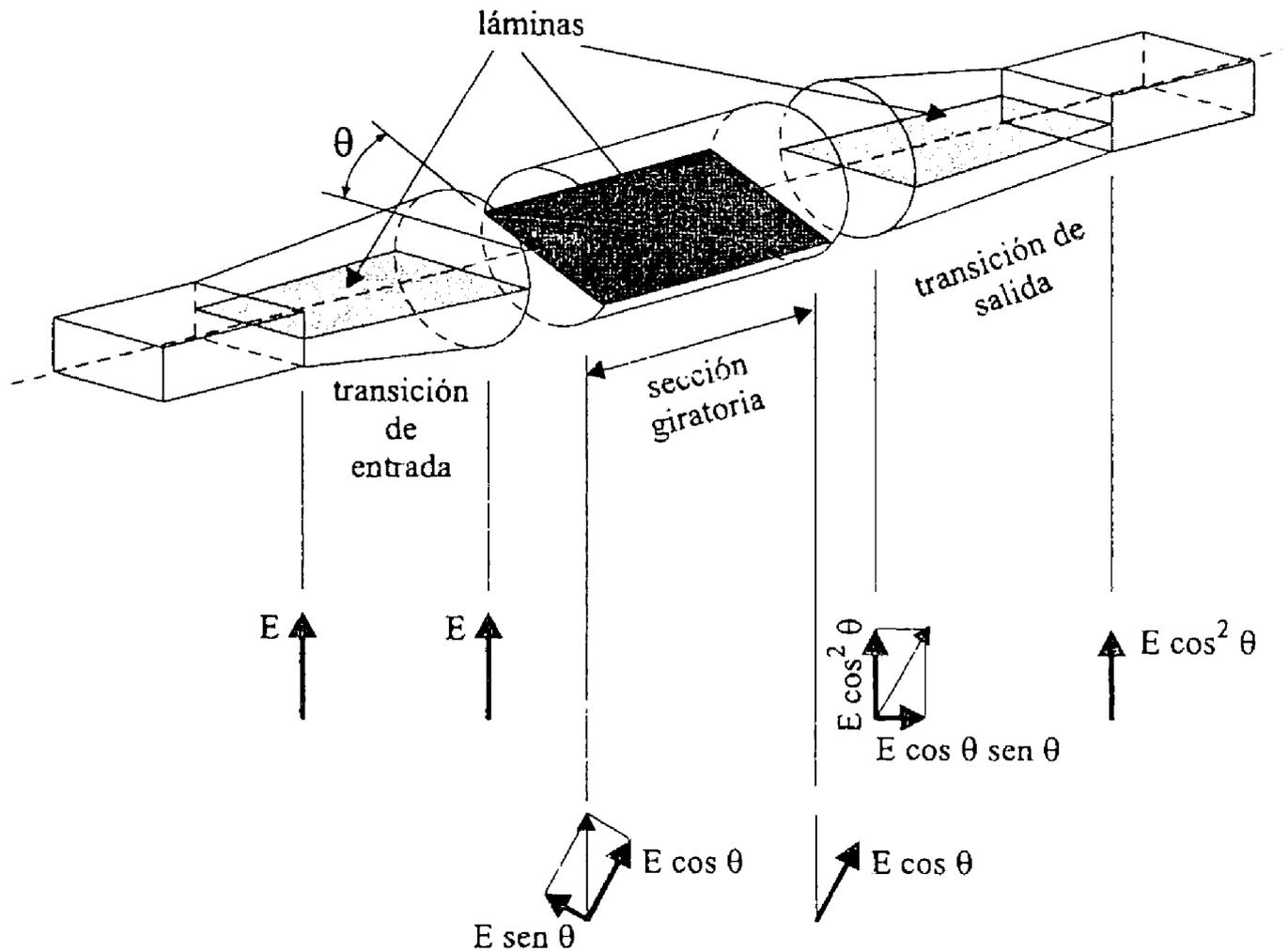
**Fig. 5-11** Atenuadores de microondas típicos.

fija, pero su grado de penetración define al nivel de atenuación, pues éste es función del porcentaje de superficie metálica expuesta al campo eléctrico, mismo que es máximo en dicho lugar central (modo  $TE_{10}$ ).

Es pertinente mencionar que, a fin de fabricar la lámina absorbente de estos atenuadores, se usa una estructura rígida de apoyo o soporte hecha de material dieléctrico sobre el cual se deposita la capa de material conductor\*. Tal estructura de soporte puede ser, por ejemplo, una hoja de fibra de vidrio. Un inconveniente que esto tiene es que, además de obtenerse la atenuación deseada, el dispositivo funciona como cambiador de fase, debido a las propiedades de los dieléctricos a altas frecuencias, y la matriz de dispersión efectiva es diferente a la dada por la *ec. (5-15)*. Otro inconveniente de estos atenuadores es que necesitan ser calibrados, ya que no hay una relación lineal entre su posición y la atenuación obtenida; además, la calibración es diferente según la frecuencia de trabajo, puesto que las dimensiones eléctricas de la lámina cambian con la longitud de onda.

Existe otro tipo de atenuador mucho más complejo, que tiene la virtud de ser un instrumento auto-calibrable e independiente de la frecuencia. Este dispositivo recibe el nombre de *atenuador de rotación* o *atenuador de*

\* Por esta razón, el atenuador de la Fig. 5-11a es llamado también como "atenuador con aspa de vidrio".



**Fig. 5-12** Esquema del principio de operación de un atenuador de rotación. Las secciones van unidas, desde luego, pero se muestran separadas con fines ilustrativos. La orientación del campo eléctrico y la magnitud relativa de sus componentes en varios puntos del atenuador están representados por las flechas sólidas.

*precisión* (Fig. 5-12). El cambio de fase que este atenuador produce en el campo eléctrico es de menos de un grado, para atenuaciones de 0 a 40 dB; por lo tanto, su matriz de dispersión es muy aproximada a la dada por la ec. (5-15).

Básicamente, este atenuador consiste de tres secciones de guía unidas en cascada. Las dos secciones extremas son guías rectangulares con transición a circular y la central es circular. Cada sección tiene una placa metálica o resistiva en su interior. La sección circular puede girar axialmente con relación a las dos secciones fijas de los extremos. Evidentemente, en las uniones rectangular-circular y circular-rectangular debe haber secciones

cortas de transición, que transforman al modo  $TE_{10}$  de la guía rectangular en el modo  $TE_{11}$  de la guía circular, y viceversa. El dispositivo es geoméricamente simétrico y bidireccional.

La ley matemática de atenuación de este mecanismo es  $\cos^2 \theta$ , en donde  $\theta$  es el ángulo de giro indicado en la Fig. 5-12; es decir, el ángulo formado entre las placas resistivas. Si se considera que el atenuador no introduce cambios de fase, su matriz de dispersión sería entonces:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

En decibeles, la atenuación del campo eléctrico es igual a  $20 \log \cos^2 \theta = 40 \log \cos \theta$ . Luego, la atenuación es proporcional al ángulo de giro de la sección circular central e independiente de la frecuencia.

El funcionamiento de este atenuador es sencillo. Haciendo referencia a la Fig. 5-12, considérese una onda de entrada en la sección rectangular izquierda, cuyo campo eléctrico es perpendicular a la lámina resistiva; por lo tanto, no es atenuado y llega con la misma intensidad al principio de la sección circular. Si la lámina de la sección circular giratoria forma un ángulo  $\theta$  con las láminas de las secciones rectangulares, la onda que llega o incide en la sección circular se puede descomponer en sus componentes paralela y perpendicular con relación a su propia lámina. Estas componentes son, respectivamente,  $E \sin \theta$  y  $E \cos \theta$ . A la salida de la sección circular, la componente paralela a su lámina ya fue totalmente atenuada, y solamente queda la componente perpendicular, cuya intensidad sigue siendo la misma que a la entrada. Esta última componente no atenuada se puede descomponer finalmente en sus componentes perpendicular y paralela con relación a la lámina resistiva de la sección rectangular derecha de la figura (salida del atenuador). La componente paralela a esta última lámina también será atenuada por efecto Joule, y la componente perpendicular, cuya magnitud es  $E \cos^2 \theta$ , será la única que salga del atenuador.

### \* 5.5.2 Cambiadores de fase

Un cambiador de fase es un dispositivo que, idealmente, tiene una función de transferencia con amplitud unitaria (cero atenuación) y fase variable,

misma que es controlable mecánica o electrónicamente. Su matriz de dispersión sería, entonces:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

en donde  $\theta$  es la diferencia de fase entre las señales de entrada y de salida.

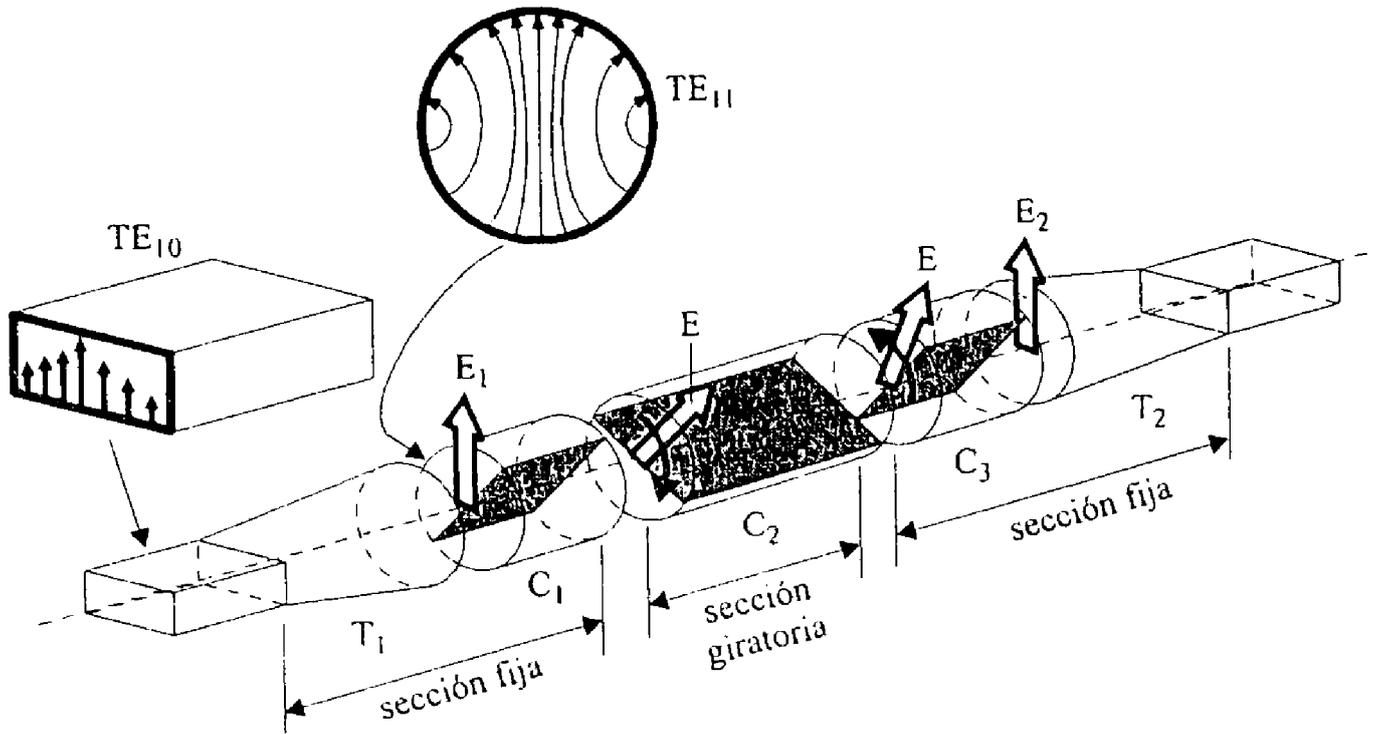
De acuerdo con la ec. (5-17), el dispositivo es recíproco. Sin embargo, también se pueden fabricar cambiadores de fase no recíprocos con ferritas.

Los cambiadores de fase mecánicos más sencillos (y menos precisos) tienen un diseño similar al de los atenuadores de la Fig. 5-11. La única diferencia es que, tanto en la figura *a* como en la figura *b*, la lámina ya no es resistiva, sino que es sustituida por una lámina gruesa o barra hecha solamente de material dieléctrico. El grosor de la barra es más o menos de 1/10 de la base de la sección transversal de la guía. El desfasamiento máximo se obtiene cuando la barra queda colocada en el centro de la guía, y es mínimo cuando coincide con la pared lateral.

Recuérdese que un medio de propagación hecho de material dieléctrico de bajas pérdidas cambia la velocidad de propagación de una onda. Por lo tanto, la barra dieléctrica no atenúa a la señal dentro de la guía, pero sí cambia su fase. Mientras mayor sea la permitividad relativa del material dieléctrico, mayor será el cambio de fase producido en la onda.

Al igual que en el caso de los atenuadores, de acuerdo con lo visto en la sección 5.5.1, existe un diseño de *cambiador de fase de precisión* más complejo y costoso que los descritos en el párrafo anterior. Este dispositivo consiste de tres secciones de guía circular, dos transiciones de guía rectangular a circular y viceversa, y sus dos secciones extremas de guía rectangular (Fig. 5-13).

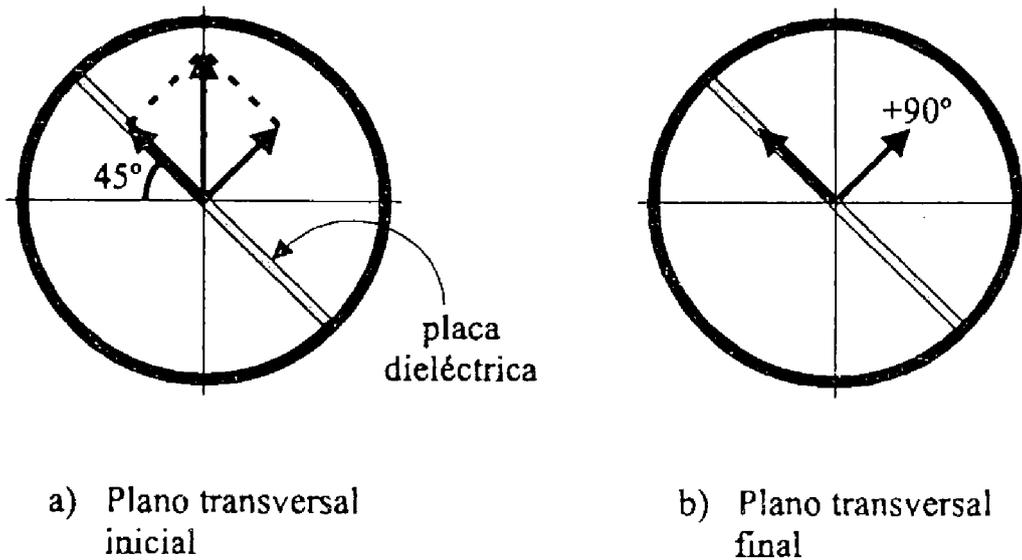
Como primer paso de operación de este cambiador de fase, el modo fundamental  $TE_{10}$  que se propaga en la guía rectangular se transforma, por medio de la transición  $T_1$  de la Fig. 5-13, en el modo fundamental  $TE_{11}$  de la guía circular. En ambos casos, la polarización es vertical. Al entrar la onda en la sección circular  $C_1$ , encuentra en su interior un elemento que rompe la simetría de revolución de la guía; este elemento es una placa de material dieléctrico colocada en el centro, de longitud  $\lambda/4$  y que está inclinada  $\pm 45^\circ$  con relación al eje vertical; recibe el nombre de *placa de cuarto de*



**Fig. 5-13** Esquema sobre el principio de operación de un cambiador de fase de precisión con tres secciones de guía circular. Las secciones  $C_1$  y  $C_3$  son fijas; la  $C_2$  es giratoria.

onda y descompone a la onda original (polarizada verticalmente) en dos nuevas ondas iniciales, polarizadas con inclinación de  $\pm 45^\circ$ , con amplitud y fase idénticas (Fig. 5-14 a). El campo eléctrico que coincide con el plano de la placa es retrasado con relación al campo perpendicular a la placa, conforme ambos avanzan hacia el otro extremo; a la salida de la placa, el desfase total entre ambas componentes de campo es de  $90^\circ$  (Fig. 5-14 b). El efecto concreto es que la onda polarizada linealmente al principio de la sección circular  $C_1$  de la Fig. 5-13 se transformaría, al final de dicha sección, en una onda con polarización circular izquierda. Pero si la placa dieléctrica de la Fig. 5-14 estuviese inclinada  $90^\circ$  más (posición perpendicular a la mostrada), la onda saldría entonces con polarización circular derecha (Fig. 5-13). Este tipo de polarizadores también se utiliza en sistemas de comunicación por satélite, cuando una antena trabaja con reutilización de frecuencias y polarización circular.

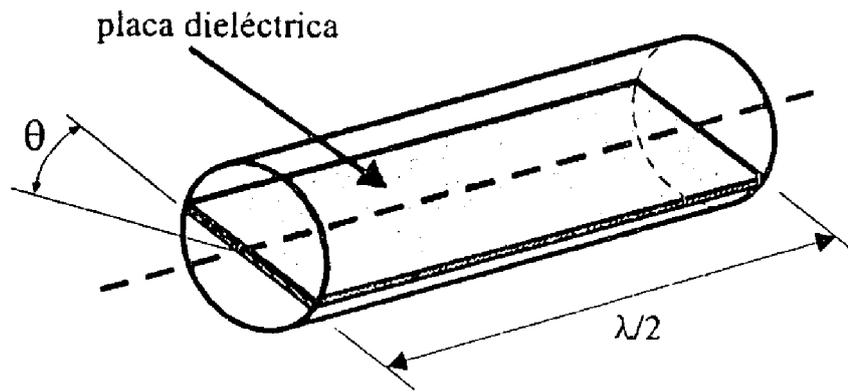
Regresando al cambiador de fase de la Fig. 5-13, al principio de la sección circular  $C_2$  entra una onda con polarización circular derecha. Esta sección giratoria también tiene en su interior una placa dieléctrica, pero de longitud



**Fig. 5-14** Una placa de cuarto de onda transforma a una onda polarizada linealmente en una onda con polarización circular. Por esta razón, también se le llama polarizador circular.

$\lambda/2$ ; luego, se le llama *placa de media longitud de onda*. En cualquier instante, el efecto que tiene sobre las componentes del campo eléctrico con polarización circular es similar al que se ilustró en la Fig. 5-14 para la placa de cuarto de onda, sólo que el desfase total entre ellas es ahora de  $180^\circ$ , en lugar de  $90^\circ$ , puesto que la longitud recorrida por la componente en el plano de la placa es el doble. Este desfase adicional causa que la onda con polarización circular derecha al principio de la sección  $C_2$  salga con polarización circular izquierda, y ésta será la onda de entrada para la sección circular  $C_3$  (véase nuevamente la Fig. 5-13). Esta última sección circular, que es fija y de longitud  $\lambda/4$  al igual que la  $C_1$ , simplemente convierte la polarización circular de nuevo a polarización lineal, bajo el mismo principio de la Fig. 5-14.

Ahora bien, si la sección rotatoria  $C_2$  es girada sobre su eje (con todo y placa) un cierto ángulo  $\theta$  con relación al plano horizontal (Fig. 5-15), entonces el desfase neto entre el campo de salida  $E_2$  y el campo de entrada  $E_1$  sería igual a  $2\theta$ . Este es el principio básico de operación del cambiador de fase de precisión o desfasador variable. Una rotación de  $180^\circ$  de la sección  $C_2$  resultaría, por ejemplo, en un desfase de  $360^\circ$  entre los vectores de entrada y de salida (estarían en fase).



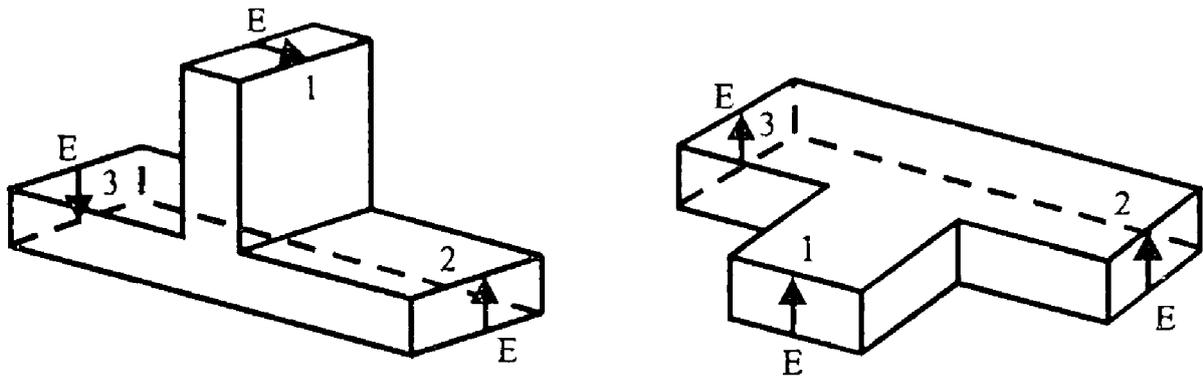
**Fig. 5-15** Placa de media longitud de onda de la sección circular rotatoria  $C_2$  de la Fig. 5-13.

### \* 5.5.3 Uniones T

Las uniones T de microondas son elementos pasivos y recíprocos que permiten acoplar o conectar tramos de guías de ondas que convergen en un punto. Las propiedades de cada unión en particular dependen de su geometría. En la Fig. 5-16 se muestran los tres tipos de uniones que serán estudiados en esta sección.

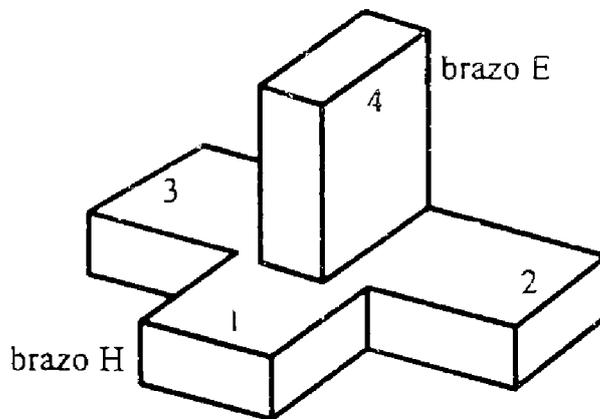
Las uniones T en el plano E y en el plano H de las Figs. 5-16 a y b tienen la propiedad de que la potencia que entra a la unión por el brazo 1 se divide en partes iguales: la mitad sale por el brazo 2 y la otra mitad sale por el brazo 3. En el caso de la unión T en el plano E, las señales que salen por los brazos 2 y 3 están en antifase; y en el caso de la unión T en el plano H, las señales en ambos brazos salen en fase. Evidentemente, estas uniones son útiles como divisores de potencia y desfasadores de  $180^\circ$ .

Si las dos "T" anteriores se combinan, se forma una *unión híbrida*, a la cual también se le conoce como *T mágica* (Fig. 5-16 c). En este dispositivo, una onda que entra por el brazo 1 producirá ondas de igual magnitud y fase a la salida de los brazos 2 y 3 (igual que en la Fig. 5-16 b), y por el brazo 4 no saldrá nada (bajo condiciones ideales de acoplamiento). Asimismo, la potencia de una onda que entre por el brazo 4 se dividirá en partes iguales que saldrán por los brazos 2 y 3; mientras que por el brazo 1 no habrá señal de salida. Otra posibilidad es que por los brazos 2 y 3 entren ondas de igual magnitud y fase, y que la suma salga por el brazo 1, mientras que en el



a) Unión T en el plano E

b) Unión T en el plano H



c) Unión T híbrida o "T mágica"

Fig. 5-16 Ejemplos de uniones T de microondas.

brazo 4 no habrá señal de salida. Las discontinuidades de impedancia pueden ser corregidas con sintonizadores o postes de acoplamiento como los vistos en la sección 5.4.2.

Entre otras aplicaciones, la T mágica se usa en receptores de microondas como un mezclador balanceado. Para esto, en los brazos 2 y 3 se colocan mezcladores o detectores de cristal; la señal recibida (tal vez por una antena) entra por el brazo H (1) y la señal del oscilador local entra por el brazo E (4). Las dos señales están aisladas entre sí por la T y se mezclan en los cristales, de modo que por las guías 2 y 3 salen señales de frecuencia intermedia en antifase.

En transmisión, por ejemplo, la T mágica combinada con cambiadores de fase es útil para alimentar arreglos de antenas que produzcan haces de radiación en una dirección determinada.

# Líneas de cinta y microcinta

## 6.1 Introducción y aplicaciones

Las líneas de cinta y microcinta son una versión modificada de las placas paralelas estudiadas en el capítulo 4. Debido a su geometría, ocasionalmente se les llama líneas planas. Sus cortes transversales respectivos están mostrados en la Fig. 1-3, pero por comodidad se repetirán aquí como la Fig. 6-1. Como puede verse, la microcinta o microlínea se parece más a las placas paralelas que la línea de cinta o triplaca; más bien, esta última podría considerarse también como una variante semiplanar del cable coaxial, ya que tiene un conductor interno. Sea cual sea la analogía o interpretación que se elija, a estas estructuras y en base a lo ya estudiado en el texto, se intuye que ambas líneas transmiten ondas que son cuasi-TEM, tal como se explicó en la sección 1.4 (véase la Fig. 1-14). El aproximar la distribución de los

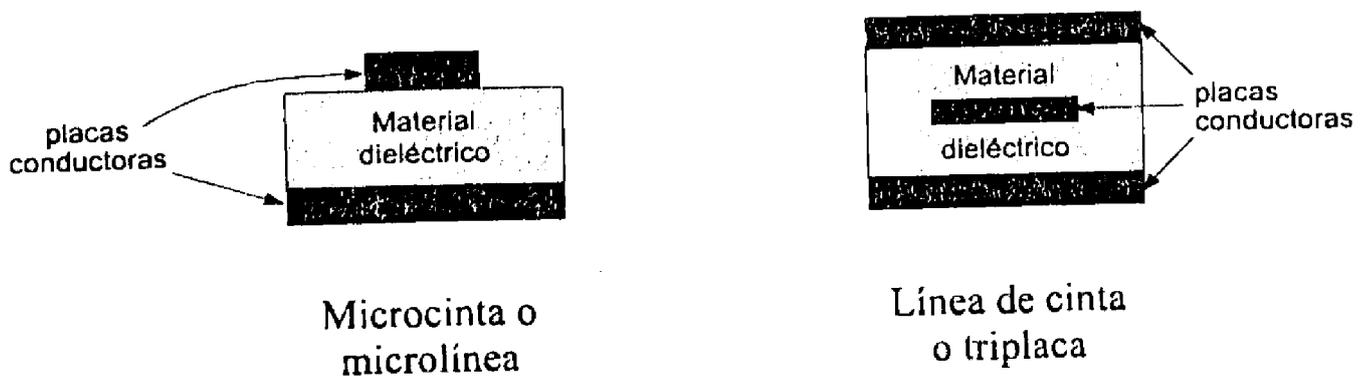


Fig. 6-1 Corte transversal de las líneas de cinta y microcinta.

campos por los de una onda TEM, permite calcular con buena aproximación sus parámetros de operación.

En general, estas líneas no se emplean como medios de transmisión para distancias convencionales, sino que son útiles en la fabricación de secciones que forman parte de circuitos integrados de estado sólido y que operan a altas frecuencias. De acuerdo con lo anterior, a la línea de cinta\* también se le llama “línea impresa”; y, acordemente, a la línea de microcinta\*\* se le refiere como “línea microimpresa”, aunque en realidad ambas líneas son pequeñísimas.

Entre otros factores, gracias a estas estructuras planares ha sido posible el desarrollo de la microelectrónica. La microcinta es ahora la más empleada, debido a que es sencillo fabricarla y da buenos resultados de interconexión, tanto en circuitos pasivos como activos, con los dieléctricos modernos. Por su parte, la línea de cinta es más difícil de fabricar, pero se utilizó mucho hace unos treinta años, por sus propiedades de blindaje, y todavía hay muchos casos en los que se le encuentra aplicación.

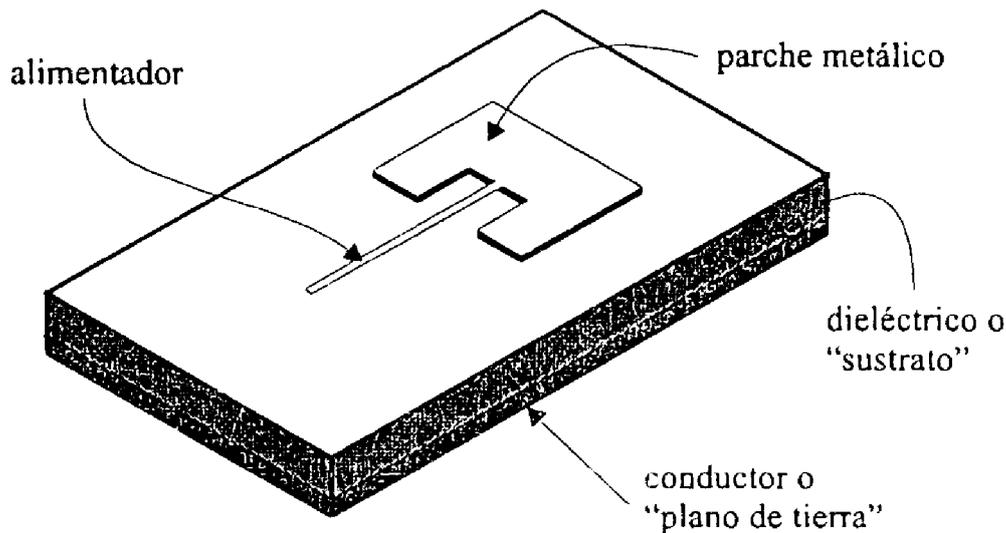
Sin duda, el lector aceptará que puede haber otras variantes de líneas planas; por ejemplo, una barra dieléctrica con dos cintas metálicas paralelas en su parte superior (línea ranurada) o con tres cintas metálicas paralelas colocadas también en su lado superior (guía coplanar), etc. Pero su uso es menos frecuente y aquí se omitirá su estudio. En realidad, el análisis detallado de todas estas estructuras le corresponde más a un curso avanzado de microelectrónica sobre el diseño de circuitos integrados. Por lo tanto, a continuación sólo mencionaremos algunas características básicas de las líneas de cinta y microcinta. El lector interesado en ampliar sus conocimientos sobre estas estructuras puede consultar los libros y artículos listados en la sección de referencias al final de esta obra, en particular el libro del autor Gupta.

Vale la pena mencionar que una variante de la microcinta también se utiliza actualmente para fabricar *antenas de microcinta*. Aunque su ganancia, su ancho de banda y sus características de radiación son limitadas, estas antenas son atractivas por su fácil construcción, bajo costo y adaptabilidad a la geometría del fuselaje de los aviones. Se emplean igualmente en ciertos casos de telemetría, radares militares y comunicaciones por satélite. En la Fig. 6-2 se muestra la configuración de una de estas antenas.

---

\* En inglés, *stripline*.

\*\* En inglés, *microstrip line*.

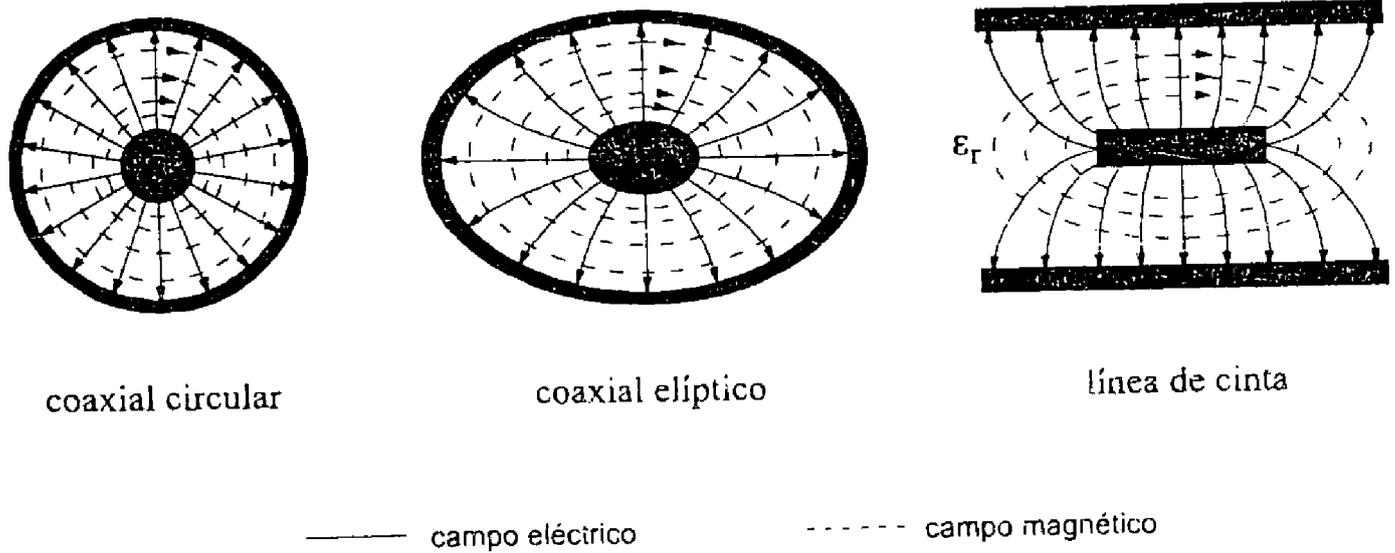


**Fig. 6-2** Configuración de una antena de microcinta. El alimentador puede ser una línea de cinta como se indica, o bien un cable coaxial que atraviese por abajo al plano de tierra, para que su conductor interno haga contacto con el parche.

## 6.2 La línea de cinta

Por observación de la geometría de esta línea, mostrada en la Fig. 6-1, se nota que es una especie de “sandwich” o emparedado con dos sustratos iguales y planos y una cinta metálica en su interior. Esto dificulta su fabricación, pues aunque los sustratos son del mismo material, primero hay que colocar la placa metálica intermedia, para poner después la segunda “rebanada” o sustrato del emparedado, y cualquier hueco o discontinuidad en la unión de los dos sustratos puede causar dispersión de la onda propagada. Si se considera que esta triplaca es una variante semiplanar del cable coaxial, es fácil obtener gráficamente la distribución aproximada de sus líneas de campo eléctrico y magnético, tal como se ilustra en la Fig. 6-3, mediante la transición de un cable coaxial circular a uno elíptico, y de allí a la triplaca.

La Fig. 6-3 evidencia que el modo dominante de propagación en una línea de cinta es cuasi-TEM. Aparentemente, por el hecho de que su geometría es sencilla, sería fácil encontrar soluciones analíticas exactas de sus parámetros básicos  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $G$ , y de allí su impedancia característica y atenuación. Sin embargo, tal no es el caso. No existen soluciones analíticas exactas, sino buenas aproximaciones obtenidas por métodos variacionales. Una de las características más importantes que se han encontrado es que, para una

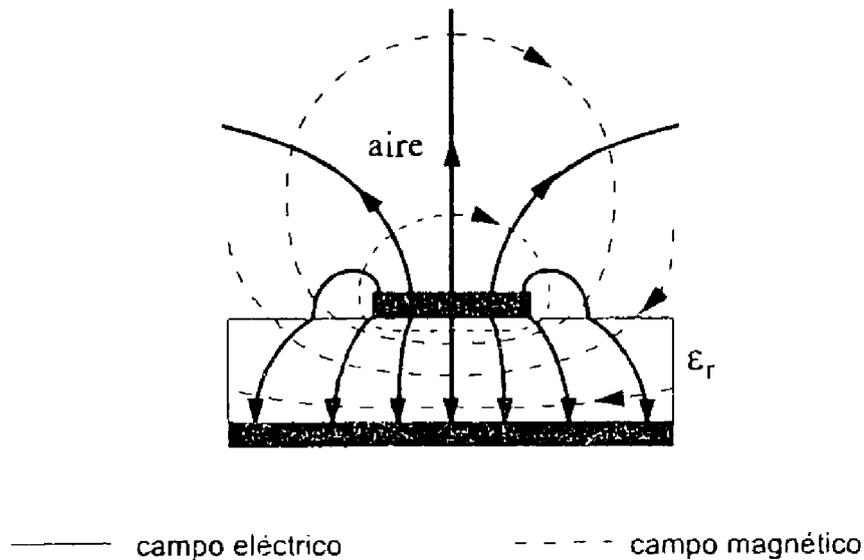


**Fig. 6-3** Transición de un cable coaxial con sección transversal circular a una línea de cinta.

separación fija entre los dos planos de tierra, la impedancia aumenta conforme se reduce la anchura de la placa central. No es de sorprender que esta conclusión sea análoga a la obtenida para un cable coaxial, cuando el diámetro de su conductor interno se reduce. Las expresiones matemáticas que se han obtenido para evaluar la impedancia característica y la atenuación de la triplaca son muy complejas. De haber interés en ellas, se recomienda consultar el artículo publicado por Cohn y el libro del autor Howe, incluidos en la sección de referencias. El manual de Jasik, en su sección de líneas de transmisión, también incluye fórmulas aproximadas para calcular la impedancia característica de la triplaca, la microcinta y otras configuraciones geométricas de líneas planares.

### 6.3 La microcinta

Como se dijo anteriormente, este tipo de línea es el que más se utiliza en la actualidad dentro de la tecnología de circuitos integrados. Su geometría es simple y fácil de fabricar. Sin embargo, a diferencia de la triplaca que es una línea blindada (salvo fugas laterales), la microcinta tiene el inconveniente de fuertes fugas, tanto por su lado superior como por los lados. En la Fig.



**Fig. 6-4** Líneas de campo eléctrico y magnético en una línea de microcinta.

6-4 se muestra la distribución de sus líneas de campo eléctrico y magnético. No sólo hay pérdidas por radiación, sino que, al propagarse una parte de la potencia por el dieléctrico y el resto por el aire, las velocidades de fase son diferentes y se produce dispersión. A pesar de esto, se ha encontrado que, cuando la permitividad relativa del sustrato es alta, entonces es razonablemente satisfactorio aproximar a la onda propagada en la línea como TEM (es decir, cuasi-TEM). O sea que, mientras más grande sea la  $\epsilon_r$  del sustrato, las líneas de campo de la Fig. 6-4 quedan más y más confinadas dentro del mismo sustrato.

La separación típica entre las dos placas es del orden de 1 a 2 mm. Por lo general son de cobre y el sustrato entre ellas tiene una permitividad relativa típica de aproximadamente 10. Esto último ha sido posible gracias al desarrollo en la síntesis de materiales con alta constante dieléctrica durante las últimas décadas. Pero la elección del dieléctrico depende finalmente del grado que se desee de fugas por radiación, pues en algunos casos esto puede aprovecharse, por ejemplo para la construcción de filtros por acoplamiento entre circuitos adyacentes o en el diseño de antenas de microcinta.

En términos generales, se ha encontrado que, manteniendo fijas las

### 370 *Líneas de cinta y microcinta*

dimensiones de la línea, su impedancia característica disminuye conforme se usa un dieléctrico con mayor  $\epsilon_r$ . En cuanto a los niveles de atenuación, éstos son del orden de 0.01 dB/cm. Los trabajos publicados por T. C. Edwards y E. O. Hammerstadt son excelentes referencias que contienen ecuaciones prácticas y un amplio análisis sobre estas líneas.

# Teoría de las fibras ópticas

---

## 7.1 Introducción

En las secciones 1.3 y 1.5 ya se dieron algunos antecedentes sobre las fibras ópticas, en comparación con otros medios alámbricos de transmisión (véanse las Figs. 1-9, 1-12 y 1-17, y la Tabla 1-2). La secuencia de análisis que se ha seguido en este texto ha sido partiendo de los cables con dos o más conductores (capítulos 2 y 3) a las guías con un solo conductor (capítulos 4 y 5), y ahora (capítulos 7 y 8) le toca su turno a las líneas que no tienen ningún conductor, por lo que se refiere a sus propiedades de transmisión. Estas últimas líneas (fibras ópticas) están hechas solamente de material dieléctrico y transmiten ondas electromagnéticas (luz modulada) en las frecuencias más altas que se utilizan en los sistemas de comunicaciones actuales. En la Fig. 7-1 se ilustran en forma muy aproximada los rangos de operación de los cables metálicos, las guías de ondas y las fibras ópticas.

Como se puede observar en la Fig. 7-1, la propagación de las ondas electromagnéticas de la luz modulada a lo largo de una fibra óptica se puede analizar teóricamente por dos métodos. El primero (campos electromagnéticos dados por las ecuaciones de Maxwell) se prefiere para el caso de la fibra monomodo. Este mismo método también puede emplearse para estudiar las fibras multimodo, pero se complica mucho matemáticamente, y por ello en este caso se procura emplear la segunda técnica (óptica geométrica o rayal), misma que simplifica el análisis y ofrece una imagen intuitiva de cómo se reflejan y refractan los rayos de luz en su avance a lo largo de la fibra.

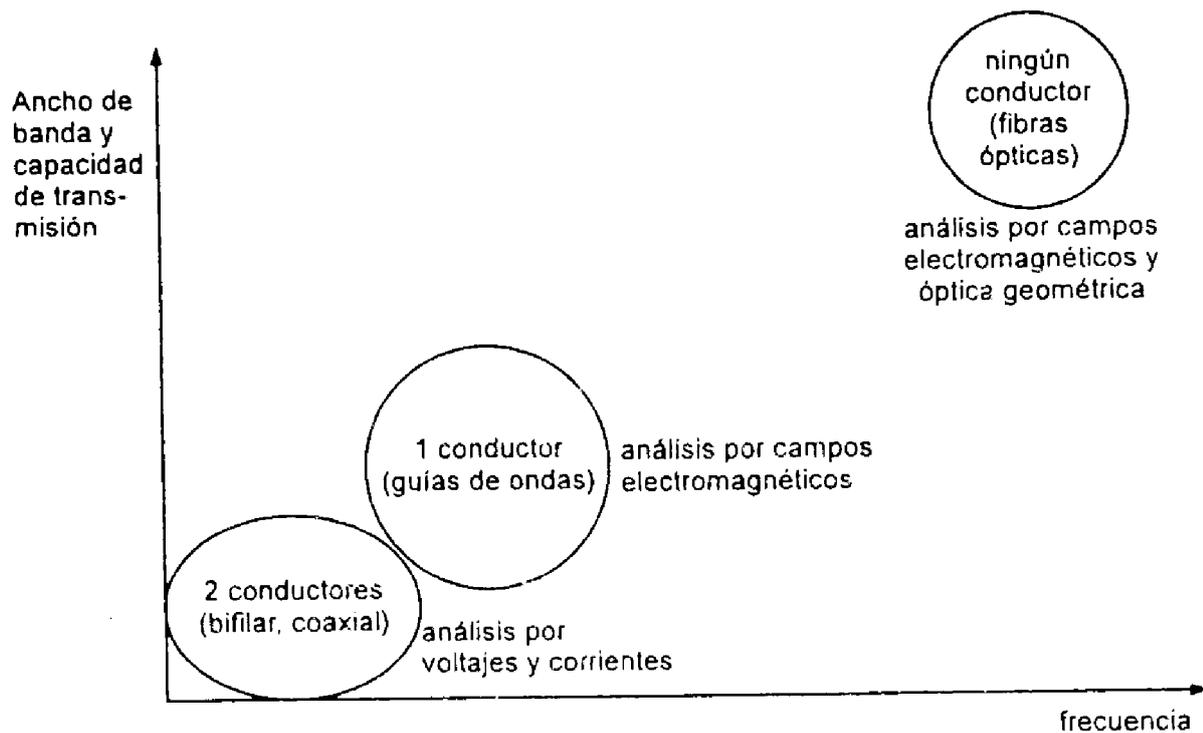
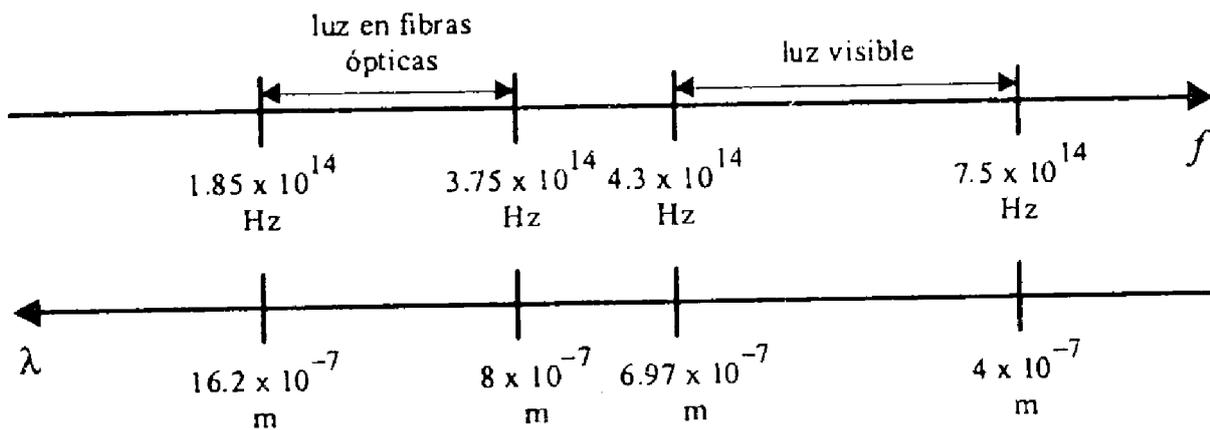


Fig. 7-1 Ilustración aproximada y comparativa de los rangos de frecuencia, capacidad de transmisión y métodos matemáticos de análisis de los cables metálicos, las guías de ondas y las fibras ópticas.

A las fibras ópticas también se les llama guías dieléctricas de ondas, a diferencia de las guías metálicas o huecas estudiadas en el capítulo 4. Las estructuras hechas con material dieléctrico también pueden guiar ondas electromagnéticas a diversas frecuencias. Sin embargo, en el rango de las microondas, por ejemplo, las barras dieléctricas se emplean como antenas y no como líneas. Una barra dieléctrica se analiza matemáticamente de la misma forma que una fibra óptica de índice escalonado (sección 7.3), sólo que su "revestimiento" generalmente es el aire ( $\epsilon = \epsilon_0$ ). Conforme la frecuencia se incrementa a valores ópticos, las pérdidas en las guías metálicas son demasiado elevadas (Fig. 4-18) y las dimensiones de su sección transversal (en caso de quererlas fabricar) serían extremadamente pequeñas (pues deberían ser comparables a la longitud de onda). En cambio, las guías dieléctricas presentan pocas pérdidas (de 0.15 dB/km a 3 dB/km, según el tipo de fibra) y se pueden emplear eficazmente para transmitir a frecuencias ópticas.

En general, el tipo de luz que viaja por una fibra es invisible, ya que las frecuencias empleadas corresponden al infrarrojo cercano o al infrarrojo lejano en el espectro electromagnético (Fig. 7-2). Estas frecuencias usadas para transmitir luz por fibra óptica son unas dos veces más bajas que las frecuencias visibles\*.



**Fig. 7-2** Comparación entre las frecuencias de la luz visible y las empleadas típicamente en fibras ópticas.  $\lambda$  está calculada para el espacio libre.

En la sección 7.3 se procederá a resolver las ecuaciones de Maxwell para obtener los campos electromagnéticos en una fibra de índice escalonado, pero antes conviene estudiar algunas características básicas de las fibras y los cables formados con ellas.

## 7.2 Tipos de fibras y cables ópticos

Desde el punto de vista geométrico, una fibra óptica consiste en una barra dieléctrica cilíndrica muy delgada y larga, rodeada por una capa concéntrica de otro material dieléctrico. La barra central se denomina *núcleo* y la capa es llamada *revestimiento* o recubrimiento (Fig. 7-3). El grosor total del conjunto es tan pequeño, que por su aspecto filamentosario se le da el nombre de "fibra".

El material que se emplea para fabricar las fibras es un vidrio flexible sumamente puro y transparente, obtenido a través de un proceso de

\* Véase también la Fig. 1-9.

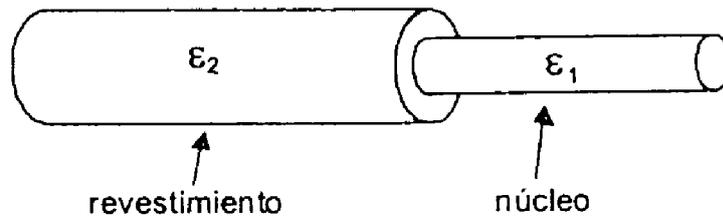


Fig. 7-3 Geometría de una fibra óptica (véase también la Fig. 1-5).

refinamiento muy elaborado, en donde la materia prima es dióxido de silicio ( $\text{SiO}_2$ ). Esta materia prima abunda en la arena del mar. El dióxido de silicio es dopado radialmente con otros materiales, como germanio o pentóxido de fósforo, para aumentar su índice de refracción; o bien, si se desea reducir éste, entonces se dopa con boro. La mezcla con mayor índice de refracción se usará para el núcleo; y la de menor índice, para el revestimiento. La permitividad relativa del revestimiento es ligeramente menor (por menos de 1%) que la permitividad relativa del núcleo. Como se verá más adelante, esta diferencia, aunque pequeña, permite que las ondas electromagnéticas se propaguen a lo largo de la fibra por reflexiones internas sucesivas en la frontera núcleo-revestimiento, lográndose así un efecto de rebote continuo similar al de las guías huecas, de una pared a la pared opuesta, y así sucesivamente hasta llegar al final de la línea.

Un cable óptico puede contener una o varias fibras ópticas. En la Fig. 7-4 se muestra un ejemplo de un arreglo típico con seis fibras. Las fibras son rodeadas por una o varias capas protectoras de plásticos compactos, y en el interior puede haber conductores de cobre empleados para darle energía eléctrica a los equipos repetidores que se necesiten a lo largo de todo el

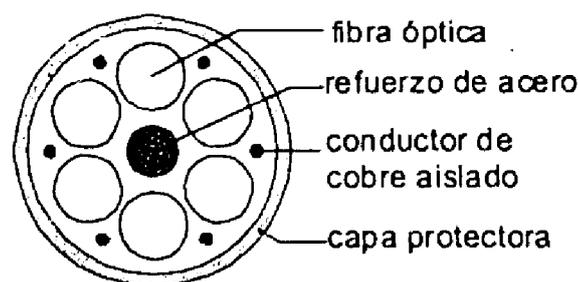
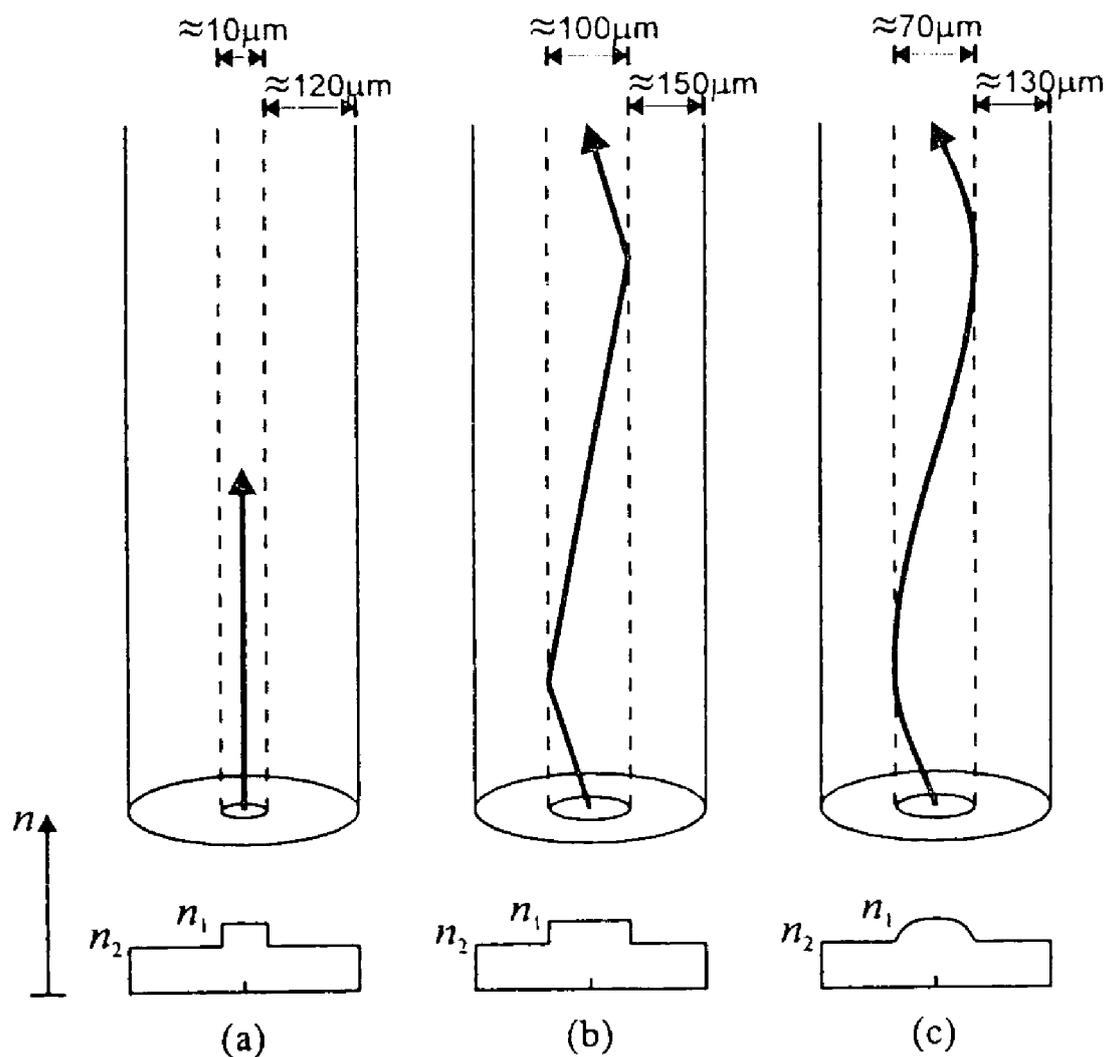


Fig. 7-4 Cable óptico con seis fibras ópticas.

enlace. Estos conductores de cobre también pueden servir como línea de prueba o de servicio durante la instalación del cable. El mismo cable puede llevar en el centro un conductor de acero que le suministra rigidez mecánica.

Existen fundamentalmente tres tipos de fibras ópticas: monomodo de índice escalonado\*, multimodo de índice escalonado y multimodo de índice gradual. Como puede observarse en la Fig. 7-5, el índice de refracción\*\*



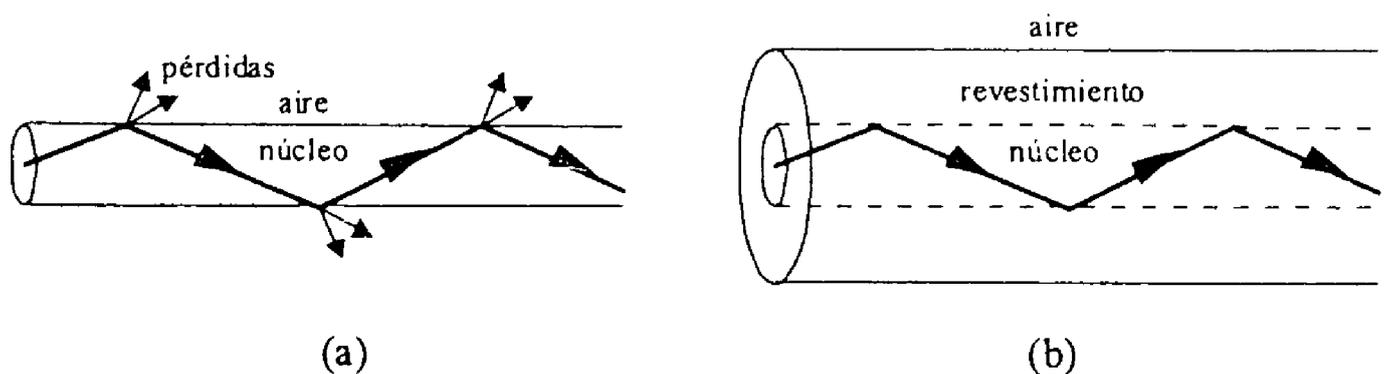
**Fig. 7-5** Los tres tipos fundamentales de fibras ópticas y comparación del grosor y el índice de refracción del núcleo y el revestimiento para cada uno, así como de la trayectoria de los rayos de luz en el núcleo. a) monomodo de índice escalonado, b) multimodo de índice escalonado, y c) multimodo de índice gradual.

\* También se le llama fibra de salto de índice, o fibra de índice abrupto.

\*\* El índice de refracción  $n$  no es más que  $\sqrt{\epsilon_r}$  del dieléctrico. Por lo tanto, la velocidad de la luz en un medio dieléctrico con índice de refracción  $n$  es simplemente  $v = c/n$ , en donde  $c$  es la velocidad en el vacío.

es, en todos los casos, mayor en el núcleo que en el revestimiento. La fibra monomodo de índice escalonado tiene un núcleo muy angosto con índice de refracción uniforme. La fibra multimodo de índice escalonado tiene un núcleo mucho más ancho, aunque también con índice de refracción constante. Y finalmente, la fibra multimodo de índice gradual también tiene un núcleo ancho, pero el índice de refracción va variando gradualmente hasta alcanzar su máximo en el centro del núcleo. Los valores de los índices de refracción  $n$  varían generalmente entre 1.0 y 1.5. Las aplicaciones de cada tipo de fibra se estudian en el capítulo 8.

Nótese que, tal como se comentó en la sección 7.1, la fibra óptica podría funcionar como guía aun sin el revestimiento, sólo que su eficiencia sería menor. Si únicamente consistiese del núcleo, en realidad sería una simple barra dieléctrica, con aire en la frontera, por donde habría importantes fugas de energía en forma de radiación (Fig. 7-6 a). En cambio, al rodear al núcleo con su revestimiento, cuyo índice de refracción es muy ligeramente inferior al del núcleo, las pérdidas se reducen al mejorar la reflexión interna (véase la sección 7.10), incrementándose significativamente la eficiencia de la fibra (Fig. 7-6 b).



**Fig. 7-6** a) Una fibra óptica sin revestimiento tiene fugas (pérdidas) por radiación. b) Las pérdidas se reducen rodeando al núcleo con un revestimiento.

### 7.3 Propagación y ecuación característica en una fibra de índice escalonado

El desarrollo matemático necesario para presentar las características de propagación en una fibra óptica generalmente resulta difícil y confuso para los estudiantes que se enfrentan por primera vez a este tema. Los textos que existen son o incompletos o demasiado sofisticados, y pocas veces se ilustran los conceptos con suficientes ejercicios. Por tanto, a continuación y hasta donde sea posible, el autor se esforzará y tratará de darle al lector una imagen introductoria, lógica y ordenada de lo que ocurre en una fibra óptica, sin dejar a un lado la elegancia matemática inherente a este medio de propagación y tema de actualidad. Como se verá, el estudio detallado de los modos principales de propagación en la fibra resulta ser una tarea extraordinaria, y por ello se enfatizará más en el modo dominante.

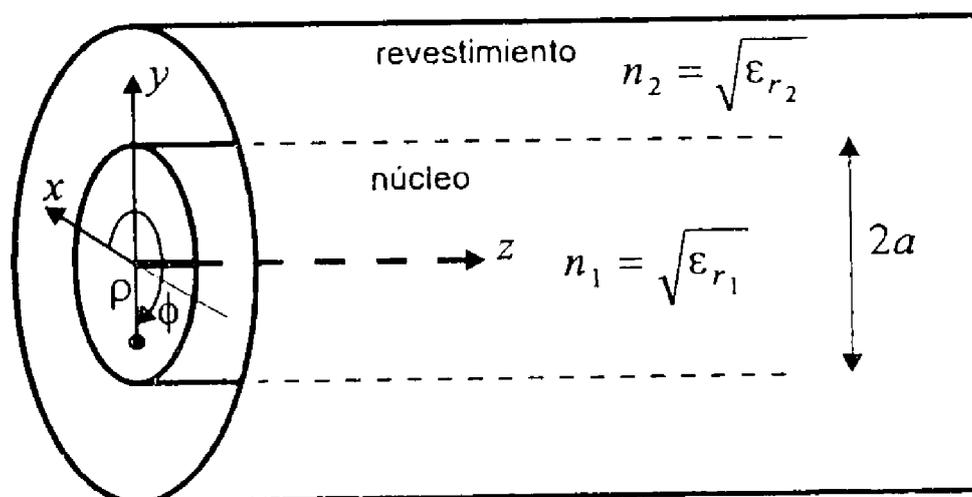


Fig. 7-7 Sistema de coordenadas para analizar la propagación en una fibra óptica con núcleo de radio  $a$ .

En la Fig. 7-7 se muestran la fibra óptica por ser analizada y el sistema de coordenadas empleado. La geometría cilíndrica de la fibra es similar a la de la guía de ondas circular estudiada en la sección 4.9, y por lo tanto las componentes  $E_z$  y  $H_z$  de la fibra deben satisfacer las mismas *ecs.* (4-154) y (4-155), con las condiciones de frontera adecuadas. Por facilidad, la forma de estas ecuaciones se repite a continuación:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + h^2 \Psi = 0 \quad (7-1)$$

en donde

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (7-2)$$

La variable  $\Psi$  puede representar a  $E_z$  o a  $H_z$ , de acuerdo con las condiciones de frontera que se empleen al resolver la ec. (7-1). La solución en el caso de las guías circulares metálicas es más sencilla que la que se busca ahora, pues solamente podía haber modos TE y TM. Pero como se verá más adelante, en una fibra óptica, salvo en un caso particular, ninguna de las dos componentes  $E_z$  o  $H_z$  puede valer cero. Esto da origen a los modos de propagación llamados *híbridos*, designados como HE y EH\*, en donde ambas componentes axiales existen, y el análisis matemático se vuelve más complejo.

Por lo que al núcleo se refiere, dado que  $\epsilon_1$  es constante para toda  $\rho$ , es evidente que la forma de la solución de la ec. (7-1) es similar a la que se encontró para la guía metálica circular:

$$\Psi = J_m(h_1 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho < a) \quad (7-3)$$

en donde, a partir de la ec. (7-2):

$$h_1^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \quad (\mu_r = 1, \epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r_1}) \quad (7-4)$$

Para puntos de campo dentro del revestimiento, una solución similar a la ec. (7-3) no es válida, porque la función  $J_m(h\rho)$  es proporcional apenas a  $1/\sqrt{h\rho}$  cuando  $m$  es muy grande, y se necesita una disminución mucho más rápida en la dirección  $\rho$ , de tipo exponencial, para que la mayor parte de la potencia sea transmitida a lo largo del núcleo. Para esto, es preciso que la constante  $h^2$  sea negativa:

$$h_2^2 = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_2) \quad (\mu_r = 1, \epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r_2}) \quad (7-5)$$

---

\* En los estándares del IEEE se les designa a estos modos híbridos como HEM, pero las designaciones HE y EH son más comunes.

y entonces, la solución en el revestimiento queda como:

$$\Psi = K_m(h_2 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho > a) \quad (7-6)$$

en donde  $K_m(h\rho)$  es un función Bessel modificada de segunda clase, que decrece exponencialmente hacia cero conforme  $h\rho$  aumenta. También es posible utilizar funciones Hankel de orden  $m$ , de primera o segunda clase, cuyos argumentos son imaginarios ( $j h\rho$  o  $-j h\rho$ , respectivamente). Estas funciones son empleadas en algunos textos y están relacionadas proporcionalmente con las funciones Bessel modificadas por medio de un coeficiente real o imaginario, según el valor de  $m$ .

La gráfica de las funciones  $J_m(h\rho)$  que forman parte de la solución dentro del núcleo es la misma que la de la Fig. 4-22. Por comodidad, para emplearla a continuación, la misma figura se reproduce aquí como la Fig. 7-8.

En cuanto a la gráfica de las funciones  $K_m(h\rho)$ , su comportamiento decreciente con  $\rho$  se muestra en la Fig. 7-9.

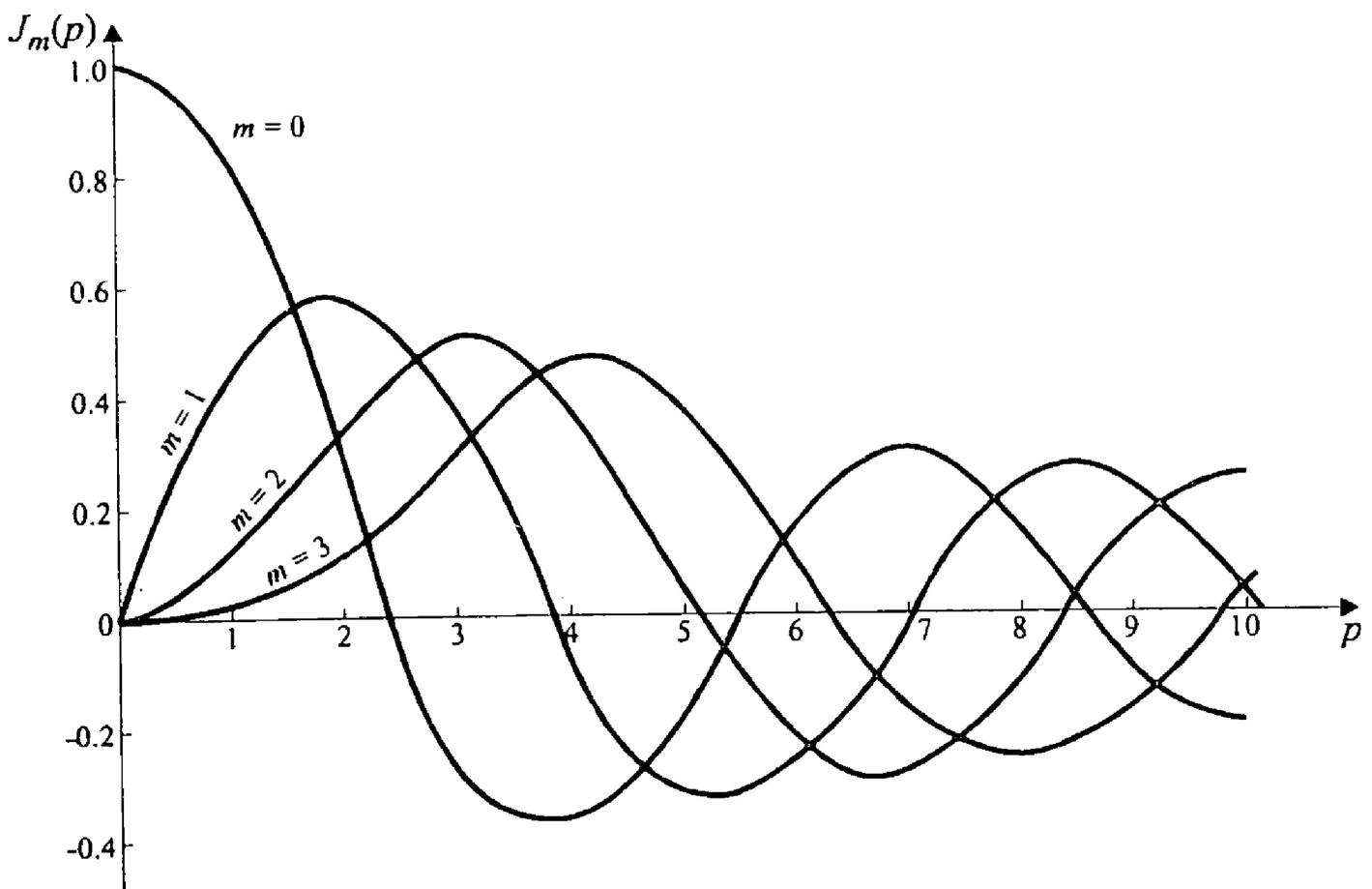


Fig. 7-8 Funciones Bessel de primera clase,  $J_m(p)$ .

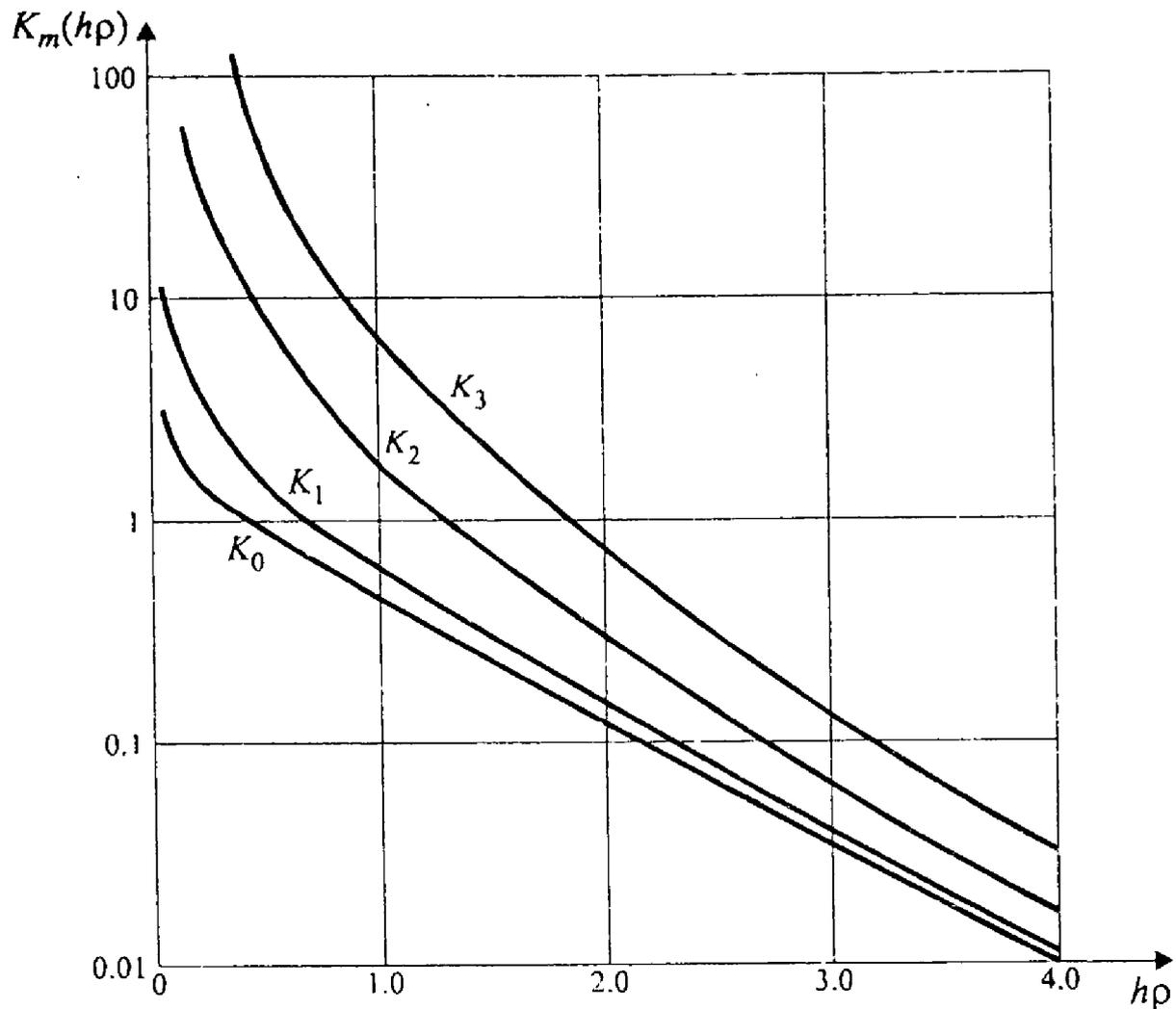


Fig. 7-9 Gráfica de las funciones Bessel modificadas  $K_m(h\rho)$ .

Siguiendo un criterio similar al que se planteó al estudiar las guías metálicas en el capítulo 4, habrá propagación en la fibra a partir de una cierta frecuencia de corte, cuando  $\gamma$  se vuelva imaginaria pura ( $\gamma = j\beta$ ). Para esta condición, de la ec. (7-4) se obtiene, con  $h_1^2$  positiva, que:

$$\beta^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$$

y de la ec. (7-5), con  $h_2^2$  negativa, se obtiene:

$$\beta^2 > \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$$

Por lo tanto, juntando ambos resultados anteriores:

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 < \beta^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \quad (7-7)$$

Este rango para  $\beta^2$  también se puede expresar en términos de los índices de refracción del núcleo ( $n_1$ ) y del revestimiento ( $n_2$ ), recordando que

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon = n^2 \epsilon_0$$

quedando la ec. (7-7) como:

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n_2^2 < \beta^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n_1^2$$

y dado que la velocidad de la luz en el vacío es igual a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

el rango para la constante de fase  $\beta$  está dado finalmente por:

$$\frac{\omega n_2}{c} < \beta < \frac{\omega n_1}{c} \tag{7-8}$$

Nótese que en el presente análisis la solución dada por la ec. (7-6) supone que el revestimiento se extiende muchísimo en la dirección  $\rho$  (en teoría, hasta el infinito), para garantizar que los campos de los modos de propagación en la guía decrezcan exponencialmente hasta alcanzar valores despreciables al final del revestimiento. En la práctica, dicho revestimiento es lo suficientemente grueso, de tal manera que los campos no llegan a salir del mismo y, por lo tanto, la suposición anterior es válida.

En la frontera núcleo-revestimiento, al tratarse de dos materiales dieléctricos, debe haber continuidad para toda  $z$  en la componente tangencial axial y en la componente tangencial en la dirección  $\phi$  de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  (pues no hay corriente en la frontera), es decir:

$$\left. \begin{aligned} E_{z_1}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) &= E_{z_2}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) \\ H_{z_1}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) &= H_{z_2}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) \\ E_{\phi_1}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) &= E_{\phi_2}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) \\ H_{\phi_1}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) &= H_{\phi_2}(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z) \end{aligned} \right\} \tag{7-9}$$

Las soluciones generales para  $H_z$  en el núcleo y en el revestimiento, con sus coeficientes respectivos, se obtienen de las *ecs.* (7-3) y (7-6). Los coeficientes elegidos satisfacen los requerimientos (7-9) de continuidad cuando  $\rho = a$ :

$$H_z = \left[ \frac{A}{J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho \leq a) \quad (7-10)$$

$$H_z = \left[ \frac{A}{K_m(h_2 a)} \right] K_m(h_2 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho \geq a) \quad (7-11)$$

Se observa que cuando  $\rho = a$  (frontera dieléctrico-dieléctrico) en las *ecs.* (7-10) y (7-11), los resultados para  $H_z$  son idénticos.

En cuanto a las soluciones generales para  $E_z$ , también pueden deducirse, con sus coeficientes respectivos para las regiones del núcleo y el revestimiento, a partir de las *ecs.* (7-3) y (7-6), pero eligiendo la función  $\sin m\phi$  en lugar de  $\cos m\phi$ . Esto es necesario para satisfacer las demás condiciones de continuidad del problema. Así que:

$$E_z = \left[ \frac{B}{J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \sin m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho \leq a) \quad (7-12)$$

$$E_z = \left[ \frac{B}{K_m(h_2 a)} \right] K_m(h_2 \rho) \sin m\phi e^{-\gamma z} \quad (\rho \geq a) \quad (7-13)$$

Nuevamente, se nota que cuando  $\rho = a$  en las *ecs.* (7-12) y (7-13), los resultados para  $E_z$  son idénticos en la frontera, cumpliéndose con los requerimientos (7-9) de continuidad.

Las demás componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  pueden determinarse a partir de las componentes axiales anteriores, despejándolas con un poco de álgebra de la primera ecuación de Maxwell, *ec.* (4-1), en coordenadas cilíndricas. Las expresiones resultantes, considerando que  $h^2$  debe ser negativa para  $\rho > a$ , son:

$$E_{\phi} = \left( \frac{j\omega\mu}{h_1^2} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \left( \frac{j\beta}{h_1^2 \rho} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \quad (\rho \leq a) \quad (7-14)$$

$$E_{\phi} = - \left( \frac{j\omega\mu}{h_2^2} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \left( \frac{j\beta}{h_2^2 \rho} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \quad (\rho \geq a) \quad (7-15)$$

$$H_{\phi} = - \left( \frac{j\beta}{h_1^2 \rho} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \left( \frac{j\omega\epsilon_1}{h_1^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (\rho \leq a) \quad (7-16)$$

$$H_{\phi} = \left( \frac{j\beta}{h_2^2 \rho} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \left( \frac{j\omega\epsilon_2}{h_2^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (\rho \geq a) \quad (7-17)$$

Nótese que los dos términos del lado derecho en cada una de estas últimas cuatro ecuaciones tienen el mismo comportamiento en azimut (dirección  $\phi$ ), después de efectuar las derivadas parciales correspondientes. Esta sincronía se obtiene gracias a que se eligió la función  $\sin m\phi$  para las componentes  $E_z$  dadas por las *ecs.* (7-12) y (7-13). Finalmente, las componentes\* en  $\rho$  son:

$$E_{\rho} = \left( -\frac{j}{h_1^2} \right) \left[ \left( \frac{\omega\mu}{\rho} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + (\beta) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right] \quad (\rho \leq a) \quad (7-18)$$

$$E_{\rho} = \left( \frac{j}{h_2^2} \right) \left[ \left( \frac{\omega\mu}{\rho} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + (\beta) \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right] \quad (\rho \geq a) \quad (7-19)$$

$$H_{\rho} = \left( -\frac{j}{h_1^2} \right) \left[ (\beta) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \left( \frac{\omega\epsilon_1}{\rho} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad (\rho \leq a) \quad (7-20)$$

---

\* Recuérdese que las tres componentes de cada campo son soluciones fasoriales. Para obtener cada componente en función del espacio y del tiempo habrá que multiplicar su forma fasorial por  $e^{j\omega t}$  y tomar la parte real.

$$H_\rho = \left( \frac{j}{h_2^2} \right) \left[ (\beta) \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \left( \frac{\omega \epsilon_2}{\rho} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad (\rho \geq a) \quad (7-21)$$

En la ec. (7-8) se indicó el rango de valores para la constante de fase  $\beta$ , pero aún falta calcularla para cada modo de propagación. Para ello, a continuación se planteará la ecuación característica que hay que resolver para encontrarla, satisfaciendo las condiciones de continuidad restantes dadas por (7-9), es decir, que  $E_\phi$  y  $H_\phi$  deben ser iguales en ambos dieléctricos para  $\rho = a$ . Pero antes de establecer estas ecuaciones de continuidad, conviene adoptar la notación siguiente para simplificar la escritura de las expresiones finales:

$$\left[ \frac{1}{J_m(h_1 a)} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} J_m(h_1 \rho) \right]_{\rho=a} = h_1 \left[ \frac{J'_m(h_1 a)}{J_m(h_1 a)} \right] = h_1 f_m(h_1 a) \quad (7-22)$$

$$\left[ \frac{1}{K_m(h_2 a)} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} K_m(h_2 \rho) \right]_{\rho=a} = h_2 \left[ \frac{K'_m(h_2 a)}{K_m(h_2 a)} \right] = h_2 g_m(h_2 a) \quad (7-23)$$

$$h_1 a = p \quad (7-24)$$

$$h_2 a = q \quad (7-25)$$

Ahora sí, la penúltima ecuación de continuidad se obtiene igualando (7-14) con (7-15) en la frontera, y como en ambos miembros se cancelan los términos  $\cos m\phi e^{-\gamma z}$ , queda:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{j\omega\mu}{h_1^2} \right) [Ah_1 f_m(h_1 a)] - \left( \frac{j\beta}{h_1^2 a} \right) [mB] \\ & = - \left( \frac{j\omega\mu}{h_2^2} \right) [Ah_2 g_m(h_2 a)] + \left( \frac{j\beta}{h_2^2 a} \right) [mB] \end{aligned}$$

Simplificando y utilizando las igualdades (7-24) y (7-25):

$$\frac{A\omega\mu}{h_1} f_m(p) - \frac{Bm\beta}{h_1 p} = -\frac{A\omega\mu}{h_2} g_m(q) + \frac{Bm\beta}{h_2 q}$$

y dividiendo todos los términos por  $a$ :

$$\frac{A\omega\mu}{p} f_m(p) - \frac{Bm\beta}{p^2} = -\frac{A\omega\mu}{q} g_m(q) + \frac{Bm\beta}{q^2} \quad (7-26)$$

Asimismo, la última ecuación de continuidad se obtiene igualando (7-16) con (7-17) en la frontera, donde  $\rho = a$ , y cancelando los términos  $\sin m\phi e^{-\gamma z}$  en ambos miembros:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{j\beta}{h_1^2 a}\right)[-Am] - \left(\frac{j\omega\epsilon_1}{h_1^2}\right)[Bh_1 f_m(h_1 a)] \\ = \left(\frac{j\beta}{h_2^2 a}\right)[-Am] + \left(\frac{j\omega\epsilon_2}{h_2^2}\right)[Bh_2 g_m(h_2 a)] \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{\beta Am}{h_1 p} - \frac{\omega\epsilon_1 B}{h_1} f_m(p) = -\frac{\beta Am}{h_2 q} + \frac{\omega\epsilon_2 B}{h_2} g_m(q)$$

y nuevamente dividiendo todos los términos por  $a$ :

$$\frac{Am\beta}{p^2} - \frac{B\omega\epsilon_1}{p} f_m(p) = -\frac{Am\beta}{q^2} + \frac{B\omega\epsilon_2}{q} g_m(q) \quad (7-27)$$

Como  $\beta$  debe satisfacer en forma simultánea las ecs. (7-26) y (7-27) de continuidad para  $E_\phi$  y  $H_\phi$ , respectivamente, en ambas ecuaciones se puede despejar el cociente  $B/A$  e igualarlos, de la manera siguiente:

De la ec. (7-26):

$$A \left[ \frac{\omega\mu}{p} f_m(p) + \frac{\omega\mu}{q} g_m(q) \right] = B \left[ \frac{m\beta}{p^2} + \frac{m\beta}{q^2} \right]$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\omega\mu \left[ \frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right]}{m\beta \left[ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]} \quad (7-28)$$

De la ec. (7-27):

$$A \left[ \frac{m\beta}{p^2} + \frac{m\beta}{q^2} \right] = B \left[ \frac{\omega\varepsilon_2}{q} g_m(q) + \frac{\omega\varepsilon_1}{p} f_m(p) \right]$$

$$\frac{B}{A} = \frac{m\beta \left[ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]}{\omega \left[ \frac{\varepsilon_2}{q} g_m(q) + \frac{\varepsilon_1}{p} f_m(p) \right]} \quad (7-29)$$

Igualando (7-28) con (7-29) se obtiene la ecuación que hay que resolver para encontrar el valor de  $\beta$  de cada uno de los modos de propagación. Recordando que  $\mu = \mu_0$  para los dos dieléctricos, dicha ecuación adopta la forma:

$$\omega^2 \mu_0 \left[ \frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right] \left[ \frac{\varepsilon_1 f_m(p)}{p} + \frac{\varepsilon_2 g_m(q)}{q} \right]$$

$$= m^2 \beta^2 \left[ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]^2 \quad (7-30)$$

Recuérdese, a partir de las ecs. (7-4), (7-5), (7-24) y (7-25), que  $p$  y  $q$  también contienen a la incógnita  $\beta$ , además de la frecuencia  $\omega$ , por lo que la ec. (7-30), en la que también van incluidas las funciones Bessel  $J_m$  y  $K_m$ , así

como sus derivadas, no se puede resolver directamente con facilidad. Es necesario utilizar métodos numéricos para resolver la ecuación, y las raíces serán aquellas para las cuales, en general, ni  $E_z$  ni  $H_z$  valgan cero (modos híbridos).

Para entender cómo se designan los modos de propagación de acuerdo con sus subíndices  $mn$ , conviene analizar nuevamente las funciones Bessel graficadas en la Fig. 7-8. Debido a su comportamiento oscilatorio, la función  $J_m$  pasará  $n$  veces por el eje de ordenada igual a cero, y por lo tanto habrá  $n$  raíces para cada valor de  $m$ . Cada combinación posible de  $m$  y  $n$  corresponde a un modo de propagación diferente, y su constante de fase se puede designar como  $\beta_{mn}$ . Y por lo que se refiere a la designación de los modos, éstos pueden ser  $TE_{mn}$ ,  $TM_{mn}$ ,  $EH_{mn}$  o  $HE_{mn}$ .

Los modos TE y TM en una fibra óptica son un caso muy particular y solamente ocurren cuando  $m = 0$ , pues entonces los campos son circularmente simétricos e independientes de la coordenada  $\phi$ . Para cualquier otro valor de  $m \neq 0$ , los modos son híbridos (EH o HE). En un modo HE,  $H_z$  contribuye mayoritariamente al campo transversal; y en un modo EH,  $E_z$  es la componente que contribuye más a dicho campo transversal.

El caso especial de  $m = 0$  permite simplificar la ecuación característica para encontrar a  $\beta$ , pues la ec. (7-27) se reduce a:

$$B \left[ \frac{\omega \epsilon_2}{q} g_m(q) + \frac{\omega \epsilon_1}{p} f_m(p) \right] = 0$$

Esta ecuación se satisface si  $B = 0$ , por lo que al sustituir dicho valor de  $B$  en la ec. (7-26), se tiene una ecuación característica mucho más simple que la ec. (7-30):

$$A\omega\mu \left[ \frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right] = 0$$

y dividiendo ambos miembros entre  $A\omega\mu$ :

$$\frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} = 0 \tag{7-31}$$

Esta ecuación simplificada también pudo haberse obtenido directamente de la ec. (7-30), con  $m = 0$  y tomando en cuenta que  $\varepsilon_1 \neq 0$  y  $\varepsilon_2 \neq 0$ . Ahora bien, de acuerdo con las ecs. (7-12) y (7-13),  $E_z = 0$ , ya que  $B = 0$  y  $m = 0$ ; por lo tanto, la ec. (7-31) corresponde a la ecuación característica de  $\beta_{0n}$  para los modos  $TE_{0n}$ . La ecuación correspondiente para los modos  $TM_{0n}$  se obtiene haciendo  $A = 0$  (véanse las ecs. 7-10 y 7-11), de manera que  $H_z = 0$  y la ec. (7-27) adopta la forma:

$$B\omega \left[ \frac{\varepsilon_1}{p} f_m(p) + \frac{\varepsilon_2}{q} g_m(q) \right] = 0$$

y como ni  $B$  ni  $\omega$  pueden valer cero, se tiene que:

$$\frac{\varepsilon_1}{p} f_m(p) + \frac{\varepsilon_2}{q} g_m(q) = 0 \quad (7-32)$$

Por facilidad, las ecuaciones características de  $\beta$  para los modos transversales e híbridos se concentran en la Tabla 7-1.

Continuando con nuestro desarrollo, a partir de las ecs. (7-4) y (7-5), los valores de  $p$  y  $q$  también deben satisfacer la relación siguiente:

$$p^2 + q^2 = a^2(h_1^2 + h_2^2) = \left[ (j\beta)^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon_1 - (j\beta)^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_2 \right] a^2$$

O sea que:

$$p^2 + q^2 = \omega^2\mu_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a^2 = V^2 \quad (7-33)$$

A  $V$  se le da el nombre de *frecuencia normalizada*  $V$ , o parámetro  $V$ , o número  $V$ , y es un parámetro muy importante relacionado con la condición de corte de la fibra. Es un número adimensional que define cuántos modos diferentes puede haber simultáneamente en la fibra a una frecuencia determinada.

En el caso de una fibra óptica, la condición de *corte* de un modo se define como el punto en el que ese modo ya no queda restringido a propagarse en la región del núcleo y la zona cercana de su revestimiento, sino que los campos se extienden mucho más allá de la geometría cilíndrica de la fibra,

Tabla 7-1 Ecuación característica de  $\beta$  para una fibra óptica de índice escalonado.

$m$	modos	ecuación
0	$TE_{0n}$	$\frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} = 0 \quad (7-31)$
0	$TM_{0n}$	$\frac{\epsilon_1}{p} f_m(p) + \frac{\epsilon_2}{q} g_m(q) = 0 \quad (7-32)$
$\geq 1$	$EH_{mn}$ y $HE_{mn}$	$\omega^2 \mu_0 \left[ \frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right] \left[ \frac{\epsilon_1 f_m(p)}{p} + \frac{\epsilon_2 g_m(q)}{q} \right] = m^2 \beta^2 \left[ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]^2 \quad (7-30)$
$p = h_1 a \quad q = h_2 a \quad h_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \beta^2 \quad h_2^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$		

y ésta radia, como si fuese una antena cilíndrica, en lugar de guiar la potencia de la señal a lo largo de la fibra. Matemáticamente, esta condición de corte equivale a decir que  $q$  y  $q^2$  tienden al valor cero en la ecuación característica (7-30), pues la función  $K_m(h_2 a = q)$  adoptaría valores muy grandes (Fig. 7-9).

La expresión para calcular la frecuencia normalizada  $V$  dada por la ec. (7-33) también se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 V^2 &= \omega^2 \mu_0 a^2 (\epsilon_0 \epsilon_{r_1} - \epsilon_0 \epsilon_{r_2}) \\
 &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 a^2 [n_1^2 - n_2^2] \\
 &= (2\pi f)^2 \frac{a^2}{c^2} [n_1^2 - n_2^2]
 \end{aligned}$$

y finalmente:

$$V = \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) [n_1^2 - n_2^2]^{1/2} \quad (7-34)$$

A la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los índices de refracción en la ec. (7-34) se le da el nombre de *apertura numérica* y se designa como  $NA^*$ :

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (7-35)$$

Como se verá más adelante, en la sección 7.11, la apertura numérica está relacionada con el *ángulo de aceptación*  $\theta_a$  de la fibra, a través de la ecuación siguiente:

$$NA = \text{sen } \theta_a \quad (7-36)$$

o bien:

$$\theta_a = \text{ang sen } \left[ \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right] \quad (7-37)$$

Este ángulo de aceptación está directamente ligado con las características de la fibra, en lo que se refiere a su capacidad para aceptar la luz inyectada en el núcleo. Es igual al ángulo de incidencia máximo permisible de un rayo de luz con respecto a la superficie de la fibra para el cual se obtiene reflexión interna total (sección 7.10) en la interfaz núcleo-revestimiento.

---

\* De su designación en inglés: *Numerical Aperture*.

## 7.4 Método aproximado para resolver la ecuación característica de una fibra de índice escalonado

A continuación se resolverá la ecuación característica (7-30) por un método de aproximación denominado de "conducción débil". Este método permite obtener aproximaciones simplificadas y bastante precisas, en base a la consideración de que los índices de refracción en el núcleo ( $n_1$ ) y en el revestimiento ( $n_2$ ) son casi iguales ( $n_1 - n_2 \ll 1$ ). Bajo estas condiciones,  $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$  y  $\beta^2 \approx \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$  (véase la ec. 7-7). Al sustituir tales aproximaciones directamente en la ec. (7-30), ésta toma la forma siguiente:

$$\left(\omega^2 \mu_0 \epsilon_1\right) \left[ \frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right]^2 = m^2 \left(\omega^2 \mu_0 \epsilon_1\right) \left[ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right]^2$$

El factor dentro del paréntesis rectangular en el primer miembro de la ecuación anterior se puede representar por  $F_m$ , de modo que dicha ecuación queda como:

$$F_m = \pm m \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \quad (7-38)$$

en donde, recordando la notación adoptada previamente en las ecs. (7-22) y (7-23):

$$F_m = \frac{1}{p} f_m(p) + \frac{1}{q} g_m(q) = \frac{1}{p} \left[ \frac{J'_m(p)}{J_m(p)} \right] + \frac{1}{q} \left[ \frac{K'_m(q)}{K_m(q)} \right] \quad (7-39)$$

Para encontrar las raíces, es necesario utilizar algunas identidades. Se puede demostrar que las funciones Bessel cumplen con las siguientes relaciones:

$$J'_m(p) = \frac{m}{p} J_m(p) - J_{m+1}(p) \quad (7-40)$$

$$J'_m(p) = -\frac{m}{p} J_m(p) + J_{m-1}(p) \quad (7-41)$$

$$K'_m(q) = \frac{m}{q} K_m(q) - K_{m+1}(q) \quad (7-42)$$

$$K'_m(q) = -\frac{m}{q} K_m(q) - K_{m-1}(q) \quad (7-43)$$

De manera que la solución de la ecuación característica aproximada (7-38) se obtiene, en el caso del signo positivo, empleando las relaciones (7-40) y (7-42) con la (7-39):

$$\begin{aligned} \frac{1}{p J_m(p)} \left[ \frac{m}{p} J_m(p) - J_{m+1}(p) \right] + \frac{1}{q K_m(q)} \left[ \frac{m}{q} K_m(q) - K_{m+1}(q) \right] \\ = m \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{m}{p^2} - \frac{J_{m+1}(p)}{p J_m(p)} + \frac{m}{q^2} - \frac{K_{m+1}(q)}{q K_m(q)} = \frac{m}{p^2} + \frac{m}{q^2}$$

Y finalmente, la condición que debe satisfacerse es:

$$\frac{1}{p} \left[ \frac{J_{m+1}(p)}{J_m(p)} \right] = -\frac{1}{q} \left[ \frac{K_{m+1}(q)}{K_m(q)} \right] \quad (7-44)$$

Para resolver el caso del signo negativo en la ec. (7-38), se utilizan las relaciones (7-41) y (7-43), llegándose así a la segunda solución de la ecuación característica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p J_m(p)} \left[ -\frac{m}{p} J_m(p) + J_{m-1}(p) \right] + \frac{1}{q K_m(q)} \left[ -\frac{m}{q} K_m(q) - K_{m-1}(q) \right] \\ = -m \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \end{aligned}$$

La cual se reduce a:

$$-\frac{m}{p^2} + \frac{J_{m-1}(p)}{p J_m(p)} - \frac{m}{q^2} - \frac{K_{m-1}(q)}{q K_m(q)} = -\frac{m}{p^2} - \frac{m}{q^2}$$

Y finalmente:

$$\frac{1}{p} \left[ \frac{J_{m-1}(p)}{J_m(p)} \right] = \frac{1}{q} \left[ \frac{K_{m-1}(q)}{K_m(q)} \right] \quad (7-45)$$

Las ecuaciones simplificadas (7-44) y (7-45)\* dan, respectivamente, las soluciones para  $\beta$  de los modos EH y HE, y deben resolverse satisfaciendo también la ec. (7-33):

$$p^2 + q^2 = V^2$$

En la siguiente sección se mostrará cómo emplear las relaciones hasta aquí obtenidas para encontrar la frecuencia de corte de los modos de propagación en la fibra.

\* Vale la pena mencionar que, en los últimos treinta años, varios investigadores han propuesto métodos simplificados para encontrar soluciones compactas y muy aproximadas de la ecuación característica general. La misma obtención de ésta (la ecuación general) también difiere en cuanto a metodología en algunas ocasiones, pero matemáticamente se llega, por supuesto, a los mismos resultados en lo que se refiere a los parámetros de transmisión de la fibra. Por ejemplo, la ec. (7-33) se puede combinar con la ec. (7-30) para escribir:

$$\left[ \frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right] \left[ \frac{\epsilon_1 f_m(p)}{\epsilon_2 p} + \frac{g_m(q)}{q} \right] = \frac{m^2 \beta^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2} \left[ \frac{V^2}{p^2 q^2} \right]^2$$

y como  $V^2 \rightarrow 0$  cuando  $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ , la ecuación se reduce a

$$\left[ \frac{f_m(p)}{p} + \frac{g_m(q)}{q} \right]^2 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{ecuación} \\ \text{característica} \\ \text{simplificada} \end{array}$$

Utilizando varias identidades que satisfacen las funciones Bessel, la ecuación se resuelve cuando se cumplen las igualdades siguientes:

(cont.)...

## 7.5 Constante de fase y frecuencia de corte de los modos en una fibra de índice escalonado

En la sección 7.3 se definió la frecuencia normalizada  $V$  a una cierta frecuencia  $f$  por medio de la ec. (7-34):

$$V = \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) \left[ n_1^2 - n_2^2 \right]^{1/2} \quad (7-34)$$

Asimismo, la ec. (7-8) restringe a la constante  $\beta$  de cada modo de propagación a tomar valores exclusivamente dentro del rango

$$\beta_0 n_2 < \beta < \beta_0 n_1 \quad (7-48)$$

en donde  $\beta_0$  sería la constante de fase en el espacio libre a la misma frecuencia de operación\*.

El valor de la constante de fase  $\beta$  para cada modo, a una frecuencia determinada, se obtiene resolviendo las relaciones simplificadas (7-44) y

\*En realidad, el rango permisible para  $\beta$  también se puede obtener con mucha facilidad, considerando que si cada dieléctrico fuese ilimitado,  $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r} = \lambda_0 / n$ . Así, en el núcleo,  $\lambda_1 = \lambda_0 / n_1$ ; y en el revestimiento,  $\lambda_2 = \lambda_0 / n_2$ . De manera que, como  $\beta = 2\pi / \lambda$ , se tendrían los valores extremos  $\beta_1 = 2\pi n_1 / \lambda_0 = \beta_0 n_1$  y  $\beta_2 = 2\pi n_2 / \lambda_0 = \beta_0 n_2$ .

(cont.)...

$$\pm \left\{ p \frac{J_m(p)}{J_{m\mp 1}(p)} \right\} = q \frac{K_m(q)}{K_{m\mp 1}(q)} \quad (7-46)$$

Es fácil notar, con un cruce algebraico de numeradores y denominadores, que la secuencia de los signos +, -, -, corresponde a la misma ec. (7-45), y la secuencia -, +, +, corresponde a la ec. (7-44).

Otra alternativa matemática para la misma solución de la ecuación simplificada sería:

$$p \frac{J_{m\mp 2}(p)}{J_{m\mp 1}(p)} = \mp \left\{ q \frac{K_{m\mp 2}(q)}{K_{m\mp 1}(q)} \right\} \quad (7-47)$$

En estas dos ecuaciones, el signo superior está asociado con los modos  $HE_{mn}$  y el signo inferior con los  $EH_{mn}$ .

(7-45), junto con la ec. (7-33), para encontrar primero  $p$  y  $q$ . Una vez conocidas  $p$  y  $q$ , a partir de las ecs. (7-24) y (7-25) se tiene:

$$h_1 = p/a$$

$$h_2 = q/a$$

y en el núcleo, cuando  $\rho < a$ , la constante de fase en la dirección  $z$  se deduce, a partir de la ec. (7-4), como:

$$\left(\frac{p}{a}\right)^2 = (j\beta)^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r_1}$$

O bien:

$$\beta^2 = \beta_0^2 \epsilon_{r_1} - \left(\frac{p}{a}\right)^2$$

De donde:

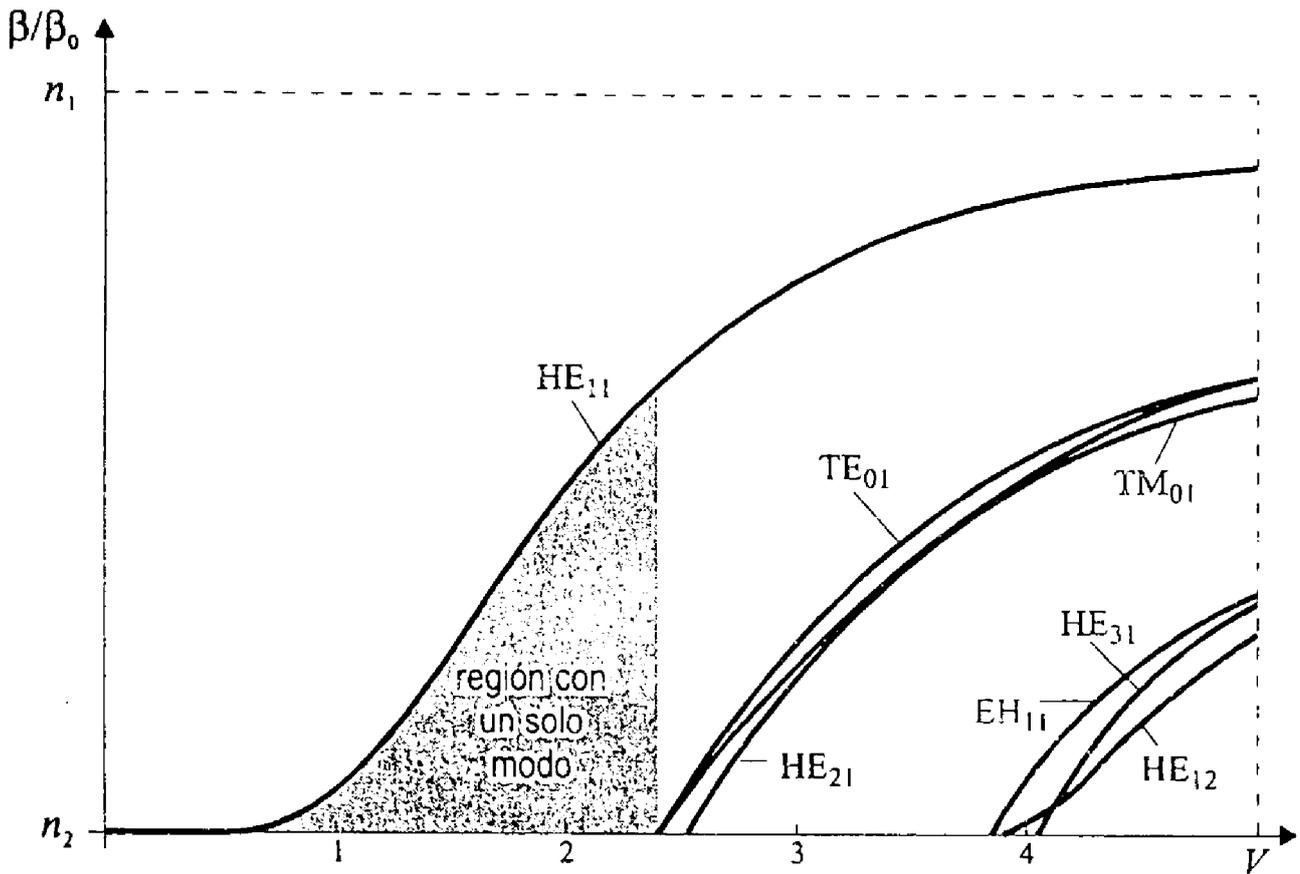
$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 n_1^2 - \left(\frac{p}{a}\right)^2} \quad (7-49)$$

De la ecuación anterior se observa que  $\beta < \beta_0 n_1$  (como lo establece la ec. 7-48), de modo que si se grafica el cociente  $\beta/\beta_0$  en función de la frecuencia normalizada  $V$ , los valores del cociente estarán entre  $n_2$  y  $n_1$ , tal como se muestra en la Fig. 7-10 para los primeros modos de propagación. Los subíndices de cada modo  $mn$  están asociados con la condición de corte, que se verá unos cuantos párrafos más adelante.

Por lo pronto, nótese en la Fig. 7-10 que el modo  $HE_{11}$  no tiene frecuencia de corte, ya que existe desde la frecuencia cero. Los demás modos tienen su valor de corte cuando  $\beta/\beta_0 = n_2^*$ , y los primeros en aparecer después del  $HE_{11}$  son los modos  $TE_{01}$  y  $TM_{01}$ , cuando  $V = 2.405$ . De manera que el modo  $HE_{11}$  es el **modo dominante**, y será el único modo en la fibra (de allí el nombre monomodo) siempre y cuando se cumpla que  $V < 2.405$ :

---

\* Para valores inferiores al corte ( $\beta/\beta_0 < n_2$ ), comienzan a aparecer modos de radiación o "no-guiados". Conforme  $\beta/\beta_0$  aumenta arriba de este límite de corte, de valor  $n_2$ , la potencia que se propaga en el revestimiento va disminuyendo, hasta que toda la potencia viaja por el núcleo de la fibra, situación que ocurre cuando  $\beta/\beta_0 = n_1$  (límite superior del rango de  $\beta/\beta_0$  en la ec. 7-48).



**Fig. 7-10** Constante de fase  $\beta$  normalizada con relación a la constante de fase en el espacio libre, en función de la frecuencia normalizada  $V$ , para los primeros modos de propagación en una fibra óptica de índice escalonado. Las frecuencias de corte son exactas, a diferencia de las frecuencias del método aproximado (véase comentario en el Ejercicio 7-1).

$$\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right) [n_1^2 - n_2^2]^{1/2} < 2.405 \quad (7-50)$$

condición para la fibra monomodo

La desigualdad anterior demuestra que la única forma de que el modo dominante  $HE_{11}$  deje de existir en la fibra (o sea, que “se corte”), es haciendo el radio  $a$  del núcleo igual a cero, lo cual sería evidentemente ilógico. Sin embargo, en la práctica, conforme el radio se va reduciendo más y más, los campos en el revestimiento aumentan, y esto impone un límite práctico en la frecuencia más baja que puede usarse en la fibra monomodo.

Examinemos ahora cuáles son los valores que definen la condición de corte en cada uno de los demás modos de propagación, así como su

nomenclatura a través del subíndice  $mn$ . En la sección 7.3 se indicó que la condición de corte de un modo se define como el punto en el que ese modo ya no queda restringido a propagarse en la región del núcleo y la zona cercana de su revestimiento, y que matemáticamente dicha condición equivale a que  $q \rightarrow 0$  en la ecuación característica (7-30), o bien, en las ecuaciones aproximadas (7-44) y (7-45).

Por consiguiente, tómesese primero la *ec.* (7-44) para los modos EH:

$$\frac{1}{p} \left[ \frac{J_{m+1}(p)}{J_m(p)} \right] = - \frac{1}{q} \left[ \frac{K_{m+1}(q)}{K_m(q)} \right] \quad (7-44)$$

Se puede demostrar que

$$\frac{K_{m+1}(q)}{qK_m(q)} \rightarrow \infty \quad \text{cuando } q \rightarrow 0 \quad (m \geq 0)$$

de manera que, despejando a  $J_m(p)$  en la *ec.* (7-44), se concluye que

$$J_m(p) = 0 \quad (\text{para } p \neq 0 \text{ y cuando } q \rightarrow 0) \quad (7-51)$$

Esta condición equivale a decir que hay que buscar los valores posibles de  $p$  que hacen que las funciones Bessel  $J_m$  de la Fig. 7-8 valgan cero. En el caso de  $m = 0$ , el primer valor de  $p$  es igual a 2.405 (aquí  $n = 1$ ); el segundo valor de  $p$  es 5.520 (y  $n = 2$ ); el tercer valor de  $p$  es 8.654 (y  $n = 3$ ); y así sucesivamente. De manera que, por ejemplo, para obtener la frecuencia de corte del modo  $\text{EH}_{21}$ , se utiliza la gráfica de la función  $J_2$  en la Fig. 7-8, y como  $n = 1$ , se busca el primer valor de  $p$  para el cual  $J_2 = 0$ ; este valor es 5.136. Ahora bien, la *ec.* (7-33), cuando  $q \rightarrow 0$ , se reduce a  $p = V$ ; por lo que, a partir de la misma *ec.* (7-33), se puede escribir la igualdad siguiente para el modo  $\text{EH}_{21}$ :

$$p = 5.136 = (2\pi f_c) \frac{a}{c} \left[ n_1^2 - n_2^2 \right]^{1/2}$$

y finalmente, despejando a la frecuencia de corte, se tiene:

$$f_c \Big|_{EH_{21}} = \frac{5.136 c}{(2\pi a) (NA)}$$

en donde  $NA$  es la apertura numérica definida por la ec. (7-35). Del ejemplo de la ecuación anterior se deduce que, para obtener la frecuencia de corte de los modos EH, se puede escribir la siguiente ecuación general:

$$f_c \Big|_{EH_{mn}} = \frac{p_{mn} c}{(2\pi a) (NA)} \quad (7-52)$$

Los valores de  $p_{mn}$  para las primeras combinaciones de  $m$  y  $n$  son los mismos concentrados anteriormente en la Tabla 4-4, cuando se estudiaron las guías circulares metálicas. Por comodidad, estos valores se repiten a continuación en la Tabla 7-2.

Tomemos ahora el caso de los modos HE, en base a la solución de la ec. (7-45). Por ejemplo, si  $m = 1$ , se tendrá que cumplir la igualdad:

**Tabla 7-2** Raíces  $p_{mn}$  para las cuales  $J_m(p) = 0$  y se cumple la condición de corte para los modos  $EH_{mn}$  ( $p \neq 0$ )\*.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...
$m = 0$	2.405	5.520	8.654	...
$m = 1$	3.832	7.016	10.173	...
$m = 2$	5.136	8.417	11.620	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

\*  $p \neq 0$  no es solución, ya que la ec. (7-44) no es satisfecha cuando  $q \rightarrow 0$ , pues

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{J_{m+1}(p)}{p J_m(p)} = \frac{1}{2} \neq \infty \quad (\text{valor al que tiende el segundo miembro de la ecuación})$$

$$p \frac{J_1(p)}{J_0(p)} = q \frac{K_1(q)}{K_0(q)} \quad \equiv (7-45)$$

Como en la condición de corte  $q \rightarrow 0$ , resulta que  $p = V$  (puesto que  $p^2 + q^2 = V^2$ ). La ecuación anterior se cumple cuando  $p J_1(p) / J_0(p) = 0$ , puesto que su segundo miembro se vuelve idéntico a cero al hacer  $q = 0$ . El primer cruce ( $n = 1$ ) de  $J_1(p = V)$  por cero ocurre cuando  $p = 0$ , de acuerdo con la Fig. 7-8. Para este mismo valor de  $p = 0$ ,  $J_0$  está definida y vale 1, por lo que  $p = 0$  es una solución válida. De manera que para este caso particular ( $m = 1, n = 1$ ), se concluye que el modo  $HE_{11}$  no tiene frecuencia de corte ( $V = p = 0$ ). El siguiente cruce ( $n = 2$ ) por cero sucede cuando  $p = V = 3.832$ , y también se cumple la condición  $p J_1(p) / J_0(p) = 0$ ; y así sucesivamente, conforme la función  $J_1(p)$  oscila y toma, una y otra vez, el valor cero al incrementarse  $p$ . En la Tabla 7-3 se proporcionan los valores de las primeras raíces para los modos  $HE_{1n}$  bajo consideración.

**Tabla 7-3** Raíces  $p_{mn}$  para las cuales  $J_1(p) = 0$  y se cumple la condición de corte para los modos  $HE_{1n}$ .

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	...
$m = 1$	0	3.832	7.016	10.173	...

Cuando  $m = 0$ , las condiciones de corte para los modos  $HE_{0n}$  son idénticas a las de los  $EH_{0n}$ . Recuérdese que  $m = 0$  reduce la ecuación característica general a las *ecs.* (7-31) y (7-32), cuyas soluciones son, respectivamente, los modos  $TE_{0n}$  y  $TM_{0n}$  (véase también la Tabla 7-1). Por lo tanto, las frecuencias de corte normalizadas ( $V_c$ ) para estos modos son idénticas y corresponden a las raíces de  $J_0(V)$ , mismas que son  $V = 2.405, 5.520, etc.$

Para  $m = 2$ , los modos  $HE_{2n}$  tienen una condición de corte que se obtiene más fácilmente a partir de la *ec.* (7-47):

$$p \frac{J_0(p)}{J_1(p)} = q \frac{K_0(q)}{K_1(q)}$$

En el corte, cuando  $q \rightarrow 0$ , debe satisfacerse la relación

$$p \frac{J_0(p)}{J_1(p)} = 0$$

El primer cruce por cero de  $J_0$  ocurre cuando  $p = V = 2.405$ , y como tanto  $p$  como  $J_1(p)$  están definidos y son diferentes de cero, entonces el punto de corte del modo  $HE_{21}$  sí es  $V = 2.405$ . Asimismo, el punto de corte correspondiente para el modo  $HE_{22}$  sería el siguiente cruce por cero de la función  $J_0$ , es decir,  $V = 5.520$ .

Finalmente, para el resto de los modos  $HE_{mn}$ , cuando  $m > 2$ , el procedimiento es similar al de  $m = 2$ , sustituyendo los subíndices correctos en la ec. (7-47). Así, para  $m = 3$  se tendrá que satisfacer  $J_1(p) = 0$ ; para  $m = 4$ ,  $J_2(p) = 0$ ; y, generalizando,  $J_{m-2}(p) = 0$  ( $m \geq 2$ ). Para comodidad del lector, todas las condiciones de corte que se han deducido se muestran concentradas en la Tabla 7-4.

Antes de realizar algunos ejercicios, conviene notar en la Fig. 7-10 que la frecuencia normalizada  $V$  contiene información sobre cuántos modos pueden coexistir simultáneamente en la fibra de índice escalonado, a una frecuencia

**Tabla 7-4** Condiciones para la frecuencia de corte normalizada ( $V_c = p$ ) de los modos de propagación en una fibra de índice escalonado.

$m$	modos	condición	primeras raíces ( $V_c$ )			
			$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	
0	$TE_{0n}$ $TM_{0n}$	$J_0(V_c) = 0$	2.405	5.520	8.654	
1	$HE_{1n}$	$J_1(V_c) = 0$	0	3.832	7.016	
1	$EH_{1n}$	$J_1(V_c) = 0$	3.832	7.016	10.173	
$\geq 2$	$HE_{mn}$	$J_{m-2}(V_c) = 0$	2.405	5.520	8.654	( $m = 2$ )
			3.832	7.016	10.173	( $m = 3$ )
			5.136	8.417	11.620	( $m = 4$ )
$\geq 2$	$EH_{mn}$	$J_m(V_c) = 0$	5.136	8.417	11.620	( $m = 2$ )
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

dada. Por ejemplo, si  $V = 3$ , habrá cuatro modos en la fibra ( $HE_{11}$ ,  $TE_{01}$ ,  $TM_{01}$  y  $HE_{21}$ ). Los patrones del campo eléctrico transversal de estos primeros cuatro modos en el núcleo de la fibra se mostraron ya en la Fig. 1-17, y por conveniencia se repiten aquí como la Fig. 7-11. Cuando el número de modos es muy grande, se puede estimar rápidamente por medio de la relación aproximada\* siguiente:

$$M = \frac{V^2}{2} \quad (7-53)$$

en donde  $M$  es el número de modos de propagación en la fibra.

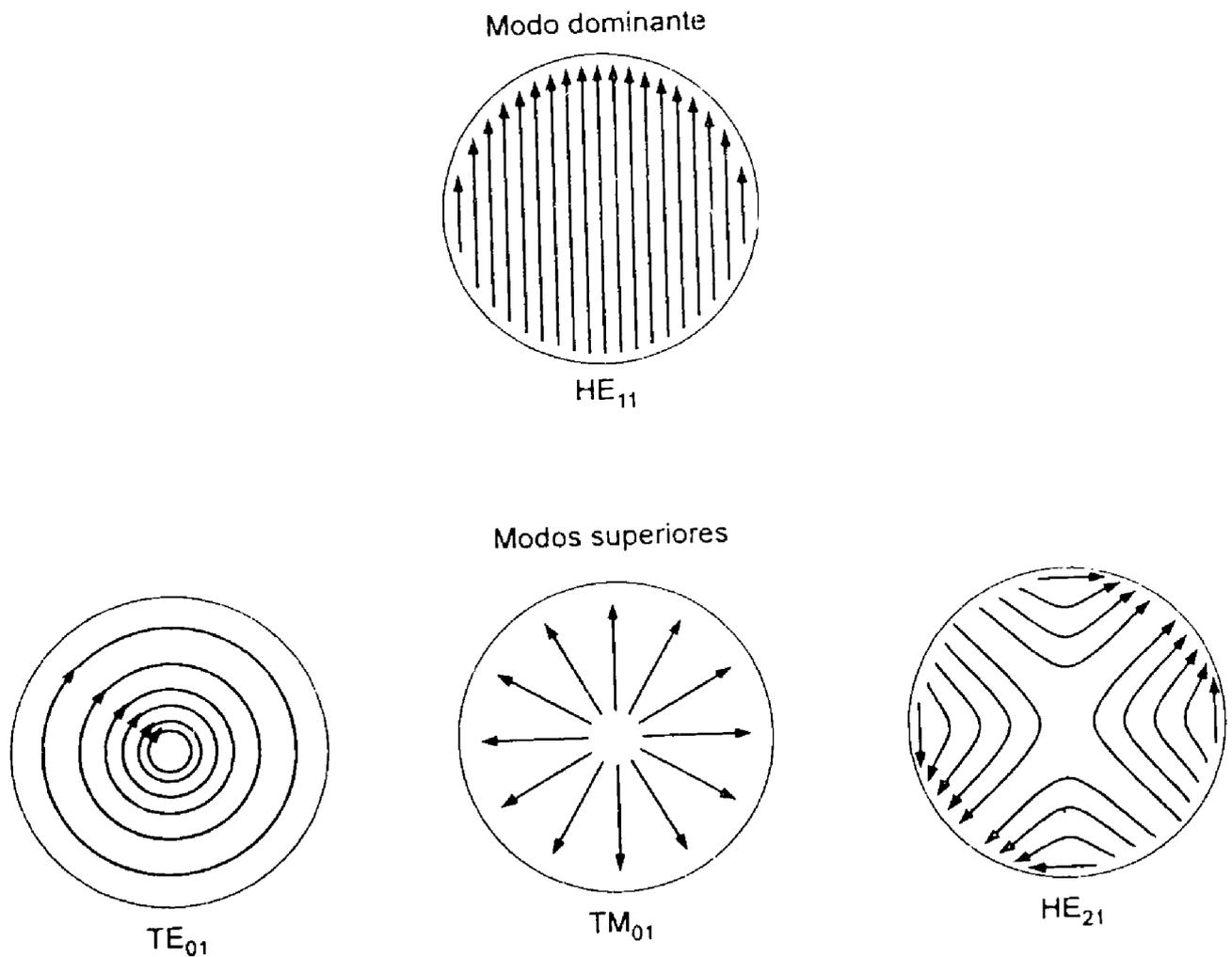


Fig. 7-11 Vista transversal de las líneas de campo eléctrico del modo dominante y de los tres primeros modos superiores siguientes en una fibra óptica de índice escalonado.

\* Su deducción queda fuera de los objetivos de este texto. Se obtiene a partir del número de modos que emanan de la fuente de luz por ángulo sólido, del área transversal del núcleo de la fibra y del ángulo de aceptación de la misma.

**Ejercicio 7-1** Una fibra óptica de índice escalonado tiene índices de refracción de 1.470 y 1.460 en el núcleo y el revestimiento, respectivamente. El radio del núcleo es de  $8 \mu\text{m}$ . Encuentre la apertura numérica de la fibra, la frecuencia de corte normalizada  $V_c$  y la frecuencia de corte real (Hz) para los primeros doce modos que se propagan en ella.

### Solución

Los datos que se proporcionan son:

$$n_1 = 1.470 \quad n_2 = 1.460 \quad a = 8 \mu\text{m}$$

La apertura numérica es una cantidad fija para cualquier modo, pues solamente depende de  $n_1$  y  $n_2$ . Empleando la ec. (7-35) se tiene:

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{1.47^2 - 1.46^2} = 0.1712$$

De acuerdo con la ec. (7-34), la frecuencia de corte normalizada  $V_c$  y la frecuencia de corte real  $f_c$  están relacionadas por la expresión

$$V_c = f_c \left[ \left( \frac{2\pi a}{c} \right) (NA) \right]$$

o sea

$$f_c = \frac{cV_c}{(2\pi a)(NA)}$$

en donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $V_c$  debe encontrarse para cada modo de propagación. Los primeros doce modos corresponden a los valores más bajos de  $V_c$ , a partir de cero en que existe el modo dominante  $\text{HE}_{11}$ . Basándonos en la Tabla 7-4, se obtienen los datos siguientes:

modo	condición	valor de $V_c$
$\text{HE}_{11}$	$J_1(V_c) = 0$	0
$\text{TE}_{01}, \text{TM}_{01}$	$J_0(V_c) = 0$	2.405
$\text{HE}_{21}$	$J_0(V_c) = 0$	2.405

modo	condición	valor de $V_c$
HE <sub>12</sub>	$J_1(V_c) = 0$	3.832
EH <sub>11</sub>	$J_1(V_c) = 0$	3.832
HE <sub>31</sub>	$J_1(V_c) = 0$	3.832
EH <sub>21</sub>	$J_2(V_c) = 0$	5.136
HE <sub>41</sub>	$J_2(V_c) = 0$	5.136
TE <sub>02</sub> , TM <sub>02</sub>	$J_0(V_c) = 0$	5.520
HE <sub>22</sub>	$J_0(V_c) = 0$	5.520

Estos son los primeros doce modos que se propagan en la fibra. Nótese que debido a las simplificaciones hechas a la ecuación general característica, en algunos casos las frecuencias  $V_c$  no coinciden con sus valores exactos, pero de cualquier forma la aproximación es muy buena. Por ejemplo, en la Fig. 7-10 se observa que la frecuencia de corte  $V_c$  del modo HE<sub>21</sub> es muy ligeramente superior a la de los modos TE<sub>01</sub> y TM<sub>01</sub>; de manera que casi son iguales, y el método aproximado aquí empleado (y utilizado también en otros libros de texto especializados y en muchos casos prácticos) es correcto y justificable.

El resto del ejercicio se resuelve fácilmente sustituyendo los valores de  $V_c$  para cada modo en la ecuación de  $f_c$  que se planteó al principio. Por ejemplo, para el modo HE<sub>11</sub>,  $f_c = 0$  porque  $V_c = 0$ , y para los modos TE<sub>01</sub>, TM<sub>01</sub> y HE<sub>21</sub>, la frecuencia buscada es

$$f_c = \frac{(3 \times 10^8)(2.405)}{(2\pi)(8 \times 10^{-6})(0.1712)} = 83.84 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

Para HE<sub>12</sub>, EH<sub>11</sub> y HE<sub>31</sub>, la frecuencia de corte es

$$f_c = (83.84 \times 10^{12}) \left( \frac{3.832}{2.405} \right) = 133.58 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

Para EH<sub>21</sub> y HE<sub>41</sub>:

$$f_c = (133.58 \times 10^{12}) \left( \frac{5.136}{3.832} \right) = 179.04 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

y finalmente, para  $TE_{02}$ ,  $TM_{02}$  y  $HE_{22}$ :

$$f_c = (179.04 \times 10^{12}) \left( \frac{5.520}{5.136} \right) = 192.43 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

Para concluir, los resultados de la frecuencia de corte real  $f_c$  se pueden concentrar en la tabla siguiente:

modo	frecuencia de corte (THz)
$HE_{11}$	0
$TE_{01}$ , $TM_{01}$ , $HE_{21}$	83.84
$HE_{12}$ , $EH_{11}$ , $HE_{31}$	133.58
$EH_{21}$ , $HE_{41}$	179.04
$TE_{02}$ , $TM_{02}$ , $HE_{22}$	192.43

**Ejercicio 7-2** La apertura numérica de una fibra óptica de índice escalonado es igual a 0.175. ¿Cuánto puede medir el diámetro del núcleo para garantizar que a una longitud de onda de trabajo de  $1.6 \mu\text{m}$  solamente se propague el modo dominante  $HE_{11}$ ?

*Solución*

De la ec. (7-34) y la Fig. 7-10 se deduce que la fibra operará como monomodo siempre y cuando

$$V = \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) (NA) < 2.405$$

Despejando el diámetro  $2a$ :

$$2a < \frac{2.405 \lambda_0}{(\pi) (NA)}$$

y sustituyendo valores:

$$2a < \frac{(2.405) (1.6 \times 10^{-6})}{(\pi) (0.175)} = 7 \mu\text{m}$$

Por lo tanto, el rango permisible para el diámetro de la fibra monomodo en cuestión es:

$$0 < 2a < 7 \mu\text{m}$$


---

**Ejercicio 7-3** El índice de refracción del núcleo de una fibra vale 1.6. Se desea que la fibra trabaje con un solo modo transmitiendo luz a una longitud de onda de  $1.35 \mu\text{m}$ . Encuentre una relación matemática entre el rango de diámetros permisibles para el núcleo y el rango del índice de refracción permisible en el revestimiento. También muestre dicha relación gráficamente.

*Solución*

La ec. (7-34) debe cumplir que:

$$V = \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405$$

Es decir:

$$(2a) \sqrt{1.6^2 - n_2^2} < \frac{(2.405) (1.35 \times 10^{-6})}{\pi}$$

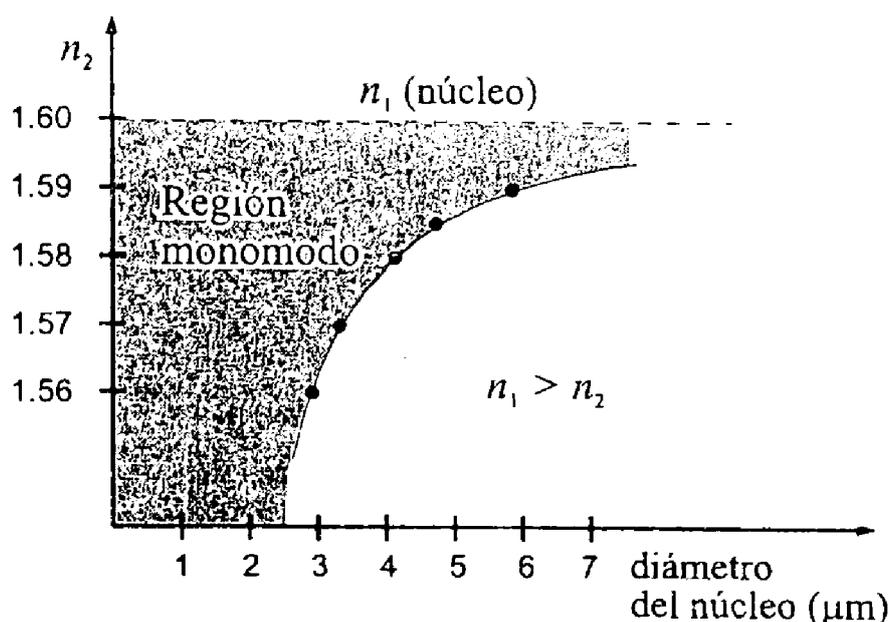
o bien:

$$(2a) < \frac{1.0335}{\sqrt{2.56 - n_2^2}} \mu\text{m}$$

en donde  $n_2$  es el índice de refracción del revestimiento. Tomando valores arbitrarios para  $n_2$ , siempre y cuando sea ligeramente menor que  $n_1$ , se pueden obtener varios puntos que definirán el valor máximo posible del diámetro y la gráfica pedida. Por ejemplo, los siguientes valores definen a cinco puntos de la gráfica:

$n_2$	valor máximo de $2a$
1.56	$1.0335/0.3555 = 2.90 \mu\text{m}$
1.57	$1.0335/0.3084 = 3.35 \mu\text{m}$
1.58	$1.0335/0.2522 = 4.09 \mu\text{m}$
1.585	$1.0335/0.2186 = 4.72 \mu\text{m}$
1.59	$1.0335/0.1786 = 5.78 \mu\text{m}$

y la gráfica correspondiente es, aproximadamente, como se muestra a continuación:



Se observa que conforme la diferencia  $n_1 - n_2$  disminuye, el diámetro puede ser más ancho y la fibra seguirá siendo monomodo.

**Ejercicio 7-4** De acuerdo con los conceptos básicos de teoría electromagnética, el lector debe recordar que la permitividad de los materiales es función de la frecuencia de operación (véase la Tabla 2-2). Por tal razón, es de esperarse que el índice de refracción ( $n = \sqrt{\epsilon_r}$ ) tenga ligeras variaciones al cambiar la longitud de onda de transmisión en una fibra óptica. Por ejemplo, para el silicio se ha encontrado una relación muy aproximada como la siguiente:

$$n^2 - 1 = \frac{0.696166 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.068404)^2} + \frac{0.407943 \lambda^2}{\lambda^2 - (0.116241)^2} + \frac{0.897479 \lambda^2}{\lambda^2 - (9.896161)^2}$$

Calcule el índice de refracción de este material para las tres ventanas de operación (véase la Fig. 1-12), en longitudes de onda de 0.85  $\mu\text{m}$ , 1.3  $\mu\text{m}$  y 1.55  $\mu\text{m}$ .

*Solución*

Simplemente hay que despejar a  $n$  de la ecuación anterior y sustituir los valores de  $\lambda$  especificados (en  $\mu\text{m}$ ). De manera que:

$$n \Big|_{0.85 \mu\text{m}} = \left[ 1 + \frac{0.696166 (0.85)^2}{(0.85)^2 - (0.068404)^2} + \frac{0.407943 (0.85)^2}{(0.85)^2 - (0.116241)^2} + \frac{0.897479 (0.85)^2}{(0.85)^2 - (9.896161)^2} \right]^{1/2} = 1.452498$$

$$n \Big|_{1.30 \mu\text{m}} = \left[ 1 + \frac{0.696166 (1.30)^2}{(1.30)^2 - (0.068404)^2} + \frac{0.407943 (1.30)^2}{(1.30)^2 - (0.116241)^2} + \frac{0.897479 (1.30)^2}{(1.30)^2 - (9.896161)^2} \right]^{1/2} = 1.446917$$

$$n \Big|_{1.55 \mu\text{m}} = \left[ 1 + \frac{0.696166 (1.55)^2}{(1.55)^2 - (0.068404)^2} + \frac{0.407943 (1.55)^2}{(1.55)^2 - (0.116241)^2} + \frac{0.897479 (1.55)^2}{(1.55)^2 - (9.896161)^2} \right]^{1/2} = 1.444023$$

En estudios estrictos de diseño, es importante conocer estas variaciones de  $n$  a diferentes frecuencias, ya que las fuentes ópticas (véase el capítulo 8) que se emplean en los sistemas de comunicaciones no son monocromáticas puras y, por lo tanto, habrá cierto grado de dispersión en la transmisión de las señales.

**Ejercicio 7-5** Una fibra multimodo de índice escalonado tiene índices de refracción de 1.41 y 1.40, respectivamente, en el núcleo y el revestimiento. El radio del núcleo es de  $50 \mu\text{m}$  (véase la Fig. 7-5). Diga cuántos modos se propagan aproximadamente a una longitud de onda de  $1,300 \text{ nm}$ .

*Solución*

A partir de la ec. (7-34) se puede calcular el número  $V$  de la fibra:

$$V = \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) \underbrace{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}_{\text{apertura numérica}}$$

Sustituyendo valores:

$$V = \frac{(2\pi)(50 \times 10^{-6})}{1,300 \times 10^{-9}} \underbrace{\sqrt{(1.41)^2 - (1.4)^2}}_{NA = 0.1676} = 40.5$$

y de acuerdo con la ec. (7-53):

$$M = \frac{V^2}{2} = \frac{(40.5)^2}{2} = 820 \text{ modos}$$

**Ejercicio 7-6** Deduzca las expresiones matemáticas para las tres componentes  $E_z$ ,  $E_\phi$  y  $E_\rho$  del campo eléctrico en el núcleo de una fibra óptica para los modos  $HE_{1n}$ .

*Solución*

Las tres componentes pedidas en el núcleo están dadas por las ecs. (7-12), (7-14) y (7-18):

$$E_z = \left[ \frac{B}{J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \sin m\phi e^{-\gamma z} \quad (7-12)$$

$$E_\phi = \left( \frac{j\omega\mu}{h_1^2} \right) \left[ \frac{A h_1}{J_m(h_1 a)} \right] J'_m(h_1 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} - \left( \frac{j\beta}{h_1^2 \rho} \right) \left[ \frac{B m}{J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (7-14)$$

$$E_\rho = \left( -\frac{j}{h_1^2} \right) \left[ \left( \frac{\omega\mu}{\rho} \right) \left( \frac{-A m}{J_m(h_1 a)} \right) J_m(h_1 \rho) \sin m\phi + (\beta) \left( \frac{B h_1}{J_m(h_1 a)} \right) J'_m(h_1 \rho) \sin m\phi \right] e^{-\gamma z} \quad (7-18)$$

Ahora bien, la relación (7-41) establece que:

$$J'_m(h_1 \rho) = -\frac{m}{h_1 \rho} J_m(h_1 \rho) + J_{m-1}(h_1 \rho) \quad (7-41)$$

De modo que las ecs. (7-14) y (7-18) pueden reescribirse de la manera siguiente:

$$E_{\phi} = \left\{ \left[ \frac{j\omega\mu A}{h_1 J_m(h_1 a)} \right] \left[ -\frac{m}{h_1 \rho} J_m(h_1 \rho) + J_{m-1}(h_1 \rho) \right] - \left[ \frac{j\beta B m}{h_1^2 \rho J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \right\} \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (7-14)$$

$$E_{\rho} = \left\{ - \left[ \frac{j\beta B}{h_1 J_m(h_1 a)} \right] \left[ -\frac{m}{h_1 \rho} J_m(h_1 \rho) + J_{m-1}(h_1 \rho) \right] + \left[ \frac{j\omega\mu A m}{h_1^2 \rho J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \right\} \sin m\phi e^{-\gamma z} \quad (7-18)$$

Ahora es necesario contar con una relación entre  $A$  y  $B$  que permita simplificar estas últimas dos ecuaciones. Para los modos HE, esta relación es  $B = -A (\epsilon_1 / \mu_0)^{-1/2}$  \*; y para los modos EH, es  $B = A (\epsilon_1 / \mu_0)^{-1/2}$ . Al sustituir la relación con el signo negativo en la ec. (7-14), se tiene:

$$E_{\phi} = \left\{ \left[ \frac{-j\omega\mu A m}{h_1^2 \rho J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) + \left[ \frac{j\omega\mu A}{h_1 J_m(h_1 a)} \right] J_{m-1}(h_1 \rho) + \left[ \frac{j\beta A m}{\sqrt{\epsilon_1 / \mu_0} h_1^2 \rho J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \right\} \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (7-14)$$

y como  $\mu = \mu_0$  y  $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$ , el primero y el tercer término del segundo miembro se cancelan, quedando finalmente para  $E_{\phi}$ :

---

\* O bien,  $B = -A (\mu_0 / \epsilon_1)^{1/2} = -\eta_1 A$ .

$$E_{\phi} = \left[ \frac{j\omega\mu A}{h_1 J_m(h_1 a)} \right] J_{m-1}(h_1 \rho) \cos m\phi e^{-\gamma z} \quad (7-14)$$

La expresión para  $E_z$  queda igual que la ec. (7-12). La de  $E_{\rho}$  se obtiene sustituyendo  $B = -A(\epsilon_1/\mu_0)^{-1/2}$  y la ec. (7-41) en la ec. (7-18):

$$E_{\rho} = \left( \frac{-j}{h_1^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{-\omega\mu A m}{\rho J_m(h_1 a)} \right] J_m(h_1 \rho) \\ - \left[ \frac{\beta A h_1 \sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\epsilon_1} J_m(h_1 a)} \right] \left[ -\frac{m}{h_1 \rho} J_m(h_1 \rho) + J_{m-1}(h_1 \rho) \right] \end{array} \right\} \text{sen } m\phi e^{-\gamma z}$$

y cancelando términos y simplificando:

$$E_{\rho} = \left( \frac{-j}{h_1^2} \right) \left[ \frac{-\omega\mu A h_1}{J_m(h_1 a)} \right] J_{m-1}(h_1 \rho) \text{sen } m\phi e^{-\gamma z}$$

$$E_{\rho} = \left[ \frac{j\omega\mu A}{h_1 J_m(h_1 a)} \right] J_{m-1}(h_1 \rho) \text{sen } m\phi e^{-\gamma z} \quad \equiv (7-18)$$

Se observa que las funciones que representan a  $E_{\phi}$  y a  $E_{\rho}$  son similares, sólo que  $E_{\phi}$  varía con relación al  $\cos m\phi$ , mientras que  $E_{\rho}$  lo hace con relación al  $\text{sen } m\phi$ .

Nótese que las expresiones obtenidas son válidas para todos los modos  $HE_{mn}$ , en el núcleo de la fibra ( $0 < \rho < a$ ). Si  $m = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} E_z = \left[ \frac{-A}{J_1(h_1 a)} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_1}} \right] J_1(h_1 \rho) \text{sen } \phi e^{-\gamma z} \\ E_{\phi} = \left[ \frac{j\omega\mu A}{h_1 J_1(h_1 a)} \right] J_0(h_1 \rho) \cos \phi e^{-\gamma z} \\ \vdots \end{array} \right\} \text{modos } HE_{1n}$$

$$E_{\rho} = \left[ \frac{j\omega\mu A}{h_1 J_1(h_1 a)} \right] J_0(h_1 \rho) \operatorname{sen} \phi e^{-\gamma z} \left. \vphantom{\frac{j\omega\mu A}{h_1 J_1(h_1 a)}} \right\} \text{modos HE}_{1n}$$

con  $h_1 = p/a$ .

## 7.6 Conceptos adicionales sobre el modo dominante

Es importante estudiar algunos conceptos más sobre la propagación del modo dominante en una fibra de salto de índice. Para ello, comenzaremos por reescribir las expresiones encontradas en el ejercicio anterior, con  $h_1 = p/a$ , para las componentes transversales  $E_{\phi}$  y  $E_{\rho}$  de los modos  $\text{HE}_{1n}$ , sin la variación exponencial en la dirección axial ( $z$ ):

$$E_{\phi} = \left[ \frac{j\omega\mu a A}{p J_1(p)} \right] J_0\left(p \frac{\rho}{a}\right) \cos \phi \quad (7-54)$$

$$E_{\rho} = \left[ \frac{j\omega\mu a A}{p J_1(p)} \right] J_0\left(p \frac{\rho}{a}\right) \operatorname{sen} \phi \quad (7-55)$$

Si el campo transversal se expresa ahora en coordenadas cartesianas, se verá que su interpretación se simplifica:

$$\mathbf{E}_t = E_{\rho} \mathbf{a}_{\rho} + E_{\phi} \mathbf{a}_{\phi}$$

$$E_{\rho} = E_x \cos \phi + E_y \operatorname{sen} \phi$$

$$E_{\phi} = -E_x \operatorname{sen} \phi + E_y \cos \phi$$

de donde:

$$E_{\rho} \operatorname{sen} \phi = E_x \cos \phi \operatorname{sen} \phi + E_y \operatorname{sen}^2 \phi$$

$$\text{y } E_{\phi} \cos \phi = -E_x \cos \phi \operatorname{sen} \phi + E_y \cos^2 \phi$$

por lo que, sumando ambas expresiones:

$$E_y = E_{\rho} \operatorname{sen} \phi + E_{\phi} \cos \phi$$

y sustituyendo las *ecs.* (7-54) y (7-55):

$$E_y = \left\{ \left[ \frac{j\omega\mu a A}{p J_1(p)} \right] J_0\left(p \frac{\rho}{a}\right) \right\} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$$

De manera que la componente  $E_y$  del campo eléctrico es:

$$E_y = \left[ \frac{j\omega\mu a A}{p J_1(p)} \right] J_0\left(p \frac{\rho}{a}\right) \quad (7-56)$$

Por otra parte, la componente  $E_x$  se obtiene de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} E_\rho \cos \phi &= E_x \cos^2 \phi + E_y \sin \phi \cos \phi \\ -E_\phi \sin \phi &= E_x \sin^2 \phi - E_y \sin \phi \cos \phi \end{aligned}$$

de donde, nuevamente sumando ambas expresiones y sustituyendo las *ecs.* (7-54) y (7-55):

$$E_x = E_\rho \cos \phi - E_\phi \sin \phi = 0$$

Se concluye que el campo eléctrico transversal está totalmente orientado en la dirección  $y$ , para toda  $\rho$  y para toda  $\phi$ . La magnitud de este campo es proporcional a  $[J_0(p \rho/a)] / p J_1(p)$ , de acuerdo con la *ec.* (7-56). Esto justifica, por ejemplo, la distribución indicada en la Fig. 7-11 para el modo dominante  $HE_{11}$ . Pero para conocer la proporcionalidad de la magnitud en función de  $\rho$ , es necesario conocer  $p$  a una frecuencia determinada. Veamos cómo se puede resolver esto.

De la teoría vista anteriormente, la *ec.* (7-33) establece la relación que debe cumplirse entre la frecuencia normalizada  $V$  y las variables  $p$  y  $q$ :

$$p^2 + q^2 = V^2 \quad \equiv (7-33)$$

Asimismo, para el modo dominante  $HE_{11}$ , debe cumplirse la *ec.* (7-45), simultáneamente con la *ec.* (7-33) anterior:

$$\frac{1}{p} \left[ \frac{J_{m-1}(p)}{J_m(p)} \right] = \frac{1}{q} \left[ \frac{K_{m-1}(q)}{K_m(q)} \right] \quad \equiv (7-45)$$

Haciendo  $m = 1$  en la ec. (7-45) y recordando que  $n = 1$  equivale a pasar por la primera raíz en las funciones de Bessel correspondientes, se hallan  $p$  y  $q$  en función de  $V$ . El procedimiento matemático es complicado y se omitirá en este texto. La relación aproximada para  $p$  en función de  $V$  a la que se llega finalmente, para el modo dominante  $HE_{11}$ , es:

$$p = \frac{2.414213 V}{1 + \sqrt[4]{4 + V^4}} \quad (7-57)$$

La gráfica correspondiente de la función anterior se muestra en la Fig. 7-12. La ecuación de  $p$  en función de  $V$  para los modos superiores al dominante es aún más compleja que la ec. (7-57) y se omitirá aquí. Las curvas resultantes quedarían arriba y desplazadas hacia la derecha con relación a la curva de la Fig. 7-12.

Conocido el valor de  $p$ , éste se sustituye en la función  $[J_0(p \rho/a)] / p J_1(p)$ , que indica la proporcionalidad de la magnitud del campo eléctrico trans-

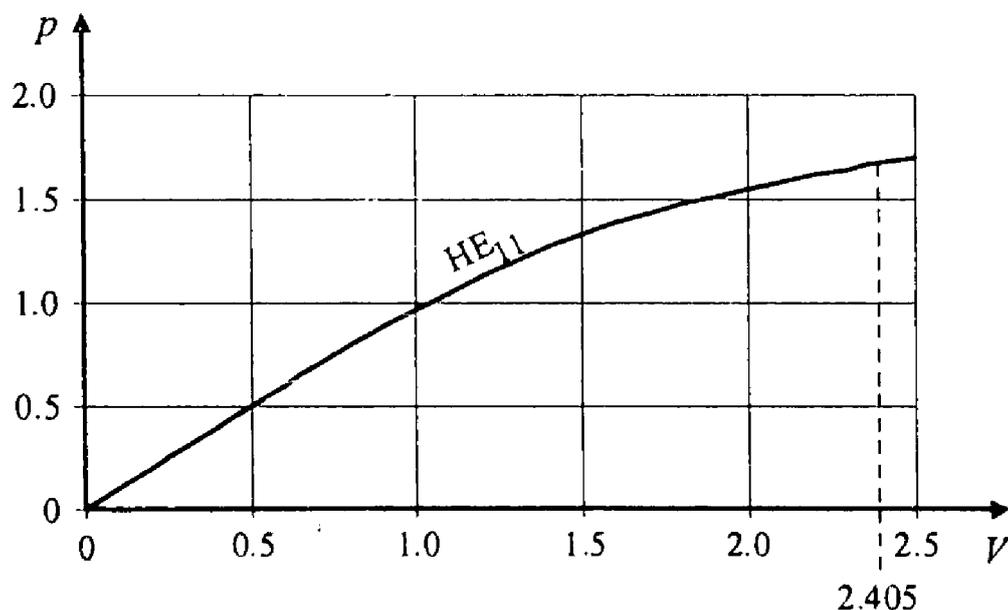


Fig. 7-12 Gráfica del parámetro  $p$  en función de la frecuencia normalizada  $V$  (modo dominante).

versal a diferentes valores de la distancia radial  $\rho$  (ec. 7-56). Por ejemplo, tómnese los valores  $V = 1, 1.3, 1.5$  y  $2$ ; el valor respectivo de  $p$  para cada uno es  $0.967, 1.199, 1.324$  y  $1.55$ . Por lo tanto, la magnitud de  $E_y$  se puede calcular para varios puntos conforme  $\rho$  aumenta, normalizando la distancia radial con relación al radio  $a$  y formando la tabla siguiente:

$V$	$p$	$\rho/a$	$[J_0(p\rho/a)]/pJ_1(p)$
1.0	0.967	0.0	2.4076
		0.5	2.2688
		1.0	1.8763
1.3	1.199	0.0	1.6752
		0.5	1.5281
		1.0	1.1254
1.5	1.324	0.0	1.4327
		0.5	1.2800
		1.0	0.8703
2.0	1.550	0.0	1.1429
		0.5	0.9776
		1.0	0.5528

De los datos anteriores se pueden obtener las gráficas mostradas en la Fig. 7-13, normalizadas con respecto a sus valores máximos. En ellas se observa que cerca del centro del núcleo de la fibra se tiene intensidad máxima para cualquier  $V$ , pero que, conforme  $V$  disminuye y el punto de observación se acerca a la frontera del núcleo ( $\rho/a = 1$ ), el porcentaje del campo que tiende a extenderse dentro del revestimiento ( $\rho/a > 1$ ) es mayor. Recuérdese que  $V$  también está dada por la ec. (7-34):

$$V = \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) (\text{apertura numérica}) \quad = (7-34)$$

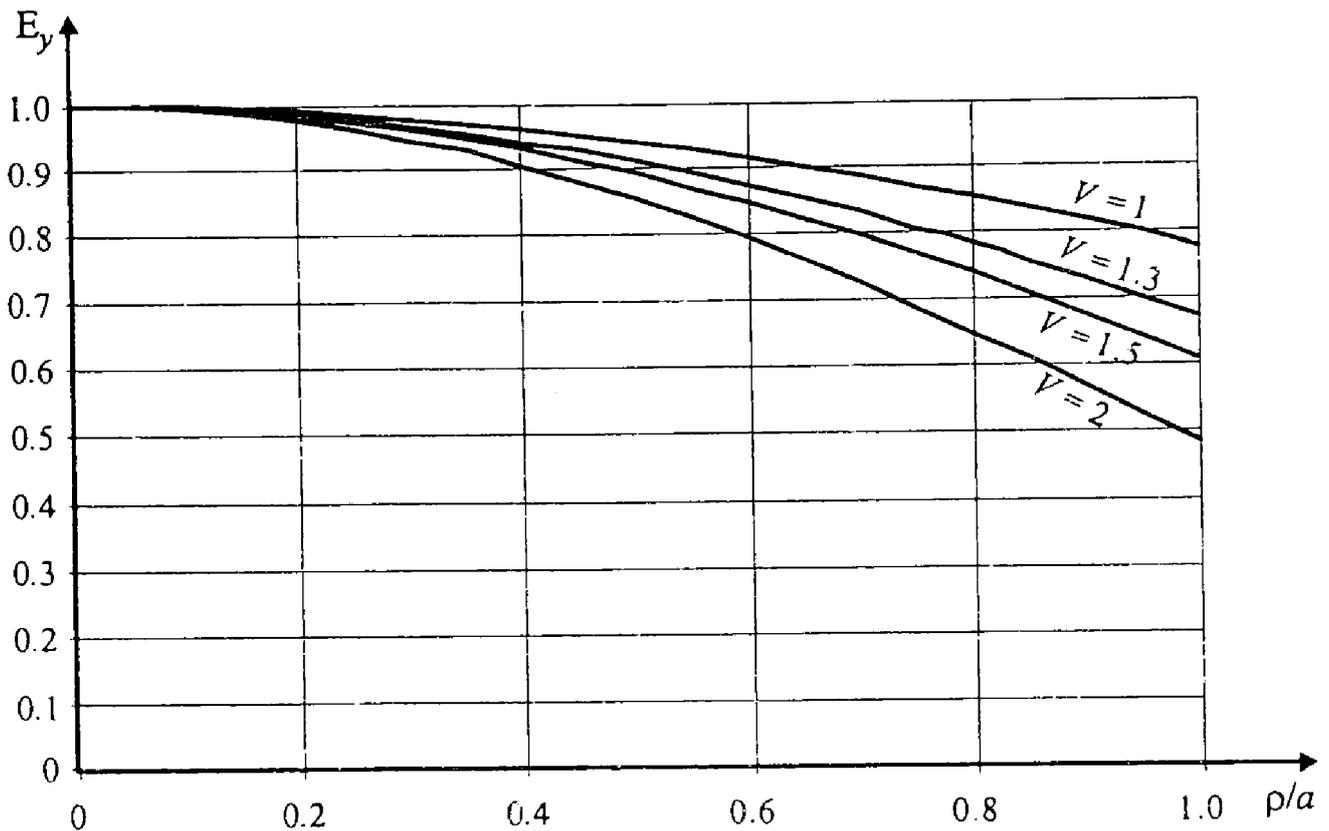


Fig. 7-13 Variación del campo transversal  $E_y$ , proporcional a  $[J_0(p\rho/a)]/pJ_1(p)$ , en función de la distancia radial, para cuatro valores diferentes de la frecuencia normalizada  $V$ . Las intensidades del campo para cada valor de  $V$  están normalizadas con relación a su valor máximo respectivo, calculado para  $\rho/a = 0$  en la tabla anterior.

En base a todo lo anterior, el lector podrá darse cuenta de lo laborioso que resulta obtener las características de propagación para cada modo en particular. Sin embargo, en cada caso, el procedimiento es similar al que se ha mostrado aquí para el modo dominante.

Antes de pasar a un nuevo tema, resta presentar la definición de la *constante de propagación normalizada*, designada como  $b$ . De hecho, ya fue presentada, aunque no formalmente, en la Fig. 7-10. Esta constante  $b$  se define como:

$$b = \frac{q^2}{V^2} \quad (7-58)$$

en donde  $q$  está dada por las ecs. (7-25) y (7-5), y  $V^2$  por el cuadrado de la ec. (7-34):

$$q^2 = h_2^2 a^2 = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_2) a^2 = -(-\beta^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_2) a^2 \quad (7-59)$$

[pues la atenuación  $\alpha$  se considera igual a cero]

$$V^2 = \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right)^2 [n_1^2 - n_2^2] \quad (7-34)$$

Sustituyendo las ecs. (7-59) y (7-34) en la ec. (7-58):

$$b = \frac{(\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2) a^2}{\beta_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2)} = \left[ \frac{1}{(n_1^2 - n_2^2)} \right] \left[ \left( \frac{\beta}{\beta_0} \right)^2 - \frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} \right]$$

y finalmente:

$$b = \frac{(\beta/\beta_0)^2 - n_2^2}{(n_1^2 - n_2^2)} \quad (7-60)$$

La gráfica de la constante de propagación  $\beta$  (estrictamente, la constante de fase), normalizada con relación a  $\beta_0$ , en función de  $V$ , se mostró en la Fig. 7-10. Si se observa la ec. (7-60), es claro que de la misma figura se podría obtener la gráfica de  $b$ , pues  $n_1$  y  $n_2$  son constantes. Igualmente, si se tuviese primero la gráfica de  $b$ , usando la ec. (7-60) sería sencillo encontrar la gráfica de  $\beta/\beta_0$  de la Fig. 7-10. Veamos entonces el procedimiento para justificar dicha figura.

De la ec. (7-60) se puede despejar a  $\beta^2$  de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (n_1^2 - n_2^2)} = \frac{\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2}{\omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)} \\ \beta^2 &= \omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) b + \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \left[ b - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} b + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right] \\ &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \left[ \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) b}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + 1 - 1 \right] \\ &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \left[ 1 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1} b \right] \end{aligned}$$

y finalmente:

$$\beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1} \right) (1 - b) \right] \quad (7-61)$$

Esta ecuación revela que para que haya propagación de un cierto modo, la constante  $b$  debe quedar dentro del rango

$$0 < b < 1$$

Esto se debe a que el valor máximo que puede tomar  $\beta^2$ , de acuerdo con la relación (7-7), está limitado por el valor  $\omega^2 \mu_0 \epsilon_1$ ; y en el límite, cuando  $b \rightarrow 1$ , la ec. (7-61) tiende precisamente a ese valor máximo.

Ahora bien, ¿cómo encontrar la gráfica de  $b$  en función de  $V$ ? De la definición de  $b$ , dada por la ec. (7-58), es evidente que se requiere conocer  $q$ . Pero esto no es problema, si ya se conoce  $p$ . Por ejemplo, para el caso dominante, se obtuvo la gráfica de la Fig. 7-12 usando la ec. (7-57). Y como  $V^2 = q^2 + p^2$ , la ecuación correspondiente para  $q$  sería:

$$q = \left[ V^2 - \left( \frac{2.414213 V}{1 + \sqrt[4]{4 + V^4}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7-62)$$

La gráfica de esta ecuación se muestra en la Fig. 7-14.

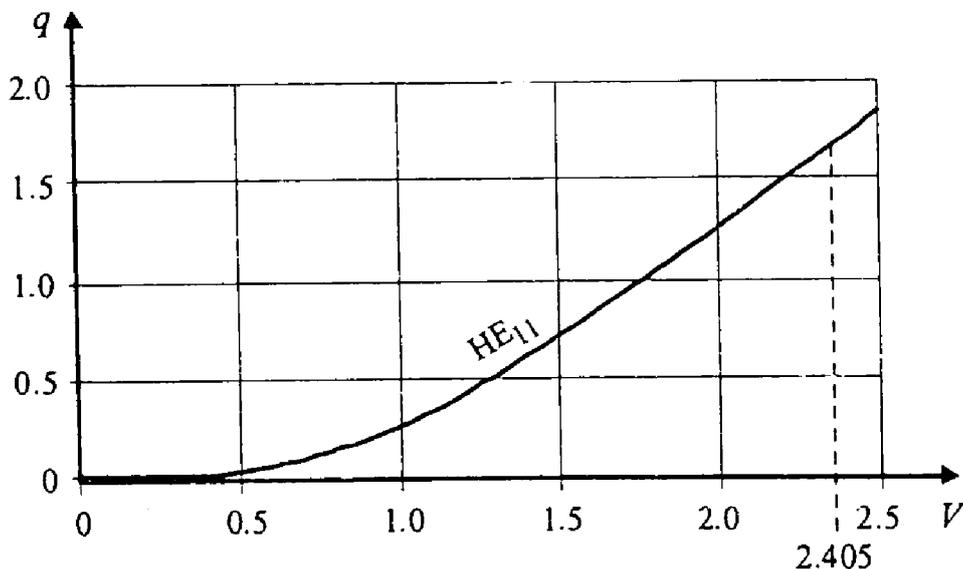
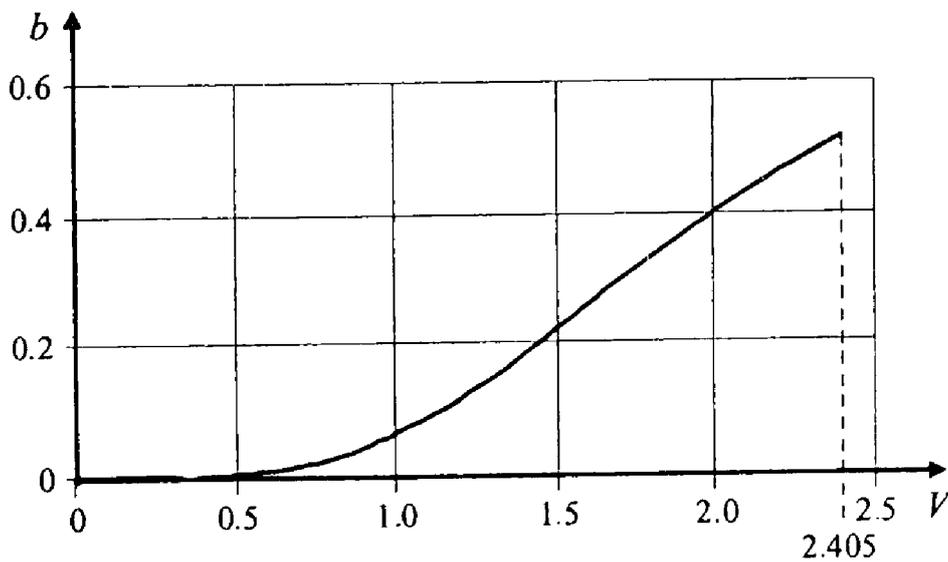


Fig. 7-14 Gráfica del parámetro  $q$  en función de la frecuencia normalizada  $V$  (modo dominante).

A partir de la gráfica de  $q$  se puede obtener la gráfica de  $b$ , o bien usando directamente la siguiente ecuación:

$$b = \left[ V^2 - \left( \frac{2.414213 V}{1 + \sqrt[4]{4 + V^4}} \right)^2 \right] \left[ \frac{1}{V^2} \right] \quad (7-63)$$

La gráfica de la ec. (7-63) se muestra en la Fig. (7-15).



**Fig. 7-15** Gráfica de la constante de propagación normalizada  $b$ , para el modo dominante.

Por último, conocida la función  $b$ , ésta se puede sustituir en la ec. (7-60) y despejar  $\beta/\beta_0$ :

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left[ (n_1^2 - n_2^2) b + n_2^2 \right]^{1/2} \quad (7-64)$$

Por observación de la ec. (7-64), se deduce que cuando  $b \rightarrow 0$ ,  $\beta/\beta_0 \rightarrow n_2$ ; y cuando  $b \rightarrow 1$ ,  $\beta/\beta_0 \rightarrow n_1$ . De allí que los límites para la ordenada en la Fig. 7-10 sean, precisamente  $n_1$  y  $n_2$ . En la Fig. 7-16 se muestra la gráfica de la ec. (7-64) con  $n_1 = 1.47$  y  $n_2 = 1.46$ . Por comparación con la Fig. 7-10, es evidente que las dos curvas para el modo dominante  $HE_{11}$  son similares.

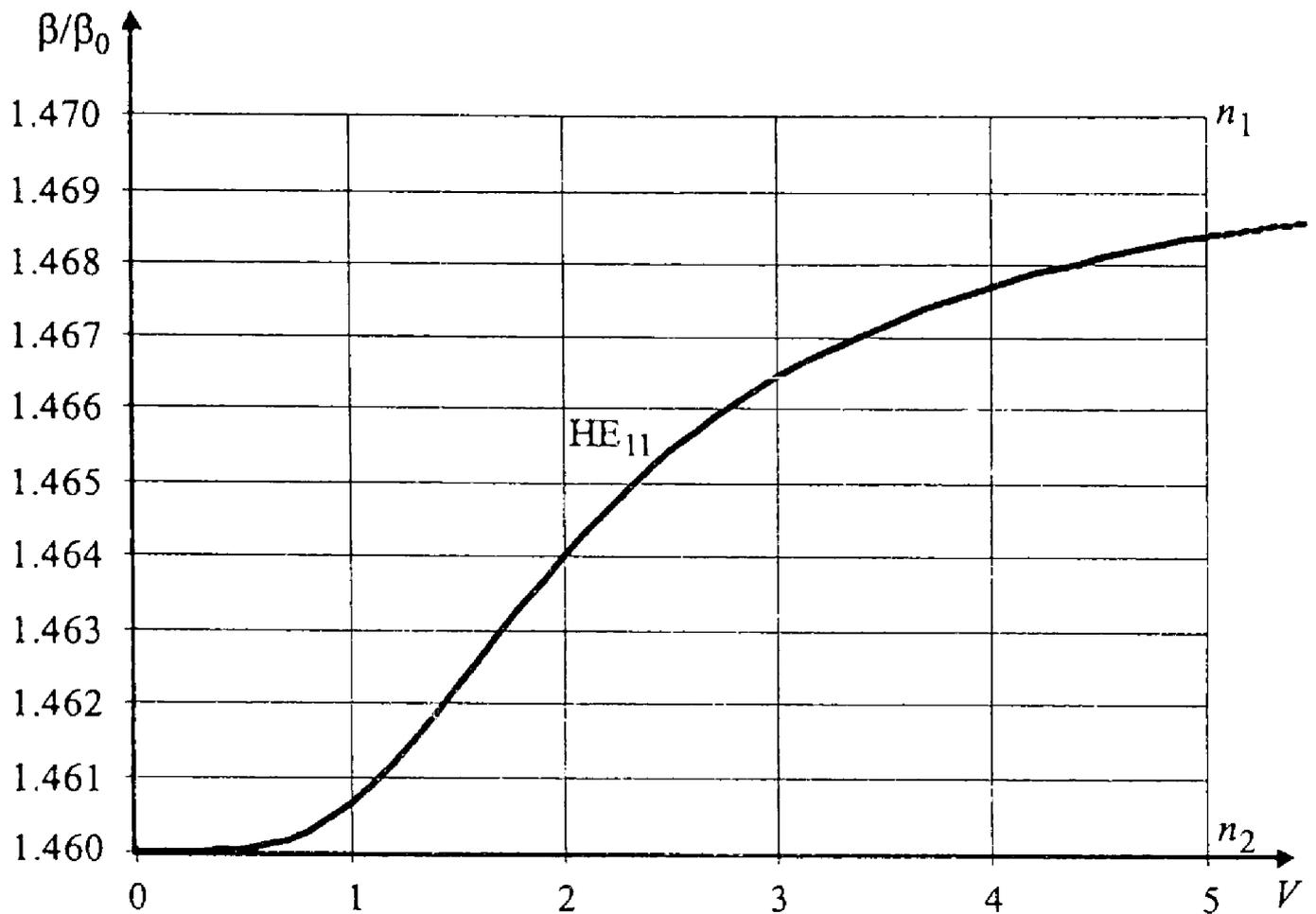


Fig. 7-16 Constante de fase normalizada  $\beta/\beta_0$ , en función de la frecuencia normalizada  $V$ , para el modo dominante en una fibra de salto de índice, con  $n_1 = 1.47$  y  $n_2 = 1.46$  (compárese con la Fig. 7-10).

**Ejercicio 7-7** Una fibra de índice escalonado tiene índices de refracción de 1.460 y 1.457 en el núcleo y el revestimiento, respectivamente. El radio del núcleo es de  $5 \mu\text{m}$ . Encuentre la constante de fase  $\beta$  del modo dominante a una frecuencia de trabajo igual al 90% del valor de la frecuencia de corte del primer modo superior.

### Solución

Primero hay que encontrar la frecuencia de corte del primer modo superior. De la ec. (7-34):

$$f_c = \frac{c V_c}{(2\pi a)(NA)}$$

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{1.46^2 - 1.457^2} = 0.09355$$

El primer modo superior aparece cuando  $V_c = 2.405$ . De allí que:

$$f_c \left| \begin{array}{l} \text{primer} \\ \text{modo} \\ \text{superior} \end{array} \right. = \frac{(3 \times 10^8)(2.405)}{(2\pi)(5 \times 10^{-6})(0.09355)} = 245.5 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

El 90% de la frecuencia de corte calculada para el primer modo superior es igual a 221 THz. A esta frecuencia se debe calcular la constante de fase pedida. La longitud de onda en el espacio libre correspondiente es:

$$\lambda_0 = \frac{300 \times 10^6}{221 \times 10^{12}} = 1,357 \text{ nm}$$

A la frecuencia de 221 THz, la frecuencia normalizada  $V$  es igual, a partir de la misma ec. (7-34), a:

$$V = \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) (NA) = \frac{(2\pi)(5 \times 10^{-6})(0.09355)}{1.357 \times 10^{-6}} = 2.16$$

(evidentemente, igual a  $0.90 \times V_c$ )

Conocida  $V$  a la longitud de onda de 1,357 nm, se obtiene la constante de fase normalizada  $b$ , con la ec. (7-63):

$$\begin{aligned} b &= 1 - \left[ \frac{2.414213}{1 + \sqrt[4]{4 + V^4}} \right]^2 = 1 - \left[ \frac{2.414213}{1 + (25.7678)^{1/4}} \right]^2 \\ &= 1 - 0.5508 = 0.4492 \end{aligned}$$

Con  $b = 0.4492$  sustituida en la ec. (7-64), se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\beta_0} &= \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)b + n_2^2} \\ &= \sqrt{(0.09355)^2(0.4492) + (1.457)^2} = 1.4583 < n_1\end{aligned}$$

(véase la Fig. 7-10)

Por su parte,  $\beta_0$  es igual a:

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{1.357 \times 10^{-6}} = 4.63 \times 10^6 \text{ rad/m}$$

y finalmente:

$$\beta = 1.4583\beta_0 = 6.752 \times 10^6 \text{ rad/m}$$

## 7.7 Modos linealmente polarizados

En la sección 1.5 se mencionó que los modos *linealmente polarizados* (LP) en una fibra óptica no son más que combinaciones de los otros tipos de modos de propagación (TE, TM, HE y EH). Esta nueva clasificación teórica, que data de hace unos veinte años, se basa en la existencia de modos degenerados y tiene la especial característica de que permite visualizar cada conjunto de modos con facilidad. Para comprender el criterio de esta ingeniosa clasificación y la correspondencia que hay entre cada modo LP y los modos tradicionales TM, TE, EH y HE, conviene partir de la Fig. 7-10. En ella se observa que las parejas de modos  $HE_{m+1,n}$  y  $EH_{m-1,n}$  tienen constantes de propagación muy similares (compruébese, por ejemplo, con  $m = 2$  y  $n = 1$ ); y lo mismo ocurre también para los tríos de modos  $TE_{0n}$ ,  $TM_{0n}$  y  $HE_{2,n}$  (verifíquese en la figura, con  $n = 1$ ). Más aún, recuérdese que al simplificar la ecuación característica o de dispersión en la sección 7.4, lo cual es válido en la práctica para fibras de salto de índice pequeño ( $n_1 - n_2 \ll 1$ ), las soluciones cuasi-analíticas obtenidas conducen a frecuencias de corte normalizadas idénticas para los conjuntos de modos  $\{HE_{11}\}$ ,  $\{TE_{01}, TM_{01}, HE_{21}\}$ ,  $\{HE_{31}, EH_{11}\}$ ,  $\{HE_{12}\}$ , ... (refiérase a las ecs. (7-44) y (7-45) y a la Tabla 7-4).

En términos generales, como los modos  $HE_{m+1,n}$  y  $EH_{m-1,n}$  tienen características de propagación cuasi-idénticas, se consideran como modos *degenerados*. Por lo tanto, en lugar de tomarlos en cuenta separadamente, se puede usar una combinación lineal de ellos y considerar al resultado como un nuevo modo. Así por ejemplo, si se emplea la combinación  $HE_{m+1,n} + EH_{m-1,n}$ , se puede demostrar que el resultado de tal superposición es un campo eléctrico total polarizado en la dirección  $x$ ; ésta es la razón por la que al nuevo modo se le llama *linealmente polarizado*. Por otra parte, si se efectúa la combinación  $EH_{m-1,n} - HE_{m+1,n}$ , se llega a un campo eléctrico total polarizado en la dirección  $y$ .

Se concluye, entonces, que es posible combinar ciertos modos y obtener configuraciones de campo con patrones linealmente polarizados (o, al menos, muy cercanos a dicha situación en la práctica). A estas combinaciones se les denomina modos  $LP_{mn}^*$ . En la Tabla 7-5 se indica la correspondencia entre los primeros modos linealmente polarizados y los modos exactos tradicionales que los forman. Nótese que no hay una relación aparente entre los subíndices de los modos LP y los subíndices de los modos que los forman; sin embargo, en general, las siguientes relaciones se cumplen:

Modo	Modos de los que proviene
$LP_{0n}$	$HE_{1n}$
$LP_{1n}$	$TE_{0n}$ , $TM_{0n}$ y $HE_{2n}$
$LP_{mn} (m \geq 2)$	$HE_{m+1,n}$ y $EH_{m-1,n}$

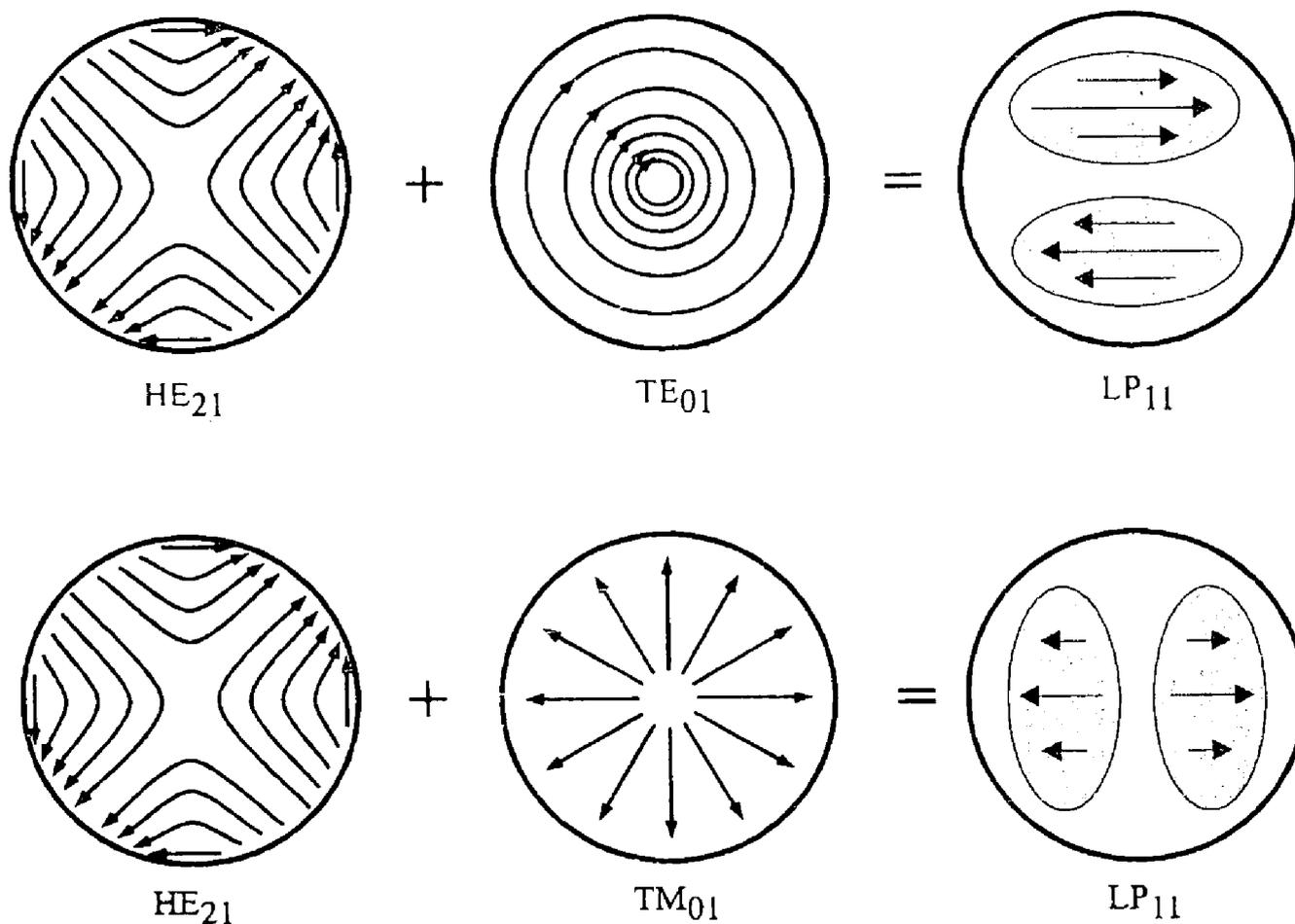
Por último, a manera de ilustración, en la Fig. 7-17 se muestra cómo se obtienen dos de los cuatro posibles modos  $LP_{11}$ , haciendo las sumas  $HE_{21} + TE_{01}$  y  $HE_{21} + TM_{01}$ . En ambos casos resultan campos eléctricos totales polarizados en la dirección  $x$ . Los otros dos modos  $LP_{11}$  restantes son similares a los de la figura, pero polarizados en la dirección  $y$ ; es decir, su obtención equivale a rotar la fibra sobre su eje por un ángulo de  $90^\circ$ .

\* Al lector interesado en profundizar sobre la deducción y la clasificación de estos modos se le sugiere consultar el trabajo publicado por su creador, D. Gloge: "Weakly guiding fibers", Appl. Opt., Vol. 10, págs. 2252-2258, Oct. 1971.

**Tabla 7-5** Correspondencia entre los primeros modos LP y los modos tradicionales que los forman por superposición lineal.

		$V_c^*$	
$V$ crece 	$LP_{01}$	$HE_{11}$	0
	$LP_{11}$	$HE_{21}, TE_{01}, TM_{01}$	2.405
	$LP_{21}$	$HE_{31}, EH_{11}$	3.832
	$LP_{02}$	$HE_{12}$	3.832
	$LP_{31}$	$HE_{41}, EH_{21}$	5.136
	$LP_{12}$	$HE_{22}, TE_{02}, TM_{02}$	5.520

\* Véase el Ejercicio 7-1.



**Fig. 7-17** Obtención de dos modos  $LP_{11}$ . El campo eléctrico resultante está polarizado en la dirección  $x$ .

## 7.8 La fibra monomodo

En base a los conceptos hasta ahora estudiados, es claro que una fibra monomodo es aquella en la que la potencia de la señal se propaga en un solo modo, que es el modo dominante  $HE_{11}$ . Para lograr esto, es necesario que  $n_1 \approx n_2$ , que el diámetro del núcleo sea muy angosto, y que la frecuencia normalizada  $V$  sea menor que 2.405 (véanse las figuras 7-5a y 7-11, la ecuación 7-50 y los ejercicios 7-2 y 7-3). Como una buena parte de la luz se propaga fuera del núcleo\* (Fig. 7-13), el revestimiento debe ser relativamente grueso y de bajas pérdidas. El núcleo, por el contrario, debe tener un diámetro sumamente angosto, del orden de  $10 \mu\text{m}^{**}$ . Esto hace que la fabricación de la fibra sea más difícil y más cara que en el caso de otros tipos de fibra. Asimismo, los empalmes o uniones entre dos secciones de fibra imponen problemas de conexión para garantizar un alineamiento correcto y la entrega de la mayor parte de la potencia de una sección a otra. Pero a pesar de estos inconvenientes, al fin y al cabo controlables, la fibra monomodo es la favorita en muchas aplicaciones; en especial, porque es la que puede conducir las tasas de transmisión de datos más elevadas.

En la sección 7.10 se verá el fenómeno de dispersión intermodal (Fig. 7-22), que no ocurre en una fibra monomodo porque sólo hay un modo de propagación en ella. Sin embargo, existe otro tipo de dispersión en esta fibra, que es la responsable del ensanchamiento de los pulsos transmitidos. Este fenómeno, conocido como *dispersión intramodal*, o dispersión por velocidad de grupo, o simplemente dispersión de la fibra, se debe a que las fuentes ópticas (véase el capítulo 8) no son estrictamente monocromáticas y los pulsos están hechos por la superposición de componentes con frecuencias diferentes. Cada componente espectral viaja a una velocidad ligeramente distinta con relación a las demás componentes de dicha distribución cromática, y esto causa el ensanchamiento de los pulsos recuperados en el extremo receptor. Por obvias razones, este efecto\*\*\* ocurre igualmente en todos los demás tipos de fibra (véase la sección 7.10).

---

\* Por ejemplo, cuando  $V$  es del orden de 1.4 o menos, más de la mitad de la potencia se propaga en el revestimiento.

\*\* La sección transversal (núcleo + revestimiento) de la fibra monomodo queda, al final de cuentas, con un diámetro similar al de una fibra multimodo porque, aun cuando el núcleo sea pequeño, el revestimiento debe ser muy grueso.

\*\*\* También se le llama dispersión cromática o dispersión del material.

Recuérdese que el índice de refracción del material cambia ligeramente en función de la frecuencia (Ejercicio 7-4), lo cual influye en la velocidad de propagación de cada componente. Por esta razón, es muy importante conocer la ley que rige la variación de la constante de fase  $\beta$  con la frecuencia, y de allí el porqué de elaborar las gráficas de la Fig. 7-10. Tal vez el lector habrá intuido ya que, a partir de las curvas de la Fig. 7-10, se puede trazar el diagrama de dispersión  $\omega$ - $\beta$  para cada modo de propagación, similar a lo visto para las guías de ondas en el capítulo 4, pues finalmente ambas representaciones contienen la misma información.

Siguiendo la notación alterna vista en la sección anterior para los modos linealmente polarizados, la fibra monomodo trabaja exclusivamente con el modo  $LP_{01}$ . En realidad, hay que notar que este modo  $LP_{01}$  consiste de dos modos degenerados independientes con polarización ortogonal entre sí, y el hablar de propagación monomodo implica la transmisión de una de estas polarizaciones en particular. Así, por ejemplo, se puede tener polarización vertical ( $E_y$ ) y polarización horizontal ( $E_x$ ), y cualquiera de estas dos polarizaciones constituye al modo fundamental  $HE_{11}$ . Si las técnicas de fabricación fuesen perfectas, y la fibra también, cada modo se propagaría sin que cambiase su polarización en absoluto. Sin embargo, en la realidad, las fibras tienen imperfecciones en la distribución del índice de refracción y ligerísimas variaciones geométricas a lo largo, que destruyen su simetría circular y hacen que cada uno de los dos modos se propague con una velocidad diferente al otro (ya no son degenerados). A la diferencia que hay entre los índices de refracción efectivos en cada polarización se le llama *birrefringencia\** ( $B = n_x - n_y$ ). Con esto concluiremos nuestros comentarios teóricos sobre la fibra monomodo, ya que el profundizar más en ella le corresponde a un curso especializado en fibras ópticas y queda fuera de los objetivos de nuestro texto sobre líneas de transmisión en general.

---

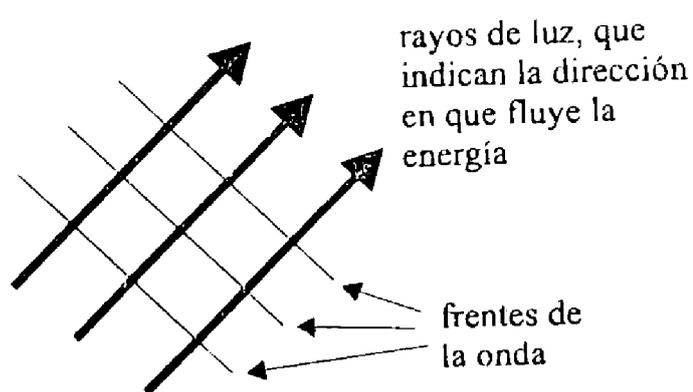
\* *Refringir* es equivalente a refractar.

## 7.9 Teoría de la óptica radial o geométrica

Tal como se mencionó en la sección 7.1, el análisis de las fibras multimodo se facilita utilizando el método de la óptica radial o geométrica. El objetivo de esta sección es precisamente estudiar dicha técnica.

Las longitudes de onda que se emplean para transmitir luz en fibras ópticas están en el rango de 0.8 a 1.6 micras (véase la Fig. 7-2). Por otra parte, el diámetro del núcleo de una fibra puede medir entre 10 y 200 micras, aproximadamente. O sea que, en términos de longitudes de onda, el núcleo es visto por una onda de luz como si fuese una estructura muy grande. Esto permite estudiar el comportamiento de las ondas de luz en el interior de una fibra óptica como si se tratase de rayos que se reflejan y se refractan en la frontera núcleo-revestimiento. Dicho de otra manera, los frentes de la onda\* electromagnética óptica son "vistos" como líneas rectas por la apertura o el objeto en el que inciden, debido a que éste es muchas veces más grande en términos de longitudes de onda; y bajo estas circunstancias, la onda de luz puede ser representada por una onda plana (Fig. 7-18).

Cuando un rayo de luz viaja por un medio con índice de refracción  $n_1$  (por ejemplo, en el núcleo de la fibra), su velocidad  $v_1$  es inferior a la que tendría en el vacío ( $c$ ). Ambas velocidades están relacionadas por la ecuación:



**Fig. 7-18** Los frentes de una onda plana son líneas rectas paralelas entre sí y perpendiculares a los rayos empleados para indicar la dirección de propagación.

\* Se considera el "frente de una onda" como el lugar geométrico de todos los puntos que tienen la misma fase. En el caso de una onda plana, el frente de onda es una línea recta perpendicular a la dirección de propagación. Refiérase también a la Fig. 4-1.

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}} = \frac{c}{v_1} \quad (7-65)$$

O sea que el índice de refracción puede ser interpretado como cuántas veces más grande es la velocidad de la luz en el vacío que en el material 1. Por ejemplo, el aire, el vidrio y el diamante tienen, respectivamente, índices  $n$  igual a 1.00, 1.50 y 2.42.

Si el rayo de luz que viaja por ese medio con índice de refracción  $n_1$  se encuentra de pronto con un medio diferente (por ejemplo, con el revestimiento de la fibra) de índice  $n_2$ , se producen los fenómenos de reflexión y refracción (Fig. 7-19). Es decir, una parte del rayo es reflejada y regresada al medio de origen ( $n_1$ ), y el resto es desviado (o refractado) al penetrar en el segundo material ( $n_2$ ) y viajar por él. Por lo tanto, la velocidad de los rayos incidente y reflejado es igual a  $c/n_1$ , mientras que la del rayo refractado es ligeramente mayor e igual a  $c/n_2$ . El rayo reflejado forma con la frontera un ángulo igual al del rayo incidente con la misma frontera; y ambos rayos, junto con la línea normal (punteada en la Fig. 7-19) a la superficie de la frontera, quedan en el mismo plano, que a su vez es perpendicular a dicha superficie. Este tipo de reflexión se denomina reflexión interna, pues el rayo incidente se refleja en un material menos denso ( $n_2$ ) para regresar al más denso ( $n_1 > n_2$ ).

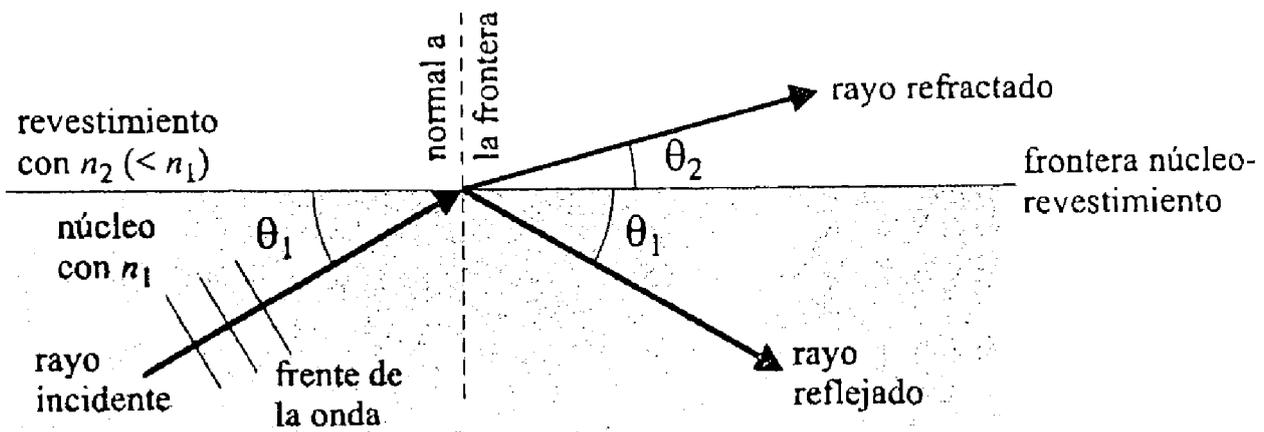
El ángulo que forma el rayo refractado con la frontera se puede deducir a partir de la ley de Snell, que de acuerdo con los ángulos definidos en la misma Fig. 7-19, establece que

$$n_1 \cos \theta_1 = n_2 \cos \theta_2 \quad (7-66)$$

De la ecuación anterior se puede despejar el ángulo de refracción,  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \text{ang cos} \left[ \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_1 \right] \quad (7-67)$$

Como  $n_1/n_2 > 1$ , conforme  $\theta_1$  disminuye, el ángulo de refracción  $\theta_2$  se aproxima a cero grados. Cuando esta última condición es alcanzada, ya no hay refracción y se dice que el rayo tiene reflexión interna total. Al ángulo



**Fig. 7-19** Reflexión y refracción de un rayo de luz en la frontera de dos materiales dieléctricos.

$\theta_1$  que elimina la posibilidad de refracción se le da el nombre de ángulo crítico de incidencia y se denota como  $\theta_c$ . Para todo ángulo de incidencia  $\theta_1$  menor que el ángulo crítico  $\theta_c$ , la reflexión interna es total.\*

De acuerdo con lo anterior, el ángulo crítico se alcanza cuando  $\theta_2$  en la Fig. 7-19 vale cero. Es decir, a partir de la ec. (7-66):

$$\theta_c = \theta_1 \Big|_{\theta_2=0} = \text{ang cos} \left[ \frac{n_2}{n_1} \right] \quad (7-68)$$

Ahora bien, al ser el ángulo de incidencia  $\theta_1$  menor que  $\theta_c$ , el ángulo del rayo reflejado totalmente también será  $\theta_1 < \theta_c$ . Este rayo se convertirá en el rayo incidente en la frontera opuesta, y como  $\theta_1$  seguirá siendo menor que  $\theta_c$ , nuevamente habrá reflexión interna total, y así en forma sucesiva. De modo que el rayo viajará a lo largo de la fibra rebotando una y otra vez dentro de una banda, que es precisamente el corte transversal del núcleo de la fibra (Fig. 7-20). Cada vez que el rayo haga contacto con la frontera, al

\* Con el fin de evitar confusiones innecesarias, nótese que algunos textos definen los ángulos de incidencia y de refracción con referencia a la normal a la superficie de la frontera. Si se les representa, respectivamente, como  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , simplemente se cumple que  $\phi_1 = 90^\circ - \theta_1$ , y  $\phi_2 = 90^\circ - \theta_2$ . En este caso, la ley de Snell toma la forma  $n_1 \text{ sen } \phi_1 = n_2 \text{ sen } \phi_2$ , y la reflexión interna es total cuando  $\phi_1$  es mayor que el ángulo crítico. Lo importante es entender el concepto y estar consciente de la definición adoptada para los ángulos.

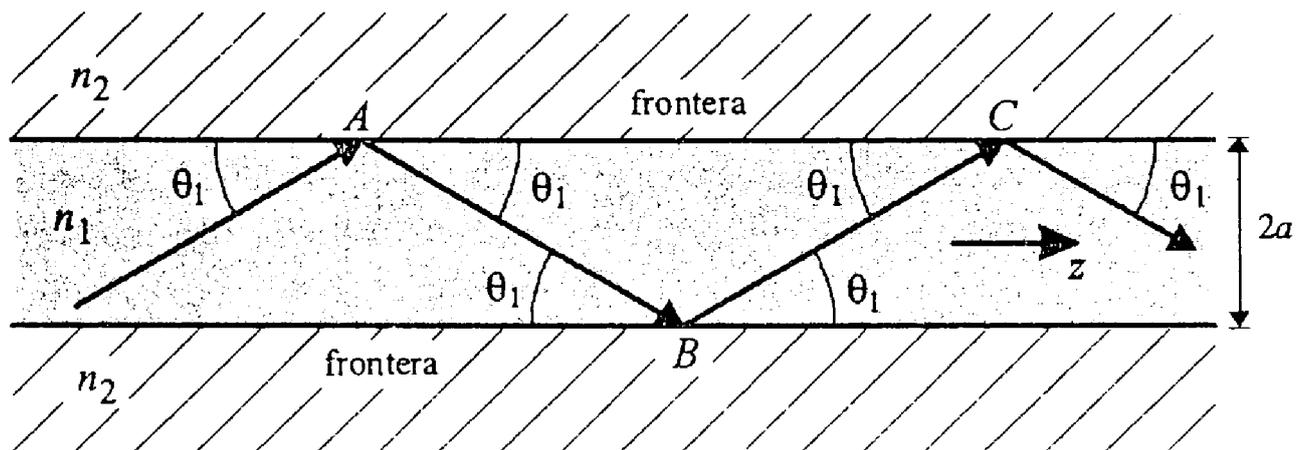


Fig. 7-20 Ilustración de la reflexión interna total de un rayo de luz dentro de una fibra óptica, cuando  $\theta_1$  es menor que el ángulo crítico de incidencia  $\theta_c$ .

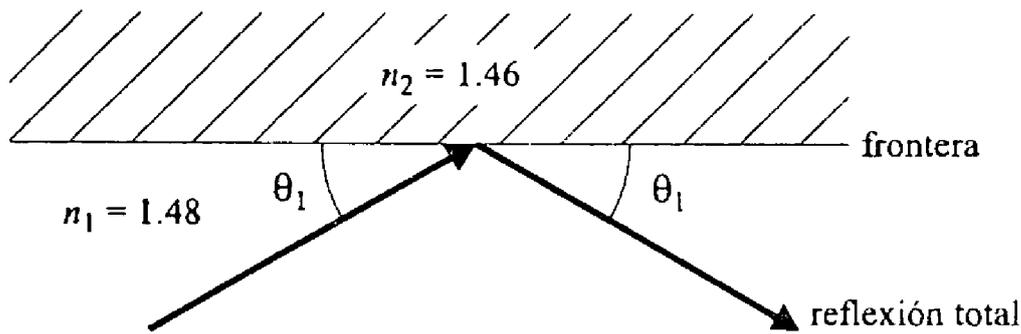
reflejarse sufrirá un cambio de fase. En todo curso básico de teoría electromagnética se estudia este efecto, subdividiendo a la onda incidente en sus componentes normal y paralela al plano de incidencia. Si se denota, respectivamente, al desfase de las componentes normal y paralela como  $\delta_n$  y  $\delta_p$ , se puede demostrar que

$$\delta_n = 2 \operatorname{ang} \tan \left[ \frac{\sqrt{n^2 \cos^2 \theta_1 - 1}}{n \operatorname{sen} \theta_1} \right] \quad (7-69)$$

$$\delta_p = 2 \operatorname{ang} \tan \left[ \frac{n \sqrt{n^2 \cos^2 \theta_1 - 1}}{\operatorname{sen} \theta_1} \right] \quad (7-70)$$

en donde  $n = n_1/n_2$ .

**Ejercicio 7-8** Un rayo de luz viaja dentro de un material con índice de refracción igual a 1.48 y que colinda con otro material cuyo índice es igual a 1.46. Encuentre el rango de valores que puede tener el ángulo de incidencia para garantizar que la reflexión interna sea total.

*Solución*

Primero se calcula el ángulo crítico de incidencia, a partir de la *ec.* (7-68):

$$\theta_c = \text{ang cos } \frac{1.46}{1.48} = 9.43^\circ$$

Por lo tanto, si  $\theta_1 < 9.43^\circ$ , la reflexión interna es total y no hay rayo refractado.

**Ejercicio 7-9** Con los mismos datos del ejercicio anterior para  $n_1$  y  $n_2$ , obtenga una gráfica, en función del ángulo de incidencia  $\theta_1$ , del desfaseamiento que sufrirían las componentes normal y paralela de la onda de luz al hacer contacto con la frontera y reflejarse nuevamente hacia el medio  $n_1$ .

*Solución*

En realidad, simplemente se pide graficar las funciones dadas por las *ecs.* (7-69) y (7-70), considerando que  $\theta_1$  puede tomar valores desde  $0^\circ$  hasta  $9.43^\circ$ , que es el ángulo crítico. De manera que las funciones a graficar son:

$$\delta_n = 2 \text{ ang tan } \left[ \frac{\sqrt{n^2 \cos^2 \theta_1 - 1}}{n \text{ sen } \theta_1} \right]$$

$$y \quad \delta_p = 2 \text{ ang tan } \left[ \frac{n \sqrt{n^2 \cos^2 \theta_1 - 1}}{\text{sen } \theta_1} \right]$$

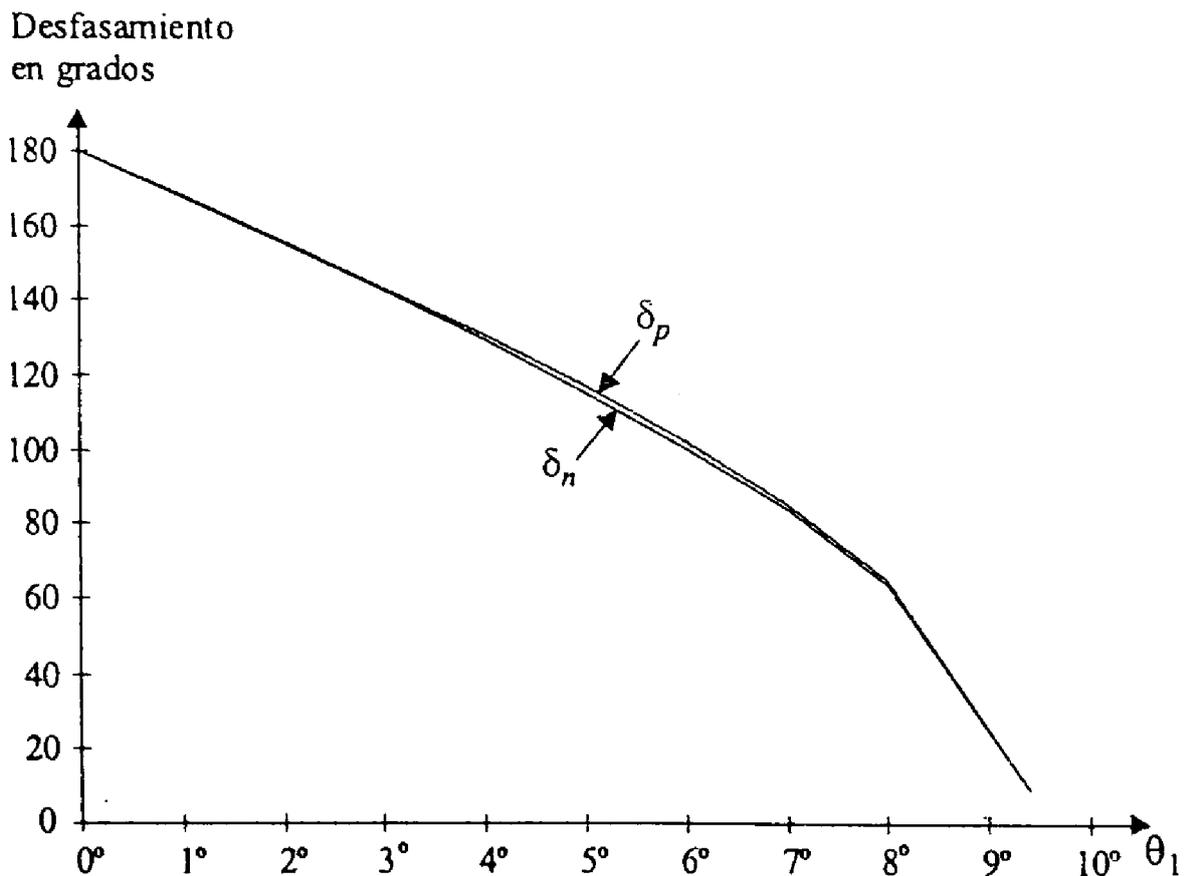
con  $n = n_1/n_2 = 1.48/1.46 = 1.0137$ .

En las tablas siguientes se dan los datos para algunos puntos de ambas gráficas.

$\theta_1$	$\delta_n$	$\delta_p$
0°	180.00°	180.00°
1°	167.77°	168.10°
2°	155.40°	156.04°
3°	142.74°	143.68°
4°	129.60°	130.79°

$\theta_1$	$\delta_n$	$\delta_p$
5°	115.73°	117.12°
6°	100.72°	102.25°
7°	83.88°	85.44°
8°	63.70°	65.11°
9.4°	9.10°	9.35°

Por lo tanto, las gráficas aproximadas pedidas son las siguientes:



## 7.10 Propagación en fibras multimodo de índice escalonado

Los sencillos principios ópticos de la sección anterior se emplearán ahora para ilustrar cómo se propaga la potencia de una onda de luz en el interior y a lo largo de una fibra multimodo. Aunque este método de la óptica geométrica no es tan estricto como el análisis modal visto en las secciones anteriores, proporciona una imagen más directa sobre las características de propagación de la luz en la fibra.

En la sección 7.2 ya fueron descritos los tres tipos principales de fibras ópticas: monomodo de índice escalonado, multimodo de índice escalonado y multimodo de índice gradual (Fig. 7-5). Por lo general, las fibras de índice escalonado tienen un núcleo con índice de refracción  $n_1$  aproximadamente igual a 1.48; dicho núcleo está rodeado por un revestimiento con índice  $n_2$ , de tal forma que:

$$n_2 = n_1 - \Delta n_1 = n_1 (1 - \Delta)$$

A  $\Delta$  se le da el nombre de *diferencia entre índices*, y los valores utilizados en la práctica para  $n_2$  hacen que  $\Delta$  adopte valores de 0.01 a 0.03 (equivalente a decir 1% a 3%) en las fibras multimodo. En el caso de las fibras monomodo,  $\Delta$  es menor, generalmente entre 0.002 y 0.01 (o sea, de 0.2% a 1%).

En base a lo que ya se ha estudiado en las primeras secciones de este capítulo, es claro que el concepto de un *modo de propagación* es diferente al de un *rayo de luz*; sin embargo, existe una relación cualitativa e interesante entre ambos. Se puede demostrar que un *modo* equis que viaja a lo largo de la fibra puede ser descompuesto en un conjunto de ondas planas, que al ser superpuestas forman el patrón del modo. Como cada onda plana puede ser asociada con un rayo de luz perpendicular al frente de la onda (Fig. 7-18), tal familia de ondas planas que conforman al modo equis se puede analizar como un conjunto de rayos. A este conjunto también se le denomina *congruencia* de rayos. Todos los rayos del conjunto viajan por la fibra formando el mismo ángulo con relación al eje  $z$  (Fig. 7-20).

Ahora bien, de lo visto en la sección 7.5, se recordará que el número de modos en una fibra es discreto. Si se le denota como  $M$  (ec. 7-53), entonces el número posible de ángulos con relación al eje  $z$  (un solo ángulo por conjunto o congruencia) que corresponden a los  $M$  modos también es discreto e igual a  $M$ . En otras palabras, no cualquier ángulo de incidencia menor que

el ángulo crítico garantiza que se propague un cierto modo. Para que dicho modo exista y viaje largas distancias a lo largo de la fibra, rebotando en las fronteras núcleo-revestimiento (Fig. 7-20), es necesario que cada onda asociada con su rayo respectivo interfiera **constructivamente** con ella misma. Es decir, que el desfase total de la onda que resulte por recorrer la distancia  $\overline{ABC}$  más los desfases en los puntos fronterizos  $A$  y  $B$  debe ser un múltiplo entero de  $2\pi$  radianes. De esta forma, por ejemplo, la fase de la onda incidente en el punto  $C$  de la Fig. 7-20 es igual a la fase de la onda reflejada doblemente en  $A$  y  $B$  al llegar al mismo punto  $C$ ; por lo tanto, la onda se refuerza e “interfiere”\* constructivamente consigo misma. Si esta condición del desfase total de un múltiplo entero de  $2\pi$  no se cumple, entonces la onda reflejada interferirá destructivamente con la onda incidente, y la suma de las dos se irá atenuando y no habrá propagación.

En resumen, cada modo de propagación se puede representar como un rayo de luz que rebota sucesivamente dentro de la fibra óptica de índice escalonado. La combinación de las ondas incidentes con las ondas reflejadas forma un patrón de onda estacionaria en el plano transversal al eje de la fibra (eje  $z$ ). Este patrón de líneas de campo eléctrico y magnético es diferente para cada modo y se repite a lo largo de la fibra en cada intervalo igual a una longitud de onda, satisfaciendo las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera dieléctrico-dieléctrico. Para que el modo en cuestión realmente se propague, es necesario que su rayo asociado forme un ángulo específico  $\theta_1$  con la frontera, de tal manera que el desfase total en una trayectoria completa entre las fronteras superior e inferior, según lo explicado anteriormente, sea igual a un múltiplo entero de  $2\pi$  radianes. A una cierta frecuencia (o longitud de onda) de transmisión, la distancia total  $\overline{ABC}$  se puede variar ajustando el ángulo de incidencia  $\theta_1$ , para que la suma total de los desfases (por la trayectoria  $\overline{ABC}$  y por la reflexión en las fronteras  $A$  y  $B$ ) dé  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ , y entonces se tenga una “dirección permitida” de propagación.

Como se vió en la sección 7.5, cada modo de propagación tiene su propia constante de fase  $\beta$ . Por lo tanto, para un modo determinado, el desfase por trayectoria (desde  $A$  hasta  $C$ ), representada por  $\delta_p$ , sería igual a:

---

\* No debe confundirse con otros tipos de interferencia electromagnética, en donde se suman las radiaciones de fuentes diferentes.

$$\delta_i = (\beta)(\overline{ABC}) = (\beta)(2)\left(\frac{2a}{\text{sen } \theta_1}\right) = \frac{4a\beta}{\text{sen } \theta_1} \quad (7-71)$$

en donde  $a$  es el radio del núcleo. El desfaseamiento por reflexión en un punto fronterizo está dado por la *ec.* (7-69) o la *ec.* (7-70), según la polarización con relación al plano de incidencia. Si, por simplicidad, este desfaseamiento se denota como  $\delta_f$ , y si  $m$  representa un número entero, entonces el ángulo permitido  $\theta_1$  para que ese modo se propague, se puede evaluar despejándolo de la condición algebraica siguiente:

$$\delta_i + 2\delta_f = 2m\pi \quad (7-72)$$

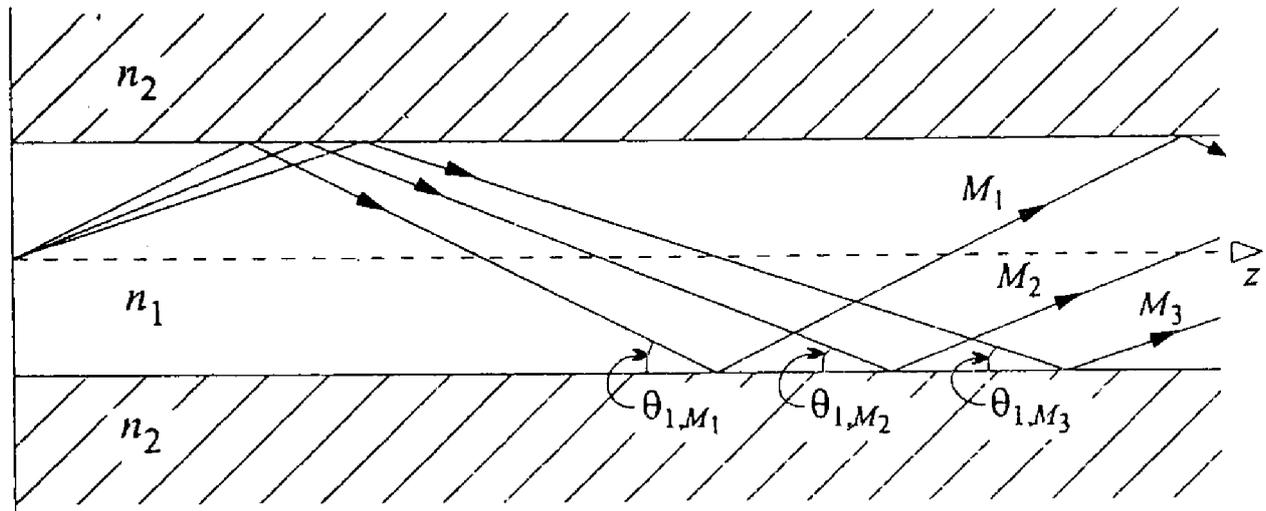
Considérense ahora tres modos cualesquiera de propagación en una fibra multimodo, tal como se ilustra en la Fig. 7-21. Cada modo está representado por su rayo respectivo, con su ángulo de incidencia específico que garantiza la condición dada por la *ec.* (7-66) para que se propague constructivamente a lo largo de la fibra. En cada caso, el ángulo de incidencia  $\theta_1$  es menor que el ángulo crítico  $\theta_c$  dado por la *ec.* (7-68); mientras mayor sea el ángulo crítico, más modos podrán propagarse, pues el rango permisible para los valores discretos de  $\theta_1$  también aumenta\*. Ahora bien, si  $n_2/n_1$  disminuye,  $\theta_c$  aumenta; por lo tanto, conforme la diferencia entre  $n_2$  y  $n_1$ \*\* sea más marcada,  $\theta_c$  se irá incrementando y el número de modos presentes en la fibra también aumentará. De esto se concluye, haciendo una interpretación a la inversa, que mientras más parecidos sean los valores de  $n_1$  y  $n_2$ , el número de modos posibles en la fibra disminuirá.

Si regresamos ahora a la Fig. 7-21, es claro que cada modo viaja una distancia total diferente a la de los demás modos antes de llegar al final de la fibra. Por lo tanto, los modos alcanzan su destino en tiempos diferentes. El efecto que esto tiene en la transmisión de un tren de pulsos por la fibra se describirá brevemente a continuación.

---

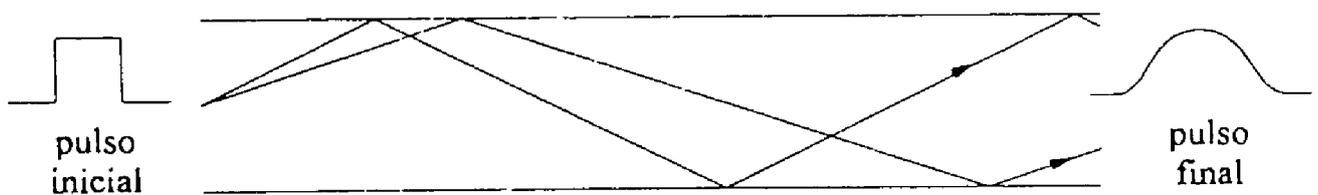
\* Los modos cuyos ángulos de propagación  $\theta_1$  tienen valores cercanos al ángulo crítico  $\theta_c$  son los modos de orden superior. Los modos de orden inferior tienen ángulos  $\theta_1$  mucho menores que  $\theta_c$ .

\*\* Por ejemplo, dejando fijo a  $n_1$  en el núcleo y disminuyendo más y más a  $n_2$  en el revestimiento  $\Rightarrow \Delta = (n_1 - n_2)/n_1 \uparrow; n_2/n_1 \downarrow$ .



**Fig. 7-21** Representación radial de tres modos cualesquiera ( $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ ) propagándose por reflexión interna total con sus respectivos ángulos permitidos de incidencia ( $\theta_{1,M1}$ ,  $\theta_{1,M2}$ ,  $\theta_{1,M3}$ ).

Supóngase que se tiene un pulso al inicio de la línea óptica, como se indica en la Fig. 7-22. La potencia total del pulso se distribuye entre todos los modos que se propagan por la fibra. Como cada modo llega al extremo receptor en tiempos ligeramente diferentes, el pulso reconstruido o recibido diferirá del pulso original, ensanchándose en el tiempo conforme viaja a lo largo de la línea. A este efecto se le da el nombre de *dispersión intermodal* (o multimodal)\*. Tal dispersión puede ser reducida (y mejorar cada pulso en la recepción) si en lugar de utilizar un índice de refracción constante en



**Fig. 7-22** Los modos de propagación que conducen la potencia de un pulso llegan al final de la fibra en tiempos diferentes. Esta dispersión intermodal produce distorsión en el pulso recibido.

\* También se le designa simplemente como *dispersión modal* o *retraso de grupo*.

el núcleo, se emplea un índice que aumente gradualmente, como se verá en la sección 7.12 (véase también la Fig. 7-5). Esto permite aumentar el ancho de banda y transmitir tasas de datos a mayor velocidad que en una fibra multimodo de índice escalonado. Desde luego, en una fibra monomodo no hay efectos de dispersión intermodal y, en consecuencia, su ancho de banda es aún mayor que el de una fibra multimodo de índice gradual.

## 7.11 Angulo de aceptación y apertura numérica

El ángulo de aceptación y la apertura numérica de una fibra son conceptos relacionados directamente con la habilidad o eficiencia de acoplamiento que dicha fibra tiene para aceptar la mayor cantidad posible de luz que provenga de la fuente emisora. Su definición es muy sencilla, y para ello nos apoyaremos en la Fig. 7-23. Por simplicidad, consideraremos un solo modo arbitrario, representado por el único rayo en la figura, aunque los resultados obtenidos serán aplicables para todos los modos presentes en la fibra. El rayo puede estar en cualquier plano que imaginariamente parta a la fibra en dos secciones longitudinales y que contenga al eje del núcleo, o eje  $z$ . A estos planos se les da el nombre de *meridianos*, y los rayos en ellos contenidos (como el de la Fig. 7-23) se denominan *rayos meridionales*. Un rayo meridional siempre está sobre el mismo plano conforme avanza por la

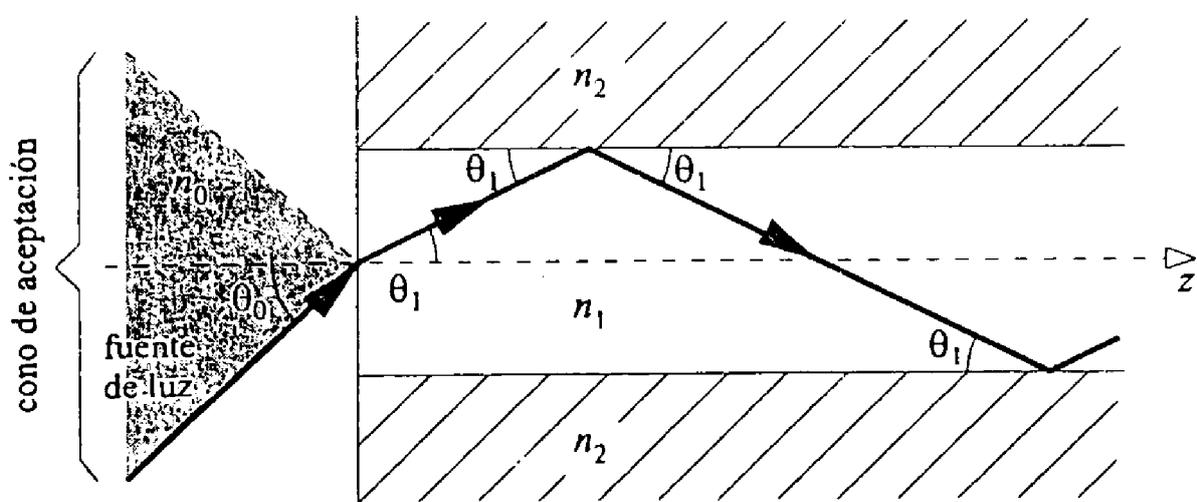


Fig. 7-23 Definición gráfica del cono de aceptación de una fibra óptica.

fibra, de manera que es fácil rastrear sus puntos de reflexión y su trayectoria en zig-zag\*.

El rayo meridional de la Fig. 7-23 es emitido por una fuente de luz y viaja por un medio con índice de refracción  $n_0$  antes de hacer contacto con el núcleo de la fibra. Al hacer contacto, forma un ángulo  $\theta_0$  con respecto al eje  $z$ . Se refracta y penetra en el núcleo, cuyo índice vale  $n_1$ , hasta llegar a la frontera núcleo-revestimiento con un ángulo de incidencia  $\theta_1$ . Si  $\theta_1$  es menor que el ángulo crítico, se refleja totalmente y avanza en zig-zag, pasando siempre por el eje del núcleo después de cada reflexión. El siguiente paso en este análisis consiste en encontrar el rango permisible para  $\theta_0$  (que, en tres dimensiones, delimitaría un cono imaginario de inyección de luz), de tal manera que  $\theta_1$  siempre sea menor que  $\theta_c$ , el ángulo crítico. De la ec. (7-68) se tiene que:

$$\cos \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (7-73)$$

y aplicando la ley de Snell en la frontera entre los medios con índices  $n_0$  y  $n_1$  se obtiene\*\*:

$$n_0 \operatorname{sen} \theta_0 = n_1 \operatorname{sen} \theta_1 \quad (7-74)$$

El valor máximo permisible para  $\theta_0$  en la ecuación anterior está relacionado con el valor máximo permisible de  $\theta_1$  (que es igual a  $\theta_c$ ). Por lo tanto:

$$n_0 \operatorname{sen} \theta_{0(\text{máx.})} = n_1 \operatorname{sen} \theta_c$$

y si  $n_0$  corresponde al índice de refracción del aire (igual a 1), entonces:

$$\operatorname{sen} \theta_{0(\text{máx.})} = n_1 \operatorname{sen} \theta_c \quad (7-75)$$

A  $2\theta_0$  máximo se le da el nombre de *ángulo de aceptación*, y al  $\operatorname{sen} \theta_0$  máximo se le designa como la *apertura numérica (NA)* de la fibra. O sea:

---

\* En la fibra también puede haber otro tipo de rayos, llamados oblicuos, sesgados, o simplemente no-meridionales. Estos no están siempre sobre el mismo plano (ni éste contiene al eje  $z$ ) y son más difíciles de rastrear. Tienden a seguir una trayectoria más o menos helicoidal por tramos rectos a lo largo de la fibra, e influyen en el cálculo de las pérdidas de potencia. Sin embargo, su estudio no es necesario para obtener una idea general de cómo se propagan los modos por la fibra.

\*\* Nótese que el eje de la fibra se convierte en la normal al plano entre los dieléctricos con índices  $n_0$  y  $n_1$ .

$$NA = \text{sen } \theta_{0(\text{máx.})} = n_1 \text{ sen } \theta_c \quad (7-76)$$

De las ecs. (7-73) y (7-75) se tiene que:

$$\cos^2 \theta_c = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2$$

$$\text{sen}^2 \theta_c = \left[ \frac{1}{n_1} \text{sen } \theta_{0(\text{máx.})} \right]^2$$

y como  $\text{sen}^2 \theta_c + \cos^2 \theta_c = 1$ :

$$\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 + \left[ \frac{1}{n_1} (NA) \right]^2 = 1$$

de donde:

$$NA = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1}$$

$$NA = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (7-77)$$

Si se compara la ec. (7-77) con la definición dada por la ec. (7-35) en la sección 7.3, donde se estudió el análisis modal, se observa que ambas ecuaciones son idénticas. También conviene notar que mientras mayor sea la apertura numérica, el ángulo de aceptación también aumenta, de acuerdo con la ec. (7-76). Los valores típicos de  $NA$  para las fibras que se emplean en la práctica se encuentran en el rango de 0.15 a 0.50.

**Ejercicio 7-10** Una fibra óptica multimodo de índice escalonado tiene índices de refracción iguales a 1.48 y 1.46, respectivamente, en el núcleo y el revestimiento. Calcule la apertura numérica de la fibra y el ángulo de aceptación del cono de iluminación asociado con ella.

**Solución**

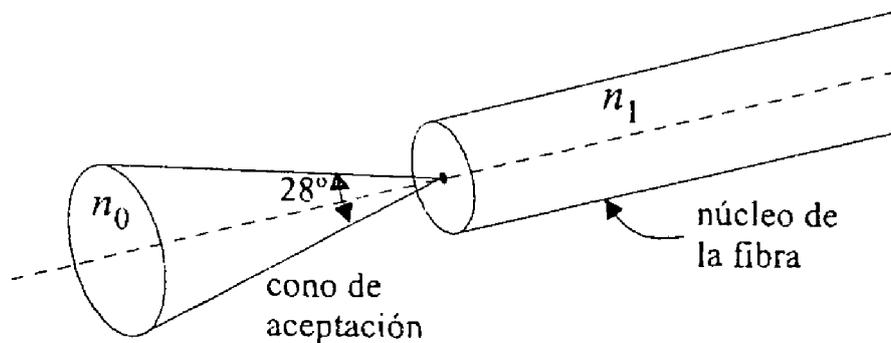
De la ec. (7-77) se tiene que la apertura numérica es igual a:

$$NA = \sqrt{1.48^2 - 1.46^2} = 0.2425$$

El ángulo de aceptación, que se denotará como  $\theta_a$ , se obtiene de la ec. (7-76) como:

$$2\theta_a = 2 \operatorname{ang} \operatorname{sen} NA = 28.068^\circ$$

Este resultado se puede ilustrar de la manera siguiente:



## 7.12 Propagación en fibras multimodo de índice gradual

Al final de la sección 7.10 se comentó que la dispersión intermodal y la distorsión de los pulsos transmitidos en una fibra multimodo pueden reducirse si se utiliza un núcleo cuyo índice de refracción varíe gradualmente, en lugar de ser constante en toda su sección transversal. Esta nueva fibra multimodo "de índice gradual" tiene dimensiones en el rango mostrado en la Fig. 7-5c. La curva que define a la variación del índice de refracción  $n_1$  con relación al radio  $\rho$  medido desde el centro de la fibra puede estar representada matemáticamente por una gran variedad de funciones, aunque por lo general se prefiere adoptar una distribución  $n_1$  dada por una función parabólica.

Por otra parte, al inicio de la misma sección 7.10 se definió la "diferencia entre índices"  $\Delta$ , que cumple con la relación:

$$n_2 = n_1 (1 - \Delta)$$

de donde

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad * \quad (7-78)$$

En la fibra multimodo de índice gradual, el índice de refracción  $n_1$  es máximo en el centro del núcleo y va disminuyendo suavemente hacia la frontera con el revestimiento. Esto, sin duda, complica la fabricación con buena calidad de una fibra de este tipo. La relación matemática que más se emplea para caracterizar la variación gradual del índice  $n_1$ , que se vuelve una función  $n(\rho)$  es:

$$n(\rho) = n_1 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{\rho}{a} \right)^\alpha \right]^{1/2} \quad 0 \leq \rho \leq a \quad (7-79)$$

en donde  $n_1$  es el valor de  $n$  en el centro del núcleo,  $\Delta$  está dada por la ec. (7-78),  $a$  es el radio del núcleo, y  $\alpha$  es un exponente arbitrario. Cuando  $\alpha$  se elije igual a 2, se obtiene la relación parabólica que típicamente se utiliza:

$$n(\rho) = n_1 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad 0 \leq \rho \leq a \quad (7-80)$$

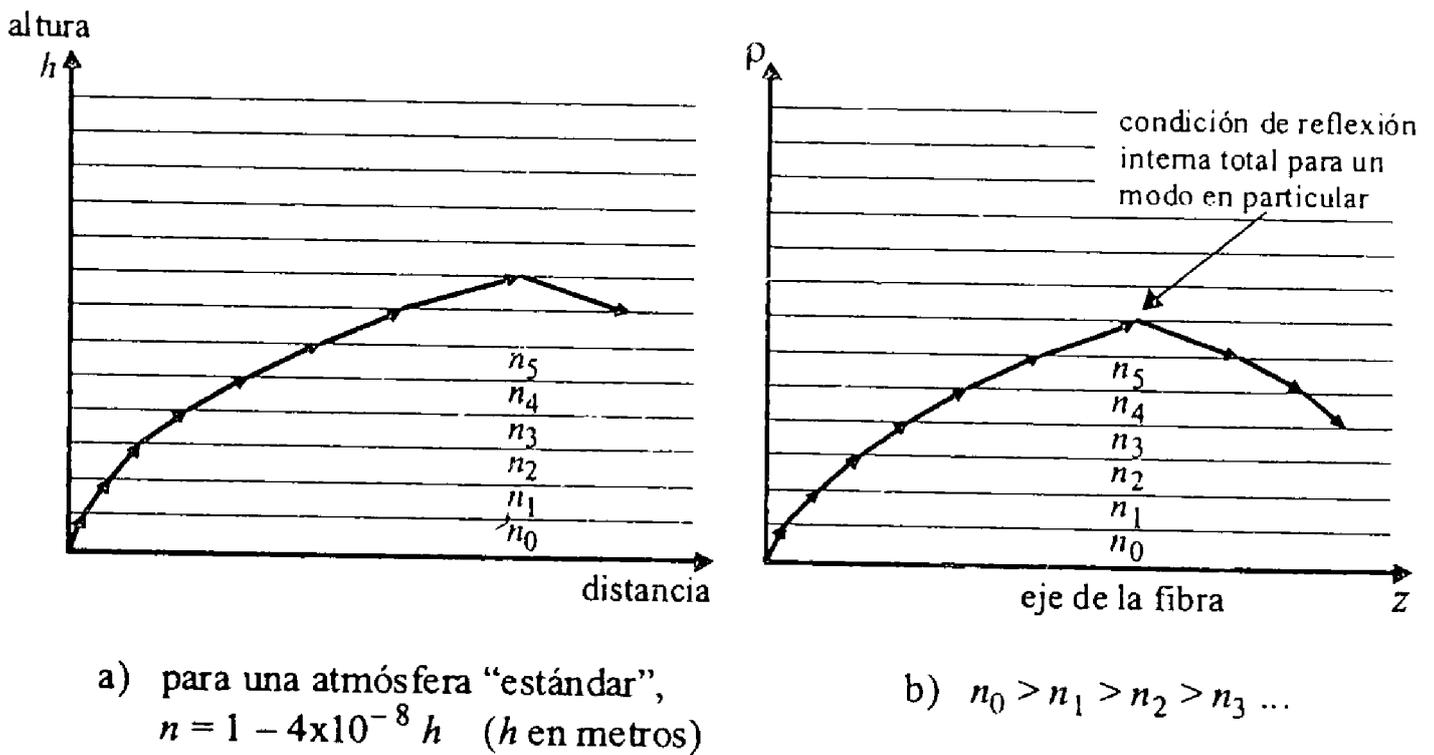
La expresión matemática dada por la ec. (7-79) es muy acertada y útil, porque facilita el análisis general de estas fibras. Así, por ejemplo, si  $\alpha \rightarrow \infty$ , se llega a la fibra de índice escalonado; y si  $\alpha = 1$ , se tiene una distribución triangular.

Por lo que respecta al índice de refracción en el revestimiento, y acordemente con lo mostrado en la Fig. 7-5c, se mantiene constante e igual a  $n_2$ . Y en cuanto a la apertura numérica, ésta es obviamente función de  $\rho$ , y su determinación es más compleja que para una fibra de índice escalonado. El ángulo de aceptación se reduce, y esto dificulta el acoplamiento de la fibra con su fuente de luz (véase el capítulo 8).

---

\* También se le define como  $\Delta = (n_1^2 - n_2^2) / 2n_1^2$ , pero el resultado de esta operación es muy aproximadamente igual al de la ec. (7-78).

El núcleo no homogéneo de este tipo de fibras multimodo produce un efecto acumulativo de refracción similar al que ocurre con las ondas electromagnéticas de cierta frecuencia (HF) en los enlaces ionosféricos. En el capítulo 1 ya se mencionó algo al respecto (véase la Fig. 1-6); sin embargo, ahora veremos esto con un poco más de detalle. La disminución gradual del índice de refracción en la atmósfera, desde el piso hacia arriba, definido para una "atmósfera estándar", produce muchas refracciones sucesivas de las ondas electromagnéticas conforme éstas inciden en fronteras donde el índice cambia, de acuerdo con la distribución estratificada ilustrada en la Fig. 7-24a. El efecto final de este mecanismo es que se obtiene una trayectoria curva para una estratificación fina. El ángulo de incidencia va aumentando, hasta que se obtiene la condición de reflexión interna, y la señal puede llegar a receptores ubicados a miles de kilómetros de distancia del punto emisor. En una fibra óptica multimodo de índice gradual ocurre lo mismo, según se indica en la Fig. 7-24b. Nótese, sin embargo, que la distancia radial  $\rho$  en donde se obtiene reflexión interna total es diferente para cada modo de propagación en la fibra, puesto que el ángulo inicial de



**Fig. 7-24** Similitud en la refracción sucesiva de las ondas electromagnéticas (vistas como rayos de luz) en: a) la ionosfera y b) una fibra óptica multimodo de índice gradual.

incidencia de cada modo también es diferente (véase la Fig. 7-21). En consecuencia, las trayectorias de los modos son curvas distintas, tal como se representa en la Fig. 7-25.

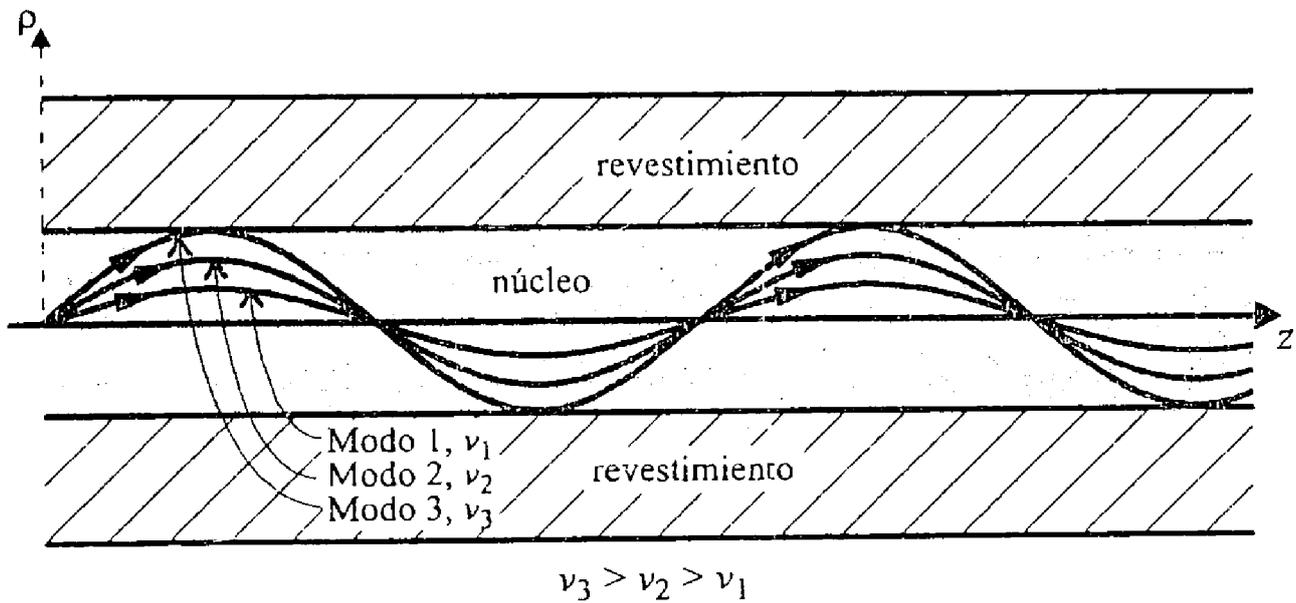


Fig. 7-25 Trayectorias curvas de tres modos diferentes en el núcleo de una fibra multimodo de índice gradual.

Ahora bien, recuérdese que el índice de refracción es una medida de la velocidad de la luz en un medio con relación a su velocidad  $c$  en el vacío. De la ec. (7-65):

$$v_{\text{medio}} = \frac{c}{n_{\text{medio}}}$$

Esta última expresión nos dice, con referencia a la Fig. 7-25, que el modo 1 viaja más despacio que los modos 2 y 3, y que el modo 2, a su vez, viaja más despacio que el modo 3. Es decir, los modos que tienen reflexión interna total cerca del eje del núcleo (donde  $n$  es más alto, debido a la graduación parabólica), viajan menos rápido que los modos que tienen reflexión interna total en el núcleo pero cerca del revestimiento (donde  $n$  es menor). Por otra parte, la longitud de la trayectoria del modo 1 es menor que la longitud de la trayectoria del modo 2, y así sucesivamente. O sea que todos los modos

llegan casi al mismo tiempo, con un desfaseamiento total similar, al punto de recepción, pues el que viaja más despacio recorre menos distancia, y la velocidad va aumentando conforme la trayectoria se alarga. Evidentemente, este mecanismo produce menos distorsión en los pulsos recibidos, ya que la dispersión intermodal se reduce en forma significativa por la compensación que hay entre las velocidades y las longitudes de las trayectorias de los modos, a diferencia de una fibra multimodo de índice escalonado donde la velocidad no cambia en función de  $\rho$  y es la misma para todos los modos. En conclusión, el ancho de banda de la fibra multimodo de índice gradual es mayor que el de una de índice abrupto o escalonado, y esto justifica la complejidad de su fabricación y el que se use preferentemente en lugar de la fibra multimodo con índice constante. De cualquier manera, nótese que la fibra monomodo de índice escalonado sigue siendo la mejor, pero que su fabricación requiere de un núcleo muy angosto, como ya se explicó en secciones anteriores.

Por lo que se refiere a la teoría modal aplicada a la fibra multimodo de índice gradual, el lector habrá intuido, sin duda, que al sustituir una función del tipo dado por la ec. (7-79) en el análisis electromagnético, éste se complica sustancialmente. Por supuesto, existen métodos para obtener soluciones aproximadas, de los cuales el más utilizado es el WKB (llamado así por las iniciales de sus autores: Wenzel, Kramers y Brillouin); este método se utiliza mucho en mecánica cuántica. Aquí concluyen los objetivos teóricos de nuestro texto, por lo que respecta a este tema, y aquellos lectores amantes de las matemáticas o que lleven un curso avanzado sobre fibras ópticas, y que deseen conocer este método, pueden recurrir a un buen libro de mecánica cuántica, a artículos publicados en revistas especializadas\*, o a algunos de los textos recomendados al final de este mismo libro. El parámetro  $V$  para una fibra de este tipo, cuando  $\Delta$  es pequeño, se calcula como:

$$V = \frac{2\pi a n_1 \sqrt{2\Delta}}{\lambda_0} \quad (7-81)$$

---

\* Por ejemplo: "WKB analysis of planar surface waveguides with truncated index profiles", R. Srivastava, C. K. Kao y R. V. Ramaswamy, J. Lightwave Tech., Vol. LT-5, 1987.

y el número de modos de propagación se puede estimar con la relación siguiente:

$$M \doteq \frac{\alpha}{\alpha + 2} \left[ \frac{V^2}{2} \right] \quad (7-82)$$

Si se compara esta última ecuación con la *ec.* (7-53), se observa que para una distribución parabólica ( $\alpha = 2$ ), el número de modos que se propaga es la mitad del que habría en una fibra de índice escalonado.

**Ejercicio 7-11** Grafique la variación del índice de refracción en el núcleo de una fibra multimodo de índice gradual para los casos en donde el exponente  $\alpha$  de la *ec.* (7-79) vale 1, 2, 8 y 1000. Considere que el valor máximo de  $n$  es 1.495, que el diámetro del núcleo es de  $70 \mu\text{m}$  y que el índice de refracción en el revestimiento vale 1.45.

### Solución

De la *ec.* (7-78), la diferencia entre índices,  $\Delta$ , es igual a:

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = \frac{1.495 - 1.45}{1.495} = 0.0301$$

(es decir, 3%)

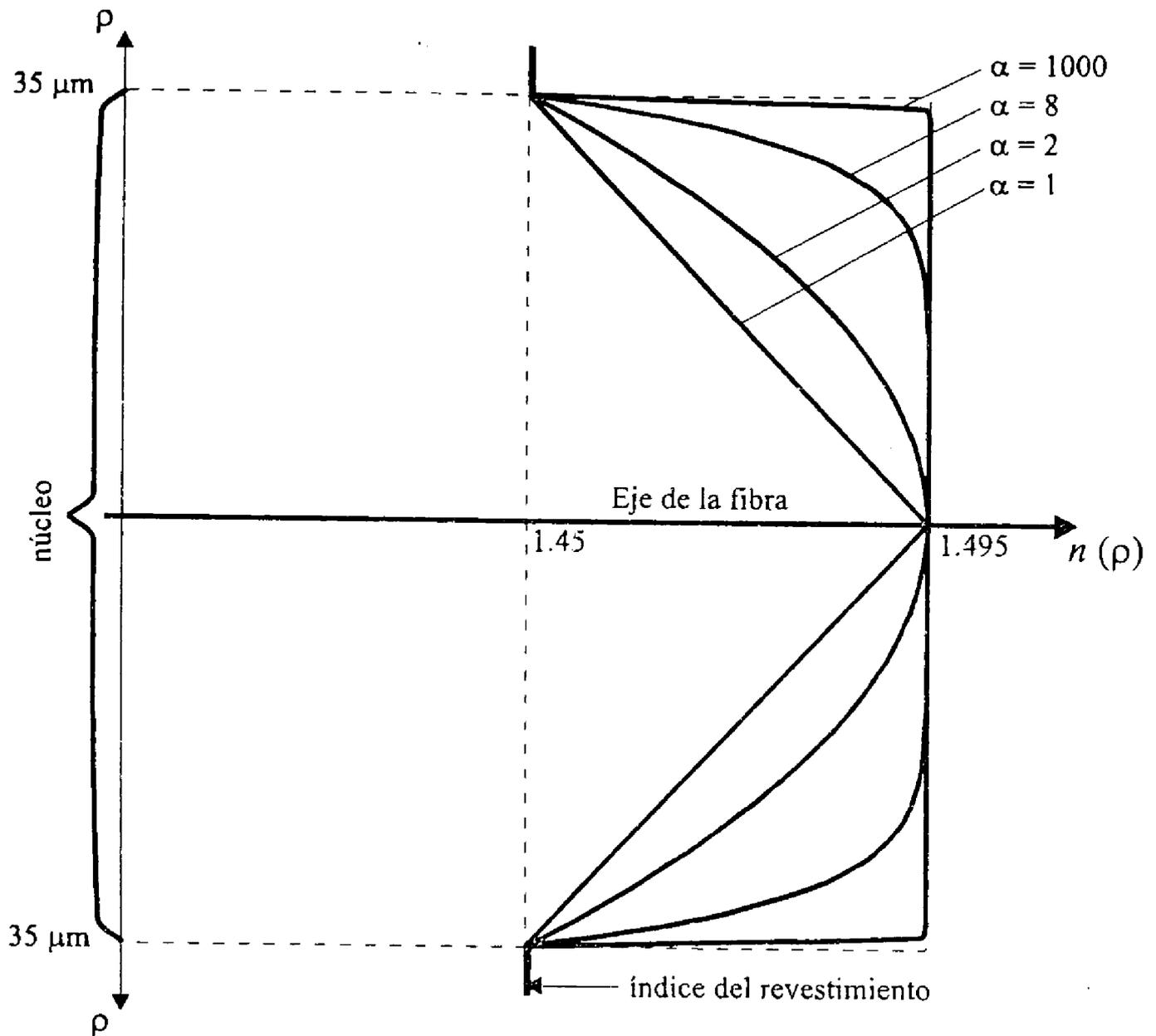
La función que se pide graficar es:

$$n(\rho) = n_1 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{\rho}{a} \right)^\alpha \right]^{1/2} = 1.495 \left[ 1 - 0.0602 \left( \frac{\rho}{35 \mu\text{m}} \right)^\alpha \right]^{1/2}$$

$$0 \leq \rho \leq 35 \mu\text{m}$$

Sustituyendo  $\alpha = 1, 2, 8$  y 1000, se obtienen las distribuciones graficadas en la página siguiente.

Se observa que cuando  $\alpha$  es muy grande, la curva característica del índice de refracción tiende a confundirse con la distribución escalonada.



## 7.13 Problemas

**7.13.1** Una fibra monomodo de índice escalonado tiene un radio de cuatro micras. Los índices de refracción en su núcleo y revestimiento valen, respectivamente, 1.46 y 1.455. Calcule la apertura numérica de la fibra y la frecuencia normalizada a una frecuencia de transmisión de 230 THz (1,300 nm). [ $NA = 0.1207$ ,  $V = 2.3256$ ].

**7.13.2** ¿Cuánto debe valer el radio de una fibra óptica monomodo de índice escalonado que trabaje en la primera ventana de propagación ( $\lambda = 850 \text{ nm}$ )

y tenga en su núcleo un índice de refracción igual a 1.465, y en el revestimiento uno de 1.46? [ $a < 2.7 \mu\text{m}$ ].

**7.13.3** Si en el problema anterior se hace el cambio para usar la segunda ventana de propagación ( $\lambda = 1,300 \text{ nm}$ ), ¿cuánto puede valer el radio del núcleo para propagación monomodo? [ $a < 4.12 \mu\text{m}$ ].

**7.13.4** Una fibra monomodo de índice escalonado trabaja en la tercera ventana de propagación ( $\lambda = 1,550 \text{ nm}$ ). Sus índices de refracción en el núcleo y el revestimiento valen, respectivamente, 1.48 y 1.47. Si el diámetro del núcleo es de  $12 \mu\text{m}$ , ¿cuántos modos se propagan en la fibra y cuánto vale su frecuencia normalizada de corte?

**7.13.5** Repita el problema anterior suponiendo que el diámetro del núcleo aumentase a  $20 \mu\text{m}$ .

**7.13.6** Una fibra de índice escalonado tiene índices de refracción de 1.46 y 1.45 en el núcleo y el revestimiento, respectivamente. Si el radio del núcleo es de  $6 \mu\text{m}$ , encuentre la constante de fase del modo dominante a una frecuencia de transmisión de 230 THz.

**7.13.7** Una fibra multimodo de índice escalonado que transmite en la primera ventana ( $\lambda = 830 \text{ nm}$ ) tiene un núcleo con radio igual a  $30 \mu\text{m}$ . Sus índices de refracción valen:  $n_1 = 1.48$  y  $n_2 = 1.462$ . ¿Cuántos modos se propagan en la fibra? [Como  $V = 52$ , se propagan 1,352 modos].

**7.13.8** Si en el problema anterior se cambia a la tercera ventana, con  $\lambda = 1,600 \text{ nm}$ , ¿cuántos modos se propagan en la fibra? [364].

**7.13.9** Un fabricante quiere hacer una fibra multimodo de índice escalonado con frecuencia normalizada máxima igual a 60, que tenga una apertura numérica de 0.35. Si en el revestimiento desea usar un índice de refracción igual a 1.44, ¿cuánto deben valer el radio y el índice de refracción del núcleo a una frecuencia de transmisión de 350 THz? [ $a < 23.4 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1.482$ ].

**7.13.10** Un rayo de luz viaja con una velocidad de  $2.05 \times 10^8$  m/s en el núcleo de una fibra de índice escalonado. Si el ángulo crítico en la interfase núcleo-revestimiento es de  $18^\circ$ , diga cuánto valen la apertura numérica de la fibra y el ángulo de aceptación. [ $NA = 0.45$ ,  $53.5^\circ$ ].

**7.13.11** Una fibra de índice gradual con distribución parabólica tiene un índice de refracción en el revestimiento igual a 1.46. En el núcleo, el valor máximo de  $n$  es  $n_1 = 1.48$ . Si el radio del núcleo es de  $20 \mu\text{m}$  y la longitud de onda de operación igual a  $850 \text{ nm}$ , ¿cuántos modos se propagan aproximadamente? [322].

# Componentes y sistemas con fibras ópticas

---

## 8.1 Introducción

En la Fig. 1-1 se mostraron los elementos fundamentales de un sistema de comunicaciones. En dicha figura, el “canal de transmisión” sería una fibra óptica, para el caso de un sistema de comunicaciones ópticas. Nuestra intención en este capítulo final no es demasiado ambiciosa, sino solamente presentar al lector los principales componentes de un sistema típico, así como algunos conceptos adicionales importantes sobre las fibras y sus aplicaciones. De esta forma, él o ella podrá abordar con mayor confianza y facilidad otros textos más avanzados que se especializan directa y exclusivamente en el diseño de sistemas con fibras ópticas. Dicho tema se cubre con mayor amplitud en otro curso, distinto al que este texto está dirigido.

A partir de la Fig. 1-1, se puede modelar un sistema típico de comunicaciones por fibra óptica tal como se muestra en la Fig. 8-1. La fuente óptica o luminosa puede ser un *láser semiconductor* o un *diodo emisor de luz (LED)*. En la sección 8.4 se ampliará sobre estas fuentes (también se recomienda revisar las páginas 18, 19 y 20 del texto). La fuente luminosa es modulada por el mensaje o la información que se desea transmitir. El tipo de modulación que se emplea depende de la información y de los requerimientos del enlace; así por ejemplo, se puede utilizar ASK, OOK,

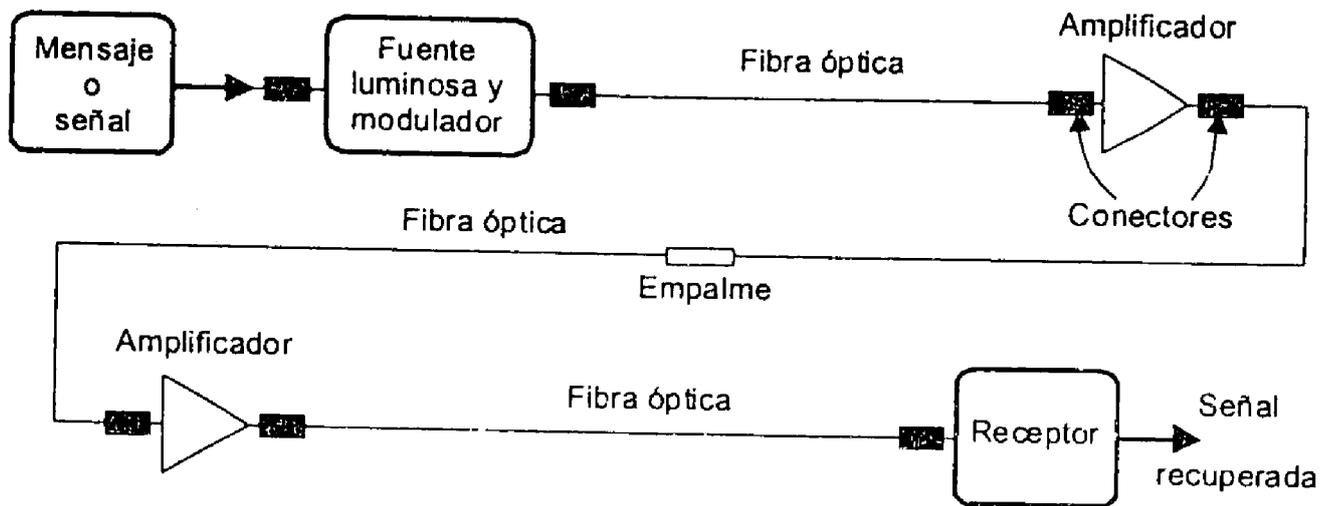


Fig. 8-1 Sistema típico de comunicaciones por fibra óptica.

PAM, PPM\*, etc. Los amplificadores se requieren en enlaces largos y hay varios tipos. Unos regeneran la señal además de amplificarla y reciben el nombre de *amplificadores electrónicos*. Estos dispositivos realizan una conversión óptica/electrónica y después otra conversión electrónica/óptica para amplificar; actualmente hay varios sistemas en operación que los utilizan. En cambio, los *amplificadores ópticos* amplifican la luz sin necesidad de efectuar las conversiones óptica/electrónica (intensidad de luz convertida a voltaje) y viceversa. En la sección 8.5 se comentará más sobre ellos.

Al final del enlace, el receptor debe transformar la luz que llega en una señal eléctrica. Existen diferentes tipos de detectores o receptores, pero los más comunes en comunicaciones son el *fotodetector PIN* y el *fotodetector de avalancha* (véase la sección 8.6).

Los *conectores* son dispositivos de unión entre los aparatos y las fibras, que introducen pérdidas de potencia del orden de dos a tres décimas de un decibel. En algunos casos es necesario unir dos secciones de fibras y a la unión que resulta se le da el nombre de *empalme*. Los empalmes pueden realizarse por fusión o con algún adhesivo, pero puede haber desalineación de ejes, pequeñas diferencias en el diámetro de los núcleos y algunos otros factores que también producen atenuación o pérdidas de potencia. De éstos, el que mayor atenuación produce es la desalineación de los ejes de las dos

\* ASK = *Amplitude-Shift-Keying* (Modulación por desplazamiento de amplitud).

OOK = *On-Off-Keying* (Modulación por encendido y apagado).

PAM = *Pulse Amplitude Modulation* (Modulación de pulsos en amplitud).

PPM = *Pulse Position Modulation* (Modulación de pulsos en posición).

secciones de fibra; con fibras de índice gradual, dicha atenuación es del orden de una décima de decibel, pero en el caso de las fibras monomodo, cuyo núcleo es más reducido y es más fácil la desalineación, puede llegar a cerca de un decibel.

En cuanto se refiere a las pérdidas de potencia de la propia fibra, esto se verá en la sección siguiente.

## 8.2 Atenuación

En la Fig. 1-12 se presentó la curva aproximada de atenuación de las fibras ópticas en función de la frecuencia. Sin embargo, estrictamente y para cada fibra en particular, la atenuación exacta depende de varios factores: *pérdidas por absorción*, debidas a impurezas en el material de la fibra; *pérdidas por dispersión\* de Rayleigh*, debidas a imperfecciones en el proceso de fabricación; *pérdidas por dispersión cromática* o intramodal (sección 7.8), debidas a que las fuentes ópticas no son monocromáticas; *pérdidas por dispersión intermodal*, que ocurren sólo en las fibras multimodo (Fig. 7-22); *pérdidas por radiación*, causadas por irregularidades en la fibra y pequeños dobleces o microcurvaturas que se convierten en discontinuidades; y *pérdidas por acoplamiento*, que ya fueron descritas en la sección anterior.

Así como en los cables de cobre la potencia absorbida se transforma en calor, en una fibra óptica ocurre algo análogo cuando las impurezas moleculares y los iones de agua presentes en el material absorben parte de la luz y la convierten en calor. Esto produce las pérdidas por absorción mencionadas anteriormente. Por otra parte, las pérdidas por dispersión de Rayleigh ocurren porque las irregularidades microscópicas del material, que se forman durante la fabricación de la fibra, difractan los rayos de luz que se propagan, provocando que parte de la potencia se escape por el revestimiento.

La potencia de la señal óptica se va atenuando exponencialmente conforme avanza en la dirección positiva de  $z$ , al igual que en los demás tipos de líneas. Si se considera sólo la intensidad de la señal, en función de  $z$ , de la potencia inicial  $P_0$  y de su coeficiente de atenuación  $\alpha$ , la potencia está dada por la ecuación siguiente:

$$P(z) = P_0 e^{-\alpha z} \quad (8-1)$$

---

\* También se les llama pérdidas por esparcimiento.

En base a lo explicado con anterioridad, el coeficiente  $\alpha$  depende de varias variables y de la frecuencia. El material de la fibra, sus impurezas y las tolerancias de manufactura determinan finalmente la curva exacta de atenuación de una marca en particular. Sin embargo, los valores dados para  $\alpha$  en la Fig. 1-12 y la forma de la curva son muy representativos y cercanos a la realidad. Las pérdidas se reducen significativamente cerca de los 1,550 nm y esto ha hecho atractivo su uso en años recientes, junto con la introducción de otros desarrollos tecnológicos necesarios para trabajar en dicha "tercera ventana". En resumen, gracias a los avances en las técnicas de fabricación, el límite teórico ya ha sido prácticamente alcanzado. Dicho límite teórico para  $\alpha$  depende de la frecuencia de operación y es menor conforme aumenta la longitud de onda. De esta forma, por ejemplo, con técnicas modernas como la de *desplazamiento de dispersión*\* ha sido posible producir fibras con atenuaciones entre 0.15 y 0.20 dB/Km a 1,550 nm. La dispersión del material se corrige dopando al núcleo con dióxido de germanio ( $\text{GeO}_2$ ). Evidentemente, sería deseable encontrar otros compuestos para fabricar fibras ópticas con niveles de atenuación inferiores a los aquí descritos. Existen estudios prometedores con materiales cristalinos de cloruro y haluro que han demostrado tener el potencial para fabricar fibras con atenuaciones increíblemente bajas, del orden de 0.001 dB/Km, en longitudes de onda más grandes que las utilizadas actualmente. Tal vez, todo sea cuestión de tiempo... Por ejemplo, la NASA de los Estados Unidos tiene planeado hacer varios experimentos en la microgravedad sobre el compuesto ZBLAN (contiene Zr, Ba, La, Al y Na, y de allí su nombre). Este es un nuevo cristal exótico muy claro que se cree podría ser útil en el futuro para fabricar fibras ópticas con atenuaciones increíblemente bajas.

**Ejercicio 8-1** Una fibra óptica tiene una atenuación de 0.7 dB/Km a 1,300 nm. Si la potencia que entra a la fibra en su extremo inicial es de 100  $\mu\text{W}$ , ¿cuánta potencia hay a una distancia de 30 km más adelante a lo largo de la fibra?

---

\* En inglés, *Dispersion-Shifted Fibers*.

## Solución

$$P_{[\text{en dBW}]} \Big|_{d=30 \text{ Km}} = P_{\text{inicial} [\text{en dBW}]} - \text{pérdidas} [\text{en dB}]$$

$$= 10 \log [100 \times 10^{-6}] - (0.7)(30)$$

$$P_{[\text{en dBW}]} \Big|_{d=30 \text{ Km}} = -40 - 21 = -61 \text{ dBW} = 79.4 \times 10^{-8} \text{ W}$$

$$= 0.794 \text{ } \mu\text{W}$$


---

### 8.3 Producto ancho de banda • distancia

Retomando los conceptos estudiados hasta ahora, se puede concluir que la distorsión de los pulsos de luz, debida al fenómeno de dispersión, es la principal limitante para transmitir datos a muy alta velocidad, pues la atenuación debida a pérdidas por absorción ya se ha reducido a niveles inferiores a 1 dB/km. La tasa máxima de transmisión se puede asociar con un *ancho de banda* de la fibra.

Por otra parte, de acuerdo con la *ec. (8-1)*, mientras mayor sea la potencia inicial  $P_0$ , mayor alcance tendrá la señal. Y para que  $P_0$  sea grande, es necesario que la luz proveniente de la fuente emisora logre acoplarse lo mejor posible al interior de la fibra. Pero no basta que la potencia inicial sea grande, porque mientras mayor sea la longitud del enlace, los pulsos transmitidos se ensanchan más (véase la Fig. 7-22). Si se desea evitar o reducir la interferencia entre símbolos, para disminuir la probabilidad de error a niveles aceptables, es entonces necesario ampliar la distancia entre los pulsos, y esto es equivalente a reducir la tasa de transmisión.

Las fibras que logran capturar más luz son las que tienen una apertura numérica grande (Fig. 7-23) y un diámetro ancho. Sin embargo, las fibras de índice escalonado con diámetros grandes transmiten cientos de modos de propagación y se ven muy limitadas con relación al parámetro *producto ancho de banda • distancia*, que se utiliza para medir la capacidad de

información de un enlace. La dispersión cromática o intramodal y la dispersión intermodal son las principales causantes de que la capacidad de estas fibras tenga un límite cercano a  $20 \text{ MHz} \cdot \text{Km}$ . Esto significa, por ejemplo, que un enlace de 10 km de longitud, sin repetidores intermedios, sólo tiene un ancho de banda efectivo de 2 MHz.

Si en lugar de una fibra multimodo de índice escalonado se emplea una con índice gradual, el número de modos se reduce a la mitad, de acuerdo con la ec. (7-82) para una distribución parabólica del índice de refracción y, aunque el diámetro de su núcleo es ligeramente inferior (Fig. 7-5 c), la capacidad de transmisión puede aumentar cerca de cincuenta veces con relación a la fibra de índice escalonado. De esta forma, es común obtener un producto ancho de banda  $\cdot$  distancia de  $1 \text{ GHz} \cdot \text{Km}$  o más. Pero recuérdese que la fibra óptica monomodo de índice escalonado no sufre del fenómeno de dispersión intermodal (sección 7-8) y, aun cuando el diámetro de su núcleo sea pequeño, es la que ofrece el mayor producto ancho de banda  $\cdot$  distancia. A longitudes de onda cercanas a 1,300 nm, es común obtener cifras del orden de  $100 \text{ GHz} \cdot \text{Km}$ .

Conviene aclarar que también es normal especificar el *producto tasa de transmisión  $\cdot$  distancia*, en lugar del producto ancho de banda  $\cdot$  distancia (que es más útil para la transmisión de información analógica). Este nuevo parámetro para transmisión digital da una idea más rápida de la capacidad de una fibra de cierta longitud, pero recuérdese que la tasa de transmisión depende de la modulación, la codificación y el ancho de banda efectivo de la propia fibra. En la tabla siguiente se proporcionan los valores típicos de este parámetro para los tres tipos de fibras estudiados en el texto.

Fibra	Producto tasa de transmisión $\cdot$ distancia
Monomodo	Varios Gb/s $\cdot$ Km
Multimodo de índice gradual	Varios cientos de Mb/s $\cdot$ Km
Multimodo de índice escalonado	Algunas decenas de Mb/s $\cdot$ Km

Es importante hacer notar que las fibras monomodo actuales tienen una dispersión total casi igual a cero, a longitudes de onda de 1,310 nm y 1,550 nm, lo cual hace que se empleen en aquellos casos donde es prioritario lograr la máxima tasa de transmisión. También debe entenderse que las cifras aportadas en esta sección son representativas, pero que sus valores

Tabla 8-1 Características típicas de operación (fibra multimodo).

Diámetro [ $\mu\text{m}$ ] núcleo/revestimiento	$\lambda = 850 \text{ nm}$		$\lambda = 1,300 \text{ nm}$	
	$\alpha$ [dB/Km]	MHz • Km	$\alpha$ [dB/Km]	MHz • Km
50/125	3.0	600	1.0	800
62.5/125	3.0	200	1.0	600
100/140	4.0	160	2.0	500

exactos dependen de la ventana de operación y de las dimensiones transversales de la fibra. Así, por ejemplo, en la Tabla 8-1 se proporcionan algunos datos comerciales típicos para fibras multimodo de índice gradual.

Existen en el mercado otros cocientes núcleo/revestimiento, pero el más popular es el de 62.5/125, que se utiliza en sistemas LAN. La fibra de 50/125 se emplea en sistemas de vigilancia con monitores de video, y la de 100/140 en algunas aplicaciones industriales, aunque cada vez pierde más popularidad.

También vale la pena mencionar que hay fibras con revestimiento de plástico (llamadas fibras PCS\*), que son multimodo de índice escalonado y que, por lo tanto, ofrecen capacidades de transmisión muy limitadas (de 20 MHz • Km a 30 MHz • Km). Sus dimensiones más comunes son de 200/300 y se usan en aplicaciones de control industrial. También hay fibras más gruesas, donde tanto el núcleo como el revestimiento son de plástico; su atenuación es muy grande (del orden de 200 dB/Km) y sólo se usan para tramos cortos menores de 100 m, también en aplicaciones industriales.

Por lo que se refiere a las fibras monomodo, un cociente de 9/125 es bastante común. El hecho de que sean iluminadas por fuentes láser reduce enormemente la dispersión cromática. Son las fibras con menos atenuación\*\* y su gran ancho de banda efectivo las hace muy atractivas en sistemas de telefonía de larga distancia y de distribución de televisión por cable.

\* *Plastic-Clad Silica* (silicio con revestimiento de plástico).

\*\* Los valores típicos para fibras "estándar" son de 0.4 a 0.5 dB/Km para  $\lambda = 1,300 \text{ nm}$  y de 0.2 a 0.5 dB/Km para  $\lambda = 1,550 \text{ nm}$ .

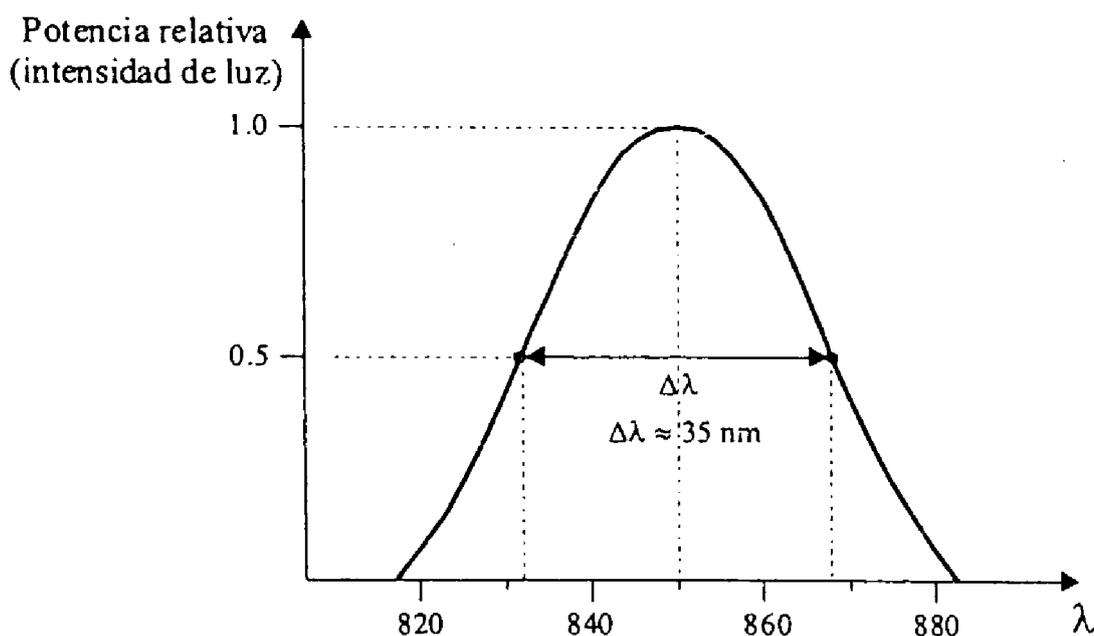
## 8.4 Fuentes de luz

Con el fin de optimizar la entrega de potencia a una fibra óptica y la transmisión de la señal a lo largo de ella, es deseable que la fuente de luz cumpla, en primer lugar, con los dos siguientes requerimientos básicos:

- Anchura espectral angosta ( $\Delta\lambda$ )
- Alta coherencia espacial

La *anchura espectral* está relacionada directamente con la dispersión cromática, ya que la potencia entregada por la fuente luminosa no es emitida en una sola longitud de onda, sino que está distribuida en distintas longitudes alrededor de la longitud de onda central. La anchura espectral  $\Delta\lambda$  se define como la diferencia relativa en nanómetros entre los puntos donde la potencia emitida se reduce al 50% con relación a la máxima.

Hay dos tipos de fuentes y ambas funcionan con diodos semiconductores. La primera es el "LED" o diodo emisor de luz (también llamado diodo de efecto luminiscente). La segunda es el "LD" o diodo láser (también llamado láser de inyección o láser semiconductor). El LD tiene una anchura espectral mucho más angosta que el LED; por tal razón, se dice que el primero es una fuente con coherencia temporal o cuasi-monocromática y que el segundo



**Fig. 8-2** Anchura espectral típica de un LED (compárese con la Fig. 8-4, correspondiente a un LD).

es una fuente no coherente (Fig. 8-2). Los materiales semiconductores que se utilizan para fabricar estas fuentes ópticas son:

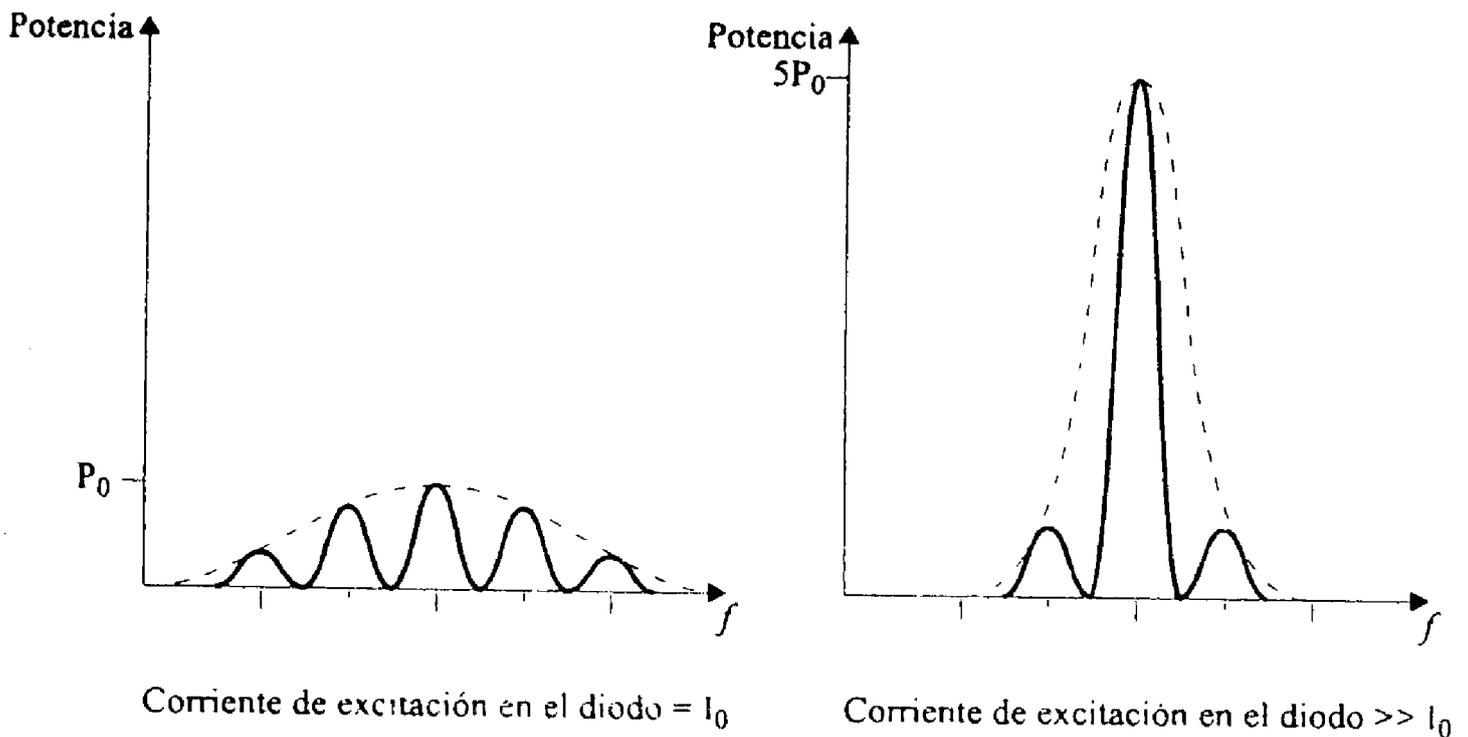
Ventana de operación	Material
1 <sup>a</sup>	AlGaAs
2 <sup>a</sup>	InGaAsP
3 <sup>a</sup>	InGaAsP

Los LEDs se utilizan comúnmente en la primera y segunda ventanas de operación, y los LDs en la segunda y tercera ventanas.

El diodo láser amplifica la intensidad de la luz por emisiones estimuladas, en forma parecida a otros tipos de láseres que se usan en aplicaciones muy diferentes. Para que dicho efecto láser pueda producirse en el material semiconductor es necesario que haya una cavidad resonante, de manera similar a lo que se estudió para las guías huecas (véase la sección 4.8.9). La cavidad resonante consiste de dos espejos planos paralelos y recibe el nombre de *cavidad Fabry-Pérot*. Los fotones de luz\* viajan muchas veces de ida y regreso, reflejándose sobre los espejos; además, en el medio hay "inversión de población", o sea que los fotones generan otros fotones en fase en cada trayecto de su rebote sucesivo. El resultado final es la amplificación de la luz.

Ahora bien, al igual que en una cavidad resonante de una guía de ondas (Fig. 4-20), en el caso de un resonador óptico también se producen muchos modos de propagación que satisfacen las condiciones de frontera impuestas por la cavidad. Cada modo oscila a una frecuencia diferente, que depende de la geometría y dimensiones del resonador óptico. Luego, el diodo láser es un dispositivo multimodo. Sin embargo, es bien conocido que conforme se incrementa la corriente del diodo, el modo central se amplifica más rápido que los modos laterales. De esta forma, se tiene una salida de potencia espectral que es cada vez más uni o mono-frecuencia con corrientes altas de operación. En la Fig. 8-3 se ilustran comparativamente estos conceptos.

\* La dualidad de la luz, aceptada actualmente, permite que ciertos fenómenos luminosos se puedan describir mejor por ondas electromagnéticas, mientras que otros tipos de fenómenos son preferentemente estudiados y descritos por la teoría de partículas, en base a fotones, que son considerados como paquetes de energía.



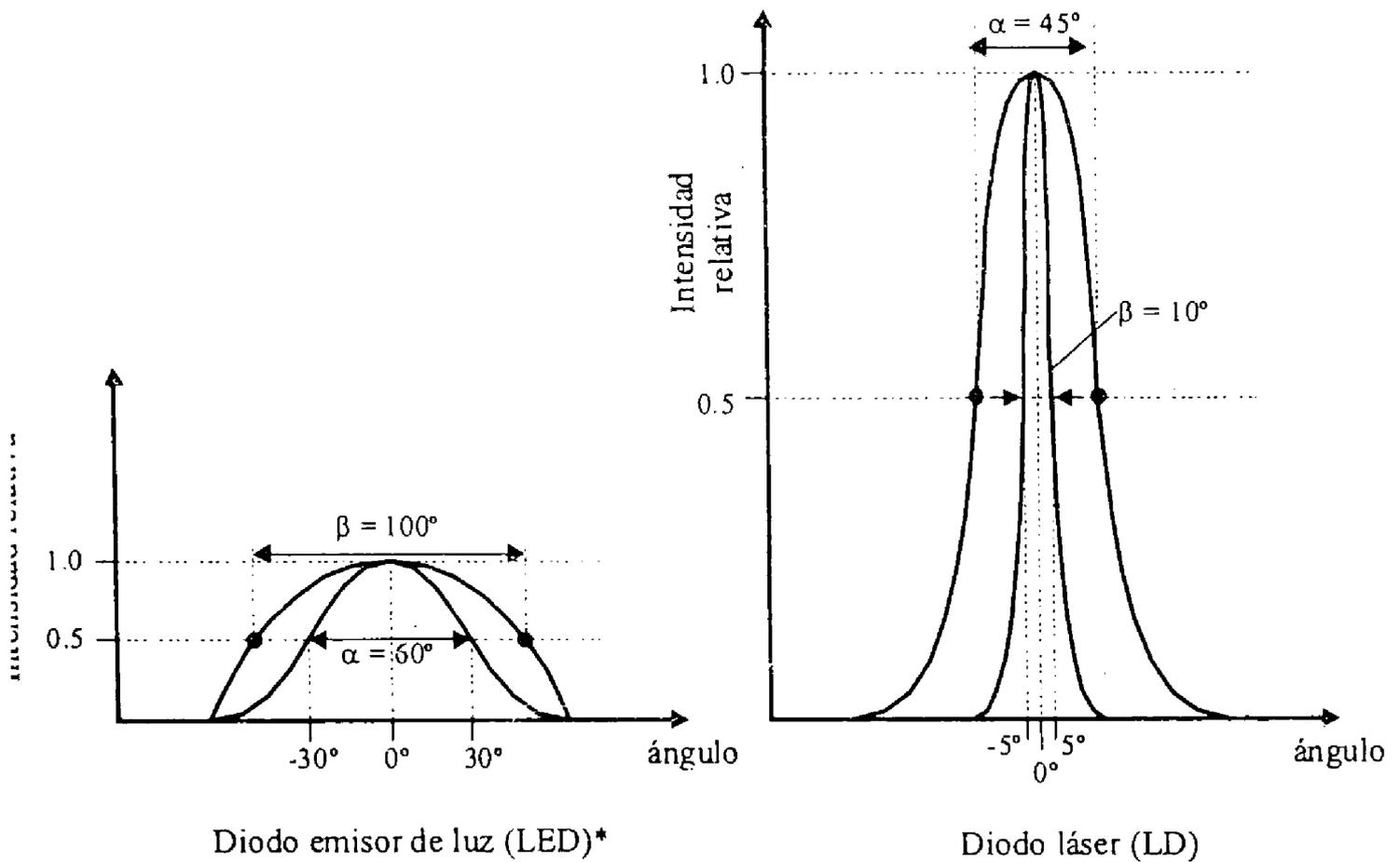
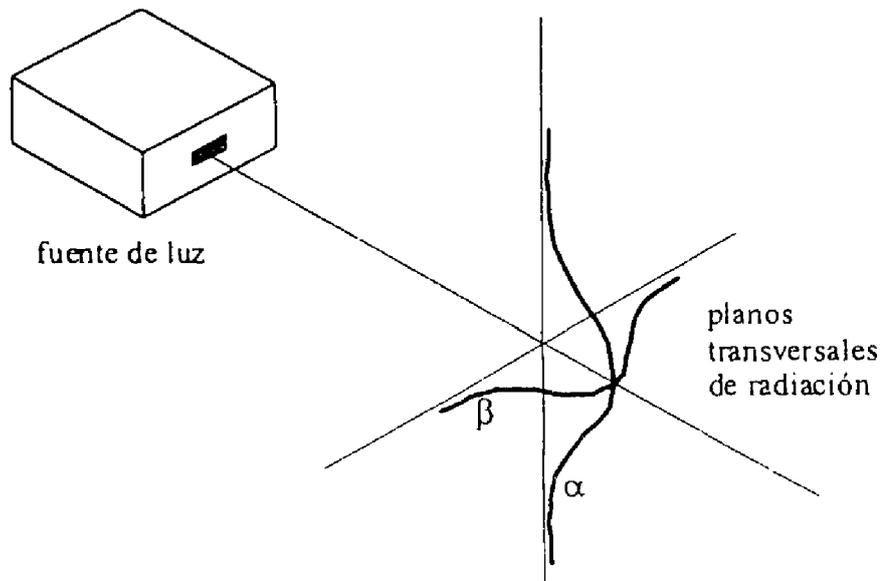
**Fig. 8-3** Conforme aumenta la corriente de excitación en el diodo láser, el cociente de intensidades entre el modo central y los laterales también aumenta.

Las técnicas de detección coherente en el extremo receptor de un enlace requieren que la fuente de luz sea mono-frecuencia. De allí que, además de lo explicado en el párrafo anterior, con relación al dominio del modo central para corrientes altas, se utilizan varias técnicas electrónicas adicionales de depuración, para reducir el número de modos transversales y laterales hasta lograr una respuesta de salida prácticamente monocromática como la mostrada en la Fig. 8-4. La anchura espectral es sólo del orden de 1 nm, en contraste con aproximadamente 35 nm para un LED (compárese con la Fig. 8-2).

La característica de "alta coherencia espacial" de la fuente luminosa, listada en segundo término al inicio de esta sección, ya sea de un LED o de un LD, está determinada por su patrón de radiación. Mientras más directivo sea éste, más fácil será que la potencia emitida quede dentro del cono de aceptación de la fibra (Fig. 7-23) y, por lo tanto, habrá una alta eficiencia de acoplamiento entre la fuente luminosa y el núcleo de la fibra óptica.

El patrón de radiación de un diodo láser es mucho más directivo que el correspondiente a un LED. Este último tiene un patrón muy ancho, del tipo "lambertiano". Por lo tanto, el LD tiene una mejor coherencia espacial. En

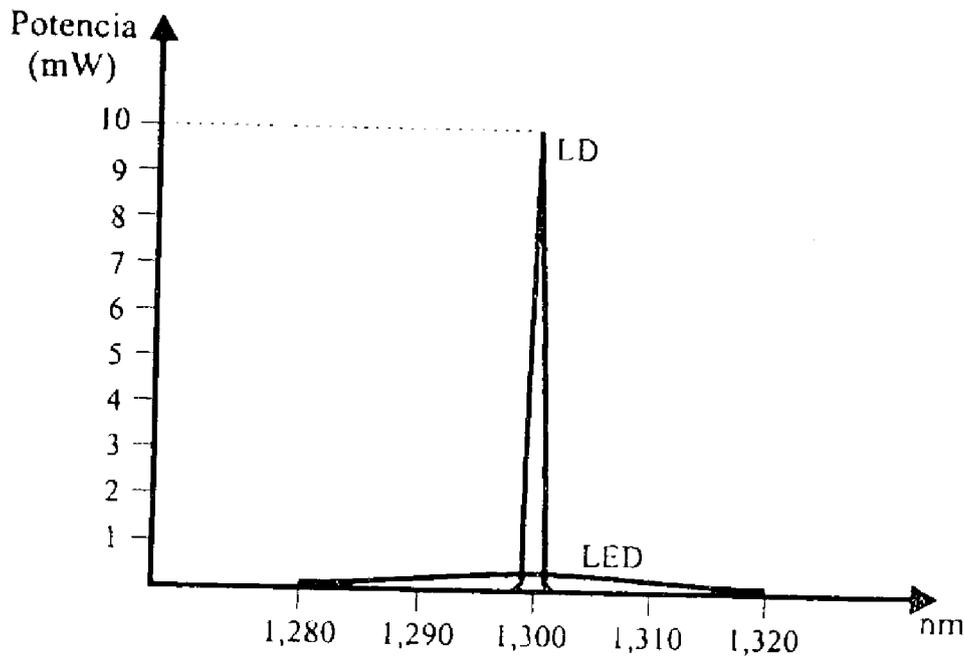




**Fig. 8-5** Respuestas típicas del patrón de radiación de un LED y un LD, que definen la coherencia espacial de la fuente.

\* Este patrón corresponde al de un LED optimizado, denominado LED "con emisión en el borde (ELED)" o "de emisión lateral". Los LEDs más simples, llamados "con emisión de superficie" tienen un haz más ancho ( $\alpha \approx \beta \approx 120^\circ$ ).

diodo emisor de luz. Para distancias cortas y redes locales, el LED es suficiente. En cambio, para enlaces de larga distancia, el láser semiconductor es obligado, por su alta coherencia temporal y espacial, además de contar con una alta eficiencia electro-óptica y una gran capacidad de modulación.



**Fig. 8-6** Comparación aproximada de la anchura espectral ( $\Delta\lambda$ ) y la potencia de salida de un LD con un LED.

## 8.5 Amplificadores

Muchos sistemas en operación utilizan *repetidores* intermedios debido a la gran longitud de sus enlaces. Estos repetidores convencionales combinan la regeneración de la señal con su amplificación. Es decir, efectúan la conversión de fotones a electrones (detector óptico), realizan la amplificación eléctrica, la resincronización y regeneración de los pulsos y, nueva y finalmente, la conversión de electrones a fotones (fuente de luz). Estos *amplificadores electrónicos* o repetidores están siendo desplazados por los *amplificadores ópticos*.

Los amplificadores ópticos no tienen que “pasar por el dominio eléctrico”, ya que directamente amplifican la señal óptica. Esta técnica tiene ventajas económicas, pues su diseño es conceptualmente sencillo y el producto final es más pequeño y más barato que un repetidor.

Hay dos tipos de estos amplificadores: el *amplificador semiconductor* y, redundantemente, el *amplificador óptico* propiamente dicho. En ambos casos es deseable que tengan alta ganancia de amplificación (del orden de 30 dB) y que introduzcan poco ruido, además de satisfacer otras propiedades de operación. El amplificador semiconductor también se puede usar como preamplificador inmediatamente antes de la entrada al receptor final (fotodetector PIN o de avalancha). Cuando se emplea para esta aplicación, con una ganancia de 30 dB, la sensibilidad del receptor mejora cerca de 20 dB por encima de la calidad que se tendría con el fotodetector sin preamplificador. Podría pensarse en una analogía con los enlaces de comunicación por satélite, en donde se necesita un preamplificador de bajo ruido antes de que la señal entre al receptor.

Los amplificadores ópticos se emplean con fibras monomodo a 1,300 y 1,550 nm. Recuérdese que el fenómeno de dispersión —según su tipo— puede ser nulo o muy pequeño en estas fibras, de manera que su principal problema no es la regeneración de los pulsos, sino el límite impuesto en la longitud del enlace por la atenuación acumulativa en dB/Km. Es decir, basta con amplificar la señal para contrarrestar las pérdidas por atenuación y lograr transmisiones de muy larga distancia.

En realidad, los amplificadores semiconductores son tipos especiales de los láseres semiconductores, que en lugar de funcionar como osciladores se convierten en simples amplificadores. Existen diferentes variantes y se clasifican de acuerdo con la reflectividad de sus paredes. Al restarle reflectividad a las paredes en los extremos del “chip” semiconductor, se elimina la realimentación del LD convencional y se pierde el efecto oscilatorio. Los dos tipos más importantes son el amplificador no resonante (o TWA\*) y el resonante (o amplificador Fabry-Pérot). Este último funciona básicamente como un diodo láser, polarizado justo por debajo del nivel de umbral y con paredes ligeramente reflectivas; su ganancia es muy sensible a las variaciones de temperatura.

Los amplificadores no resonantes o de onda viajera tienen sus paredes con muy poca reflectividad y se usan más que los resonantes, a pesar de que su ganancia es menor, porque tienen una anchura espectral amplia y poca sensibilidad a la polarización. Son más difíciles de fabricar que los

---

\* Del inglés, *Traveling-Wave-Amplifier* = Amplificador de onda viajera.

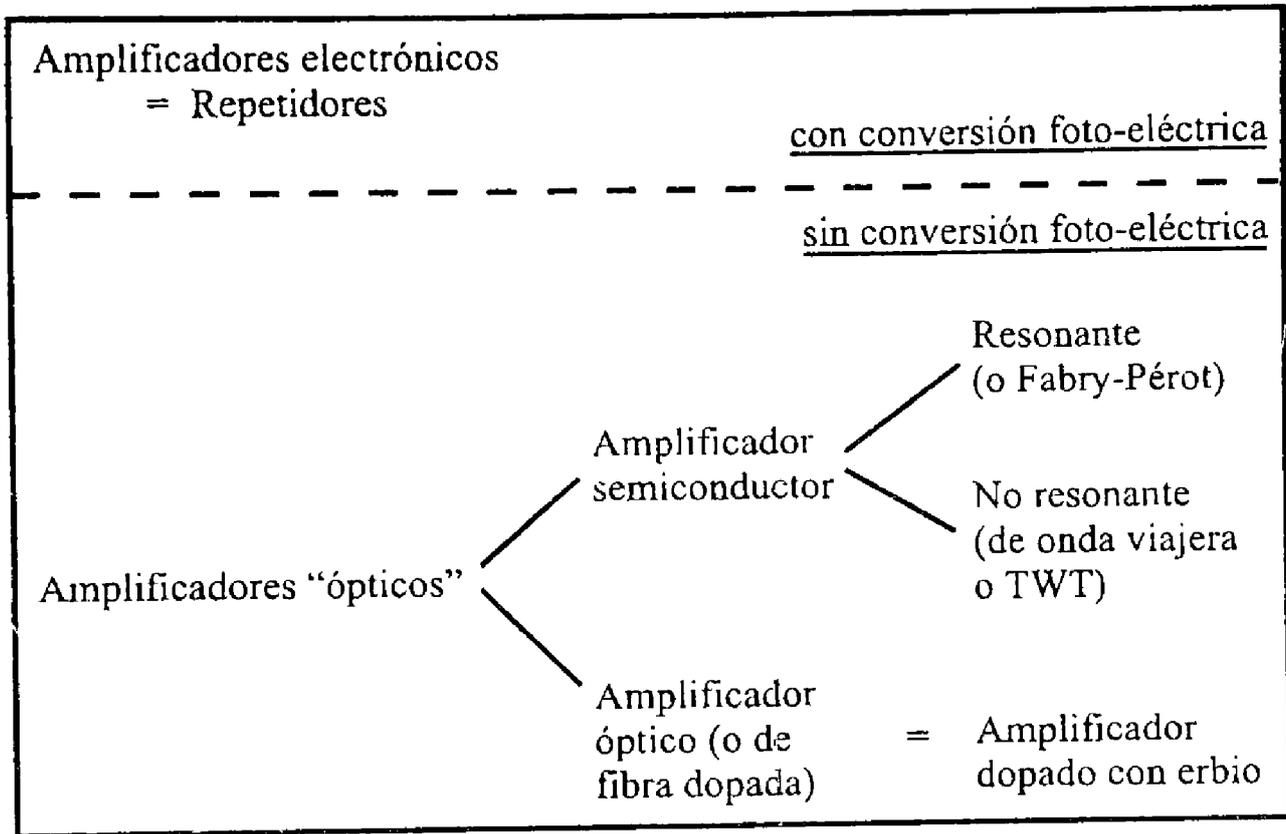


Fig. 8-7 Clasificación de los principales amplificadores empleados en comunicaciones ópticas.

amplificadores Fabry-Pérot, pero son superiores en cuanto a generación de ruido (niveles más bajos).

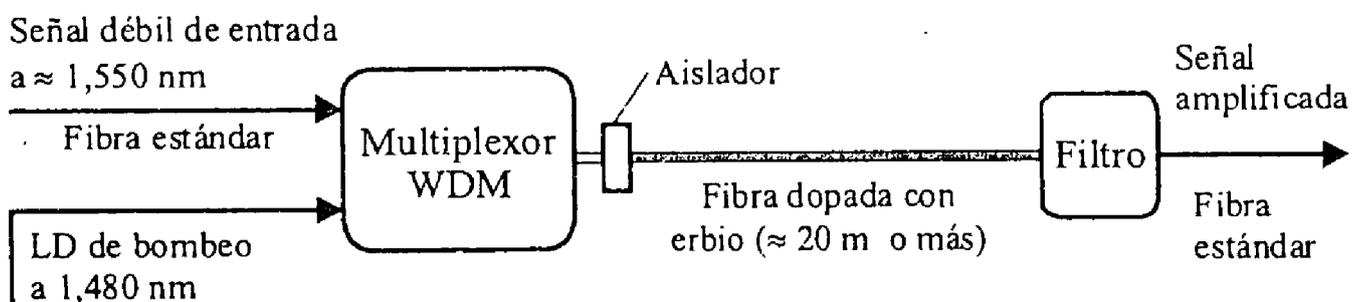
Los amplificadores ópticos propiamente dichos, que corresponden al segundo tipo de "amplificadores ópticos", también se conocen como "amplificadores de fibra dopada". Se fabrican usando una sección de fibra monomodo convencional de silicio, dopándola con un metal de tierra rara, tal como el erbio (Er). Hasta hace poco, el erbio era considerado como un simple metal raro que carecía de aplicaciones prácticas, pero aquí vemos un uso muy importante. Antes de ampliar sobre estos innovadores amplificadores dopados con erbio, tal vez sea útil referirnos al diagrama de la Fig. 8-7, con el fin de evitar confusiones en la clasificación de los principales amplificadores y los diferentes nombres con los que se les conoce.

A fines de los años 80 y principios de los 90, la mayor parte de los enlaces de larga distancia usaban equipo en los 1,300 nm. Pero ahora, son cada vez más los sistemas nuevos que emplean fibra óptica de bajas pérdidas en los 1,550 nm, combinándola con amplificadores intermedios dopados con erbio.

Tal como se dijo en un párrafo anterior, un amplificador de erbio (nos referiremos a él así, por abreviar) consiste de una sección de fibra monomodo, de unos 20 m de longitud o más, dopada con erbio. Además, se necesita —para que todo funcione— un láser de bombeo a 980 nm o a 1,480 nm, y un acoplador de multiplexación (o multiplexaje) por división de longitud de onda (WDM\*). La amplificación se realiza acoplando a la señal luminosa de 1,550 nm con el láser de bombeo, a través del acoplador WDM, y de allí al tramo de los 20 metros de fibra dopada (Fig. 8-8). El erbio absorbe la luz del láser de bombeo, ya sea a 980 nm o a 1,480 nm (en la mayoría de los casos se prefiere esta longitud de onda), provocando que los electrones pasen a niveles superiores de energía. Por su parte, la luz que llega a 1,550 nm estimula en la fibra dopada las transiciones de electrones entre niveles de energía y produce más fotones coherentes (en fase) a 1,550 nm. De esta forma, se pueden obtener ganancias de amplificación de potencia del orden de 30 dB, que son niveles similares a los de los amplificadores semiconductores.

Cuando están saturados, estos amplificadores de erbio, llamados por sus siglas como EDFA\*\*, pueden entregar niveles de 1 mW de potencia a la salida. Nótese que para un adecuado funcionamiento, es necesario invertir por separado unos 50 mW de potencia en el láser de bombeo.

Actualmente se realizan pruebas con otros materiales para buscar el mismo fenómeno de amplificación, con ganancias interesantes, en la segunda ventana (1,300 nm). Entre otras, las fibras dopadas con praseodimio (Pr)



**Fig. 8-8** Diagrama básico de los componentes de un amplificador dopado con erbio.

\* Del inglés, *Wavelength-Division Multiplexing*.

\*\* Del inglés, *Erbium-Doped Fiber Amplifier*.

han sido motivo de una intensa investigación en esta longitud de onda; es posible que, finalmente, la fibra dopada sea de un material huésped cristalino de fluoruro, en lugar del silicio empleado a 1,550 nm, para lograr una mayor eficiencia.

## 8.6 Detectores ópticos

En los sistemas de comunicación por fibra óptica se utilizan fundamentalmente dos tipos de detectores de luz en el extremo receptor. La débil señal óptica que llega al final de la fibra debe ser convertida a una señal eléctrica, antes de que continúe su paso por etapas de amplificación, demodulación, demultiplexaje, etc. Un detector de luz es, entonces, el primer elemento de la cadena de dispositivos que propiamente conforman al equipo receptor de la Fig. 8-1.

Los dos tipos de detectores que se emplean son, ambos, fotodiodos. De acuerdo con lo dicho, su función es transformar la potencia óptica de entrada a una corriente eléctrica de salida. Al igual que las fuentes luminosas, los detectores ópticos están fabricados con semiconductores de estado sólido, que en base a la teoría de las uniones P-N generan un flujo de corriente cuando captan un fotón; su grado de respuesta depende de los materiales empleados y de la longitud de onda de trabajo. La explicación de los principios físicos bajo los cuales funcionan los fotodiodos le corresponde a un curso de electrónica, y aquí nos limitaremos simplemente a mencionar algunos aspectos relacionados con dichos detectores ópticos.

Entre otros parámetros de operación, es deseable que los fotodiodos sean altamente eficientes, que tengan un bajo nivel de ruido, un amplio ancho de banda (es decir, que respondan de manera uniforme y rápida en todas las longitudes de onda de la señal), que sean poco sensibles a las variaciones de temperatura, baratos, pequeños, etc.

La eficiencia de un fotodiodo está relacionada con su *responsividad*, es decir, la cantidad de electrones que es capaz de generar en relación con los fotones recibidos. Dicho de otra forma, es la corriente eléctrica que entrega a la salida en relación con la potencia óptica de entrada.

Los dos tipos de fotodiodos que se emplean son el *fotodetector PIN* y el *fotodiodo de avalancha (APD)*. La responsividad de un fotodiodo de avalancha es mayor que la de un fotodetector PIN. Sin embargo, el primero es más sensible a los cambios de temperatura y más caro que el segundo. El

detector PIN se usa más comúnmente en enlaces de corta distancia y el APD es muy útil en transmisiones de larga distancia, donde la señal óptica de llegada es muy débil y se requiere alta responsividad. Por lo que se refiere a la velocidad de respuesta, ambos fotodiodos pueden trabajar actualmente a velocidades muy altas de transmisión digital.

## **8.7 Ejemplos de sistemas terrestres y submarinos**

### **8.7.1 Redes terrestres de larga distancia**

El intentar hacer una relación y descripción de las redes terrestres de larga distancia por fibra óptica que actualmente hay en el mundo sería una labor titánica y posiblemente inútil. Son tantas y tan extensas las redes que existen por todos los rincones del planeta, que dicho compendio ocuparía miles de páginas impresas. Por lo que se refiere a las redes locales en el mundo, la situación sería aún peor. A la fecha, debe haber ya cerca de 70 millones de kilómetros\* de fibra instalada a través de ciudades, desiertos y montañas, así como en las profundidades de los mares de la Tierra, y sin duda su alcance y penetración será mayor en el siglo XXI, hasta llegar al interior de los mismos hogares de las futuras generaciones.

En el caso particular de México, ya hay varias redes de larga distancia funcionando. Entre ellas, destacan las de Telmex y Alestra. Aunque Telmex (Teléfonos de México) posee la red más grande, aquí tomaremos como ejemplo la de Alestra, de manera muy breve.

Hacia el año 2000, la red de Alestra tendrá una extensión total, a través de la República Mexicana, cercana a los 9,000 kilómetros. De éstos, en su primera fase, ya se instaló la mitad. Las innovaciones tecnológicas que destacan en esta red son su ancho de banda de 20 Gb/s y el uso de amplificadores ópticos dopados con erbio. La fibra es monomodo, con una longitud de onda de operación de 1,550 nm (véase Internet en las referencias).

### **8.7.2 Cables submarinos**

Tal vez algunos se sorprendan al enterarse de que ya hay más de 300,000 Km de cable óptico bajo el mar\*\*. Son varios los sistemas en operación, entre ellos el Columbus II, el TAT-12/13 y el FLAG.

---

\* Casi la mitad de la distancia entre la Tierra y el Sol.

\*\* Con relación a su instalación, se recomienda leer los comentarios al final de la sección 3.4.

El sistema Columbus II se terminó de instalar en 1994. Tiene una vida útil de diseño de 25 años y una capacidad para transmitir 23,000 canales telefónicos. El cable inicia en Cancún, México, y termina en Palermo, Italia (Fig. 8-9). Su longitud total es de 12,200 Km. y tuvo un costo cercano a los 400 millones de dólares. Es propiedad de un consorcio internacional, formado por docenas de compañías inversionistas; entre ellas están Teléfonos de México, AT&T y Telefónica de España. Como otros cables transoceánicos, en algunos puntos está sumergido a profundidades de hasta 8,000 m y soporta presiones de 6,000 T/m<sup>2</sup>.

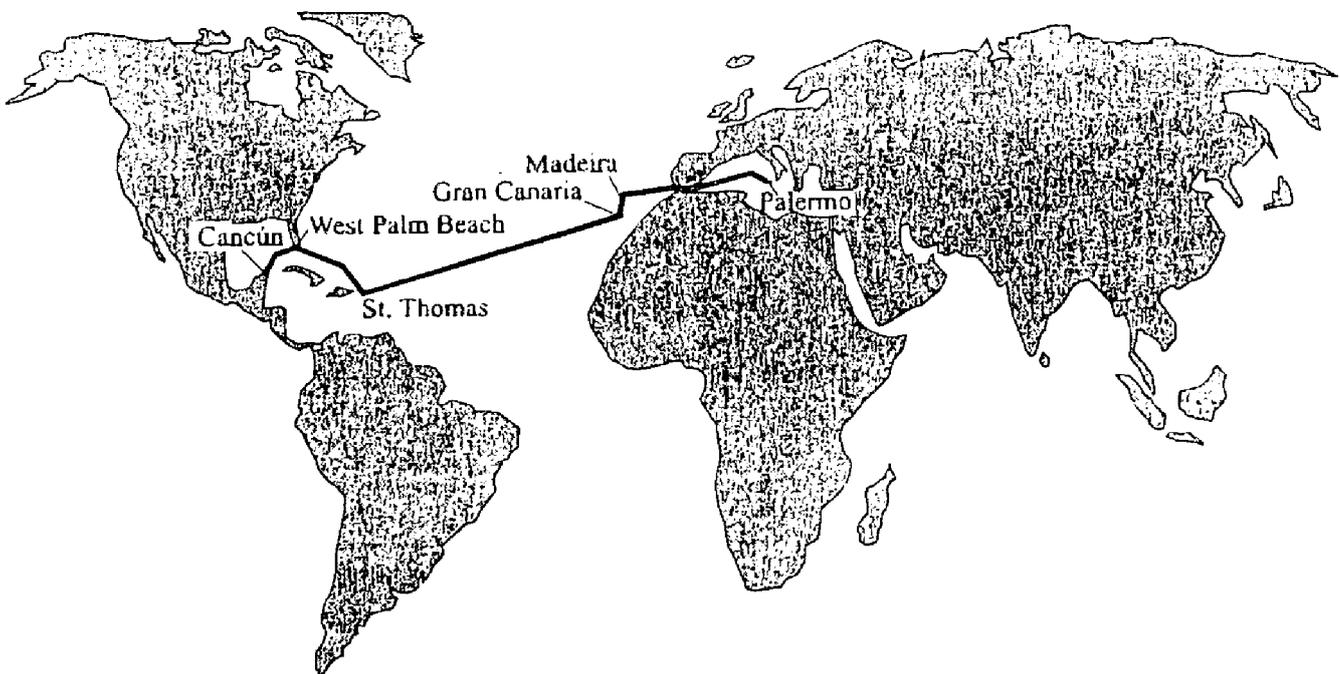


Fig. 8-9 Trayectoria del cable submarino Columbus II.

El sistema TAT-12/13 también está sumergido en el océano Atlántico (Fig. 8-10). En realidad es un *anillo*, con una longitud total de 12,760 Km. Terminó de instalarse en 1996 y su vida útil de diseño también es de 25 años. Funciona en la tercera ventana y usa cientos de amplificadores ópticos dopados con erbio, ya que la distancia promedio entre amplificadores es de 45 Km. En principio, su capacidad de transmisión es de 10 Gb/s\*. La energía

\* En contraste, vale la pena compararlo con el TAT-8, que fue el primer cable TAT en usar fibra óptica y que está en servicio desde 1988. Este tiene regeneradores electrónicos convencionales y su capacidad está limitada a 280 Mb/s. Aunque aún no llega a la mitad de su vida útil, se puede decir que el cable ya es obsoleto.

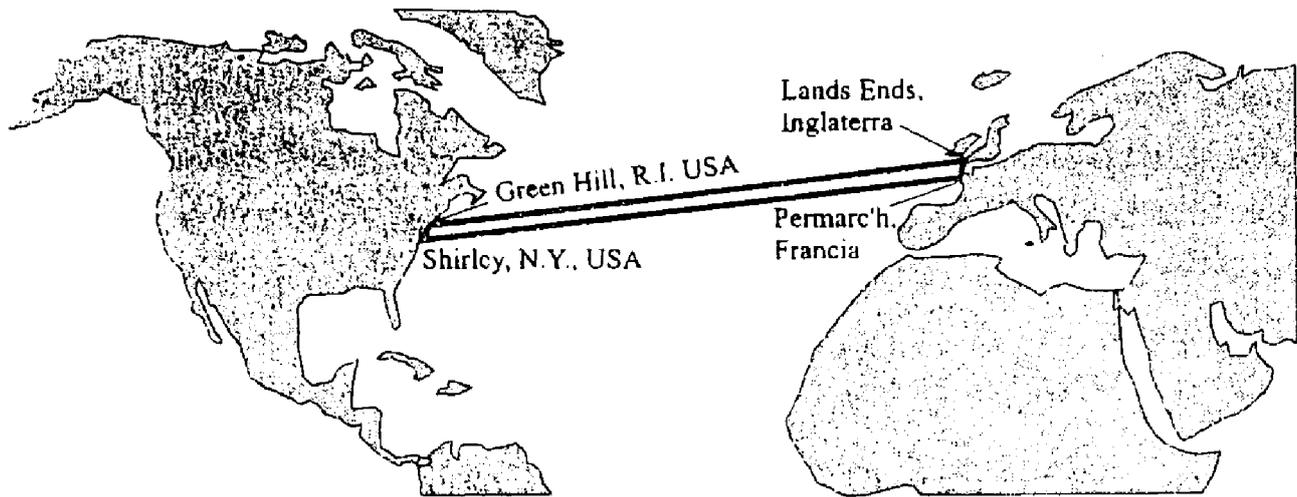


Fig. 8-10 El anillo submarino TAT-12/13.

eléctrica necesaria para que los amplificadores funcionen se suministra por los conductores de cobre (véase la Fig. 7-4), con una corriente de 1.6 amperes, y el mar se emplea como conductor de retorno.

Como último ejemplo, mencionaremos el sistema FLAG (*Fiber optic Link Around the Globe*), recién inaugurado en 1997. Tiene una capacidad de tráfico de 120,000 canales telefónicos y conecta a 12 países de Asia, Africa y Europa. Aunque tiene dos tramos terrestres en Egipto y Tailandia, la mayor parte del cable es submarino (96%). La longitud total es de 27,000 Km

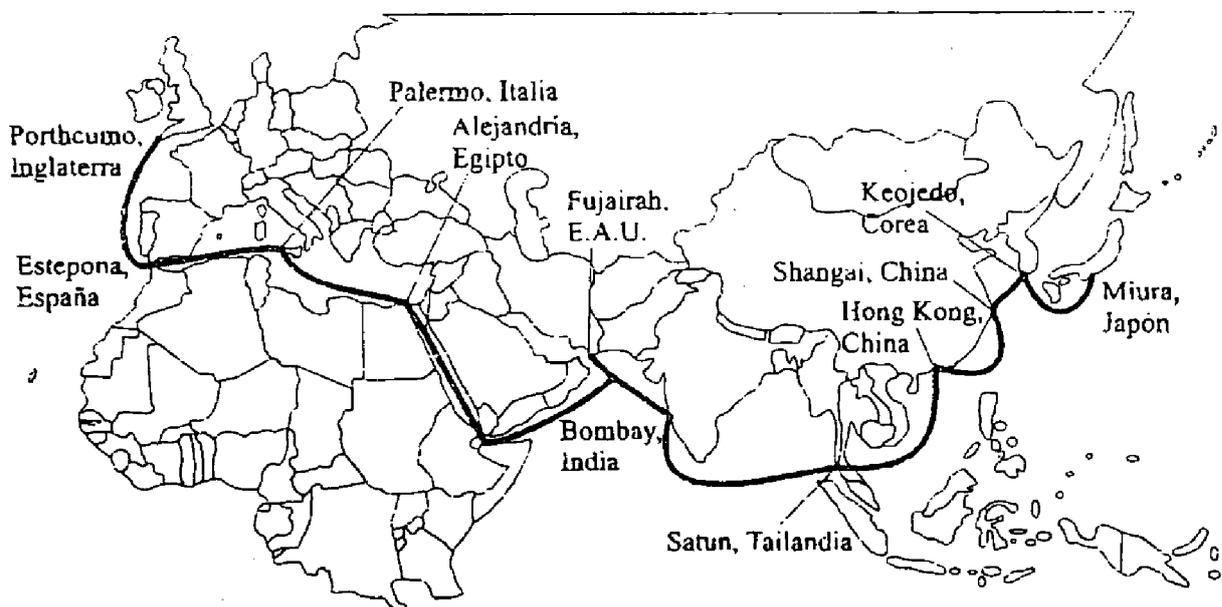


Fig. 8-11 El Sistema FLAG.

(Fig. 8-11). También emplea amplificadores ópticos dopados con erbio y su capacidad digital es de 10 Gb/s\*. Unos 6,600 Km del cable están enterrados un metro por debajo del agua, para mayor protección.

Aunque el nombre de este último sistema parece engañoso, en realidad fue planeado para enlazarse con el TAT-12/13 en Inglaterra (véase la Fig. 8-10). Además, también hay un nuevo cable por debajo del océano Pacífico, llamado TPC-5 CN (*TransPacific-5 Cable Network*), que es un anillo de 24,000 Km y que une a Oregón (E.U.) con Japón, baja a Guam, sigue hacia Hawai y California, y de allí continúa y termina nuevamente en Oregón, completándose así el anillo. De esta forma, al enlazarse los tres sistemas TAT-12/13, FLAG y TPC-5 CN, en Inglaterra y Japón, vía un enlace terrestre que atraviesa los Estados Unidos de costa a costa, se tiene una red de 10 Gb/s que en efecto le da la vuelta al mundo en su totalidad.

---

\* Nótese que se usan dos pares de fibra óptica. Cada par funciona a 5 Gb/s.

# Apéndice 1

## Funciones trigonométricas e hiperbólicas en términos de exponenciales

Sea  $z$  una variable compleja igual a

$$z = x + jy$$

Entonces se cumple que:

$$e^{jz} = \cos z + j \operatorname{sen} z$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2j} (e^{jz} - e^{-jz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{jz} + e^{-jz})$$

$$\operatorname{senh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})$$

$$\operatorname{cosh} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z})$$

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\operatorname{cosh} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

$$\tanh (x + jy) = \frac{\tanh x + j \tan y}{1 + j \tanh x \tan y}$$

Estas fórmulas también son válidas para valores reales, haciendo  $y = 0$ ,  $\Rightarrow z = x$ .

De las expresiones anteriores, es fácil demostrar que:

$$\cosh z + \sinh z = e^z$$

$$\cosh z - \sinh z = e^{-z}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

Asimismo:

$$\sinh^2 z = \frac{1}{2} (\cosh 2z - 1)$$

$$\cosh^2 z = \frac{1}{2} (\cosh 2z + 1)$$

---

# Referencias

## Libros

- Collin, R. E., *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, 1960.
- Jackson, H., *Antenna Engineering Handbook*, McGraw-Hill, 1961.
- Lance, A. L., *Introduction to Microwave Theory and Measurements*, McGraw-Hill, 1964.
- Hoque, H., *Stripline Circuit Design*, Artech House, 1974.
- Sargent, N. C., Garg, R. y Bahl, I. J., *Microstrip lines and slot-lines*, Artech House, 1979.
- Midwinter, J. E., *Optical Fibers for Transmission*, John Wiley, 1979.
- Edwards, T. C., *Foundations for Microstrip Circuit Design*, Wiley, 1981.
- Marcuse, D., *Light Transmission Optics*, Van Nostrand Reinhold, 2ª edición, 1982.
- Senior, John M., *Optical Fiber Communications*, Prentice Hall, 1985.
- Collin, R. E., *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, 1985.
- Marcuvitz, N., *Waveguide Handbook*, IEE, Londres, 1986.
- Sander, K. F. y Reed, G. A. L., *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves*, 2ª edición, Cambridge University Press, 1986.
- Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, 1989.
- Tur, J. y Martínez, M. R., *Todo sobre las fibras ópticas*, Marcombo, 1989.
- Carter, R. G., *Electromagnetic waves, microwave components and devices*, Wiley & Hall, 1990.

- Cheng, D. K., *Field and Wave Electromagnetics*, 2ª edición, Addison Wesley, 1990.
- Diamant, P., *Wave Transmission and Fiber Optics*, Macmillan, 1990.
- Keiser, G., *Fiber Optics: Communication and Other Applications*, McGraw-Hill, 1991.
- Nérou, J. P., *Introducción a las telecomunicaciones por fibras ópticas*, Trillas, 1991.
- Keiser, G., *Optical Fiber Communications*, McGraw-Hill, 1991.
- Benson, F. A. y Benson, T. M., *Fields, Waves and Transmission Lines*, Chapman & Hall, 1991.
- Agrawal, G. P., *Fiber-Optic Communication Systems*, Wiley, 1992.
- Hayt, W. H. Jr., *Teoría Electromagnética*, 5ª edición, McGraw-Hill, 1992.
- Hecht, J., *The Laser Guidebook*, 2ª edición, McGraw-Hill, 1992.
- Helszajn, J., *Microwave Engineering: passive, active and non-reciprocal circuits*, McGraw-Hill, 1992.
- Baden Fuller, A. J., *Engineering Electromagnetism*, Wiley, 1993.
- Johnk, C. T. A., *Ingeniería electromagnética, campos y ondas*, Limusa, 1993.
- Winch, R. G., *Telecommunication Transmission Systems*, McGraw-Hill, 1993.
- Jardón, H. y Linares, R., *Sistemas de comunicaciones por fibras ópticas*, Alfaomega, 1995.
- Chomycz, B., *Fiber Optics Installations*, McGraw-Hill, 1996.
- Combes, P. F., *Micro-ondes, Vol. 1: Lignes, guides et cavités*, Dunod, 1996.
- Powers, J., *An Introduction to Fiber Optic Systems*, 2ª edición, Irwin, 1997.
- Green, J. H., *The Irwin Handbook of Telecommunications*, 3ª edición, Irwin, 1997.

**Artículos técnicos**

- Cohn, S. B., *Problems in strip transmission lines*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-3, 1955.
- Gloge, D., *Propagation Effects in Optical Fibers*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 23, No. 1, 1975.
- Hammerstadt, E. O., *Equations for microstrip circuit design*, Proceedings of the fifth European Microwave Conference, 1975.
- Giallorenzi, T. G., *Optical Communications Research and Technology: Fiber Optics*, Proceedings of the IEEE, Vol. 66, No. 7, 1978.
- Wells, P., *Optical-fibre systems for telecommunications*, GEC Journal of Science & Technology, Vol. 46, No. 2, 1980.
- Li, T., *Structures, Parameters and Transmission Properties of Optical Fibers*, Proceedings of the IEEE, Vol. 68, No. 10, Oct. 1980.
- Snyder, A. W., *Understanding Monomode Optical Fibers*, Proceedings of the IEEE, Vol. 69, No. 1, Enero 1981.
- De Smedt, R. y Denturck, B., *Scattering matrix of junctions between rectangular waveguides*, IEE Proceedings, Vol. 130, Pt. H., No. 2, Marzo 1983.
- Hussey, C. D., *Radiation from graded-index single-mode fibers*, IEE Proceedings, Vol. 130, Pt. H., No. 3, Abril 1983.
- Yeh, Ch., *Guided-Wave Modes in Cylindrical Optical Fibers*, IEEE Transactions on Education, Vol. E-30, No. 1, Febrero 1987.
- Das, B. N., Rao, P. V. y Chakraborty, A., *Analysis of T-junction between rectangular and circular waveguides by variational method*, IEE Proceedings, Vol. 136, Pt. H., No. 6, Diciembre 1989.
- Kim, C. Y., Yu, S. D., Harrington, R. F., Ra, J. W. y Lee, S. Y., *Computation of waveguide modes for waveguides of arbitrary cross-section*, IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. H., No. 2, Abril 1990.
- Lier, E. y Rengarajan, S., *Radiation from elliptical hybrid-mode waveguides*, IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. H., No. 6, Diciembre 1990.

Huang, Y., Yang, N., Lin, S. y Harrington, R. F., *Analysis of a post with arbitrary cross-section and height in a rectangular waveguide*, IEE Proceedings - H, Vol. 138, No. 5, Octubre 1991.

Lancaster, M. J., Maclean, T. S. M., .., *Superconducting microwave resonators*, IEE Proceedings - H, Vol. 139, No. 2, Abril 1992.

Navarro, A., *Study of TE and TM modes in waveguides of arbitrary cross-section using an FD-TD formulation*, IEE Proceedings - H, Vol. 139, No. 6, Diciembre 1992.

Trischitta, P. y otros, *The TAT-12/13 Cable Network*, IEEE Communications Magazine, Febrero 1996.

Welsh, T. y otros, *The FLAG Cable System*, IEEE Communications Magazine, Febrero 1996.

Alvarez, A., Connor, G. y Guglielmi, M., *New simple procedure for the computation of the multimode admittance or impedance matrix of planar waveguide junctions*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 44, No. 3, Marzo 1996.

Potenza, M., *Optical Fiber Amplifiers for Telecommunication Systems*, IEEE Communications Magazine, Agosto 1996.

Ando, A., Honma, Y. y Kagoshima, K., *A novel electromagnetically coupled microstrip antenna with a rotatable patch for personal handy-phone system units*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 46, No. 6, Junio 1998.

## Internet

Red Alestra, <http://www1.alestra.com.mx/alestra/html/red.html>, Agosto 1997.

ZBLAN, NASA, <http://science.mfsc.nasa.gov/newhome/headlines/msad>, Febrero 1998.

**indice**

- Admitancia normalizada, 174
- Amplificador
  - de onda viajera, 462
  - dopado con erbio, 463
  - electrónico, 461
  - óptico, 461
- Anchura espectral, 456, 458
- Angulo
  - crítico, 429
  - de aceptación, 390, 437
  - de reflexión interna, 428
- Apertura numérica, 390, 437
- Atenuación
  - en guía circular, 334
  - en guía rectangular, 297, 342
- Atenuador, 356
  - de aleteo, 357
  - de deslizamiento lateral, 357
  - de rotación, 358
  - matriz de dispersión, 356
- Birrefringencia, 426
- Cable
  - bifilar, 203
  - coaxial submarino, 212
  - coaxial terrestre, 208, 341
  - multifilar trenzado, 205
- Carta de Smith, 116
  - forma de admitancias, 174
  - línea con pérdidas, 152
  - línea sin pérdidas, 116
- Cavidad
  - en guía rectangular, 305
  - Fabry-Pérot, 457
  - resonante, 191
- Coherencia espacial, 456, 460
- Columbus II, 467
- Conductividad, 35
  - alterna, 36
- Cono de aceptación, 437
- Constante de
  - atenuación, 56, 227
  - fase, 56, 221, 394
  - propagación, 56, 81, 226
  - propagación normalizada, 416
- Cuadrete, 206
- Decibel, 57
- Diafonía, 206
- Dieléctrico, 35, 38
  - histéresis, 36
  - tangente de pérdidas, 36, 38
- Dispersión, 251, 343
  - diagrama de, 254, 426
  - intermodal, 436
  - intramodal, 425
  - modal, 436
- Equilibrador reactivo, 178, 182
- Factor de calidad, 193, 305, 310
- Fibra óptica, 371
  - amplificadores, 450, 461
  - atenuación, 451

- constante de propagación
    - normalizada, 416
  - empalmes, 450
  - fotodetectores, 465
  - frecuencia normalizada, 388
  - frecuencias, 373
  - fuentes de luz, 456
    - diodo emisor (LED), 18, 456
    - diodo láser (LD), 18, 456
  - modo dominante, 395, 412
  - modos degenerados, 423
  - modos linealmente polarizados, 422, 424
  - modulación, 449
  - monomodo de índice escalonado, 28, 375, 425
    - constante de fase, 394, 396
    - ecuación característica, 377, 389
    - frecuencia de corte, 394, 398
  - multimodo de índice escalonado, 28, 375, 433
    - constante de fase, 394, 396
    - diferencia entre índices, 433
    - distribución de campos, 401
    - ecuación característica, 377, 389
    - frecuencia de corte, 394, 398
    - número de modos, 401
  - multimodo de índice gradual, 28, 375, 440
    - dispersión, 444
    - frecuencia normalizada, 444
    - índice de refracción, 441
    - número de modos, 445
  - núcleo, 373
  - producto ancho de banda •
    - distancia, 453
  - producto tasa de transmisión •
    - distancia, 454
  - propagación, 8, 377
  - revestimiento, 373
  - ventanas de operación, 19, 20
- FLAG, 468
- Fotodetector
  - de avalancha, 465
  - PIN, 465
- Funciones
  - Bessel de primera clase, 313, 315, 379
  - Bessel de segunda clase, 313
  - Bessel modificada, 380
  - hiperbólicas, 471
- Guía de ondas, 215, 341
  - circular, 311
    - ancho de banda, 333
    - aplicaciones, 329
    - atenuación, 334
    - distribución de campos, 319, 321
    - estándares, 329
    - frecuencia de corte, 317, 319
    - modo dominante, 26, 322
    - modos TE, 314
    - modos TM, 320
    - potencia, 334
  - elíptica
    - distribución de campos, 337
    - estándares, 338
    - modo dominante, 337
  - rectangular, 262
    - ancho de banda, 333
    - atenuación, 297
    - constante de fase, 279
    - distribución de campos, 268, 281
    - distribución de corrientes, 288
    - estándares, 283
    - excitación, 302
    - frecuencia de corte, 269, 279

- modo dominante, 26, 283
- modos TE, 264
- modos TM, 277
- potencia, 292
- velocidad de fase, 269, 279
- placas paralelas
  - distribución de campos, 247, 249
  - frecuencia de corte, 239
  - parámetros, 44
- Impedancia
  - acoplamiento, 159, 350
    - con dos stubs, 182
    - con un iris, 352
    - con un poste, 354
    - con un stub, 178
    - con una sección de  $\lambda/4$ , 162
  - característica, 58, 81
  - de carga, 68
  - de entrada, 71, 76, 78
  - de onda, 221, 230, 258
  - inversor de, 162
  - normalizada, 117
  - transformador de, 160
- Índice de refracción, 375, 428
- Iris, 351, 352
- Línea
  - acoplada, 66
  - balanceada, 9
  - bifilar, 203
    - parámetros, 42
  - coaxial, 208, 342
    - parámetros, 43
  - de cinta, 365, 367
  - desacoplada, 68, 90
  - ecuación general, 51, 54
  - eficiencia, 136, 141
  - evolución, 10
  - microcinta, 365
  - parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $C$  y  $G$ , 33, 42
  - pérdidas, 136
  - terminada en circuito abierto, 78
  - terminada en corto circuito, 76
  - tiempo de retardo, 62
  - tipos, 5, 21
- Longitud de onda
  - característica, 61
  - de corte, 239, 270
  - en la guía, 238, 270
- Matriz
  - de dispersión, 348
  - de transmisión, 108
- Maxwell
  - ecuaciones, 28, 218
  - forma fasorial, 220
- Microcinta, 14, 24, 365, 368
- Modo de resonancia, 308
- Modo propio, 308
- Modos de propagación, 25, 342
  - cuasi-TEM, 25, 367, 368
  - degenerados, 287, 330, 423
  - dominante, 25, 283, 322, 337, 395
  - híbridos, 25, 333, 378, 387
  - linealmente polarizados, 27, 422
  - superiores, 25
  - TE, 25, 232, 241, 264, 314, 387
  - TEM, 22, 25, 216
  - TM, 25, 235, 246, 277, 320, 387
- Neper, 56
- Onda
  - estacionaria, 90, 345
  - frente de, 427
  - incidente, 66, 346
  - plana, 216
  - reflejada, 68, 346
- Optica radial, 427
- Parámetros
  - de dispersión, 349
  - de una línea, 33
- Pérdidas
  - de retorno, 143

- en fibra óptica, 451
  - en guía rectangular, 297
- Permeabilidad relativa, 45
- Permitividad relativa, 38
  - compleja, 36
  - en fibra óptica, 374
- Placa
  - de cuarto de onda, 360
  - de media longitud de onda, 362
- Poste, 345, 354
- Potencia
  - eficiencia de transmisión, 136, 141
  - en guía circular, 334
  - en guía rectangular, 292
- Poynting, vector de, 23
- Profundidad de penetración, 34, 229
  
- Raíces
  - fibras ópticas, 398, 399, 400
  - guías circulares, 316, 317
- Rayos
  - congruencia, 433
  - meridionales, 437
  - no-meridionales, 438
- Reactancia
  - de entrada, 85
  - normalizada, 116
- Reflexión
  - coeficiente de, 90, 139
  - en el generador, 106
  - interna, 428
- Relación de onda estacionaria, 94, 348
- Resistencia
  - normalizada, 117
  - pelicular, 299
- Resonancia, 191, 305
  
- Sintonizador deslizante, 354
- Susceptancia
  - de un iris, 352
  - de un poste, 354
  - normalizada, 174
- T mágica, 364
- TAT-6, 213
- TAT-12/13, 466
- Tiempo de retardo, 62
- TPC-5 CN, 469
- Transformador
  - de impedancias, 160
  - de modos, 319
- Triplaca, 365, 367
  
- Unión
  - giratoria, 331
  - híbrida, 363
  - T, 363
  
- Velocidad
  - de fase, 59, 222, 252, 269
  - de grupo, 252, 271
  - de la luz, 60
  
- WDM (multiplexaje por división de longitud de onda), 464
  
- ZBLAN, 452